الجبر الخطي

وتطبيقاته

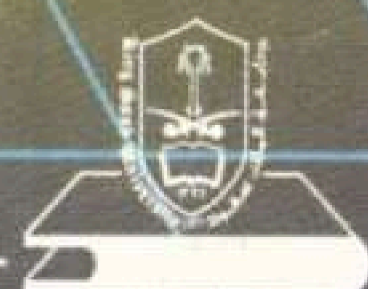
تأليف

جلبرت سترنج

ترجمة

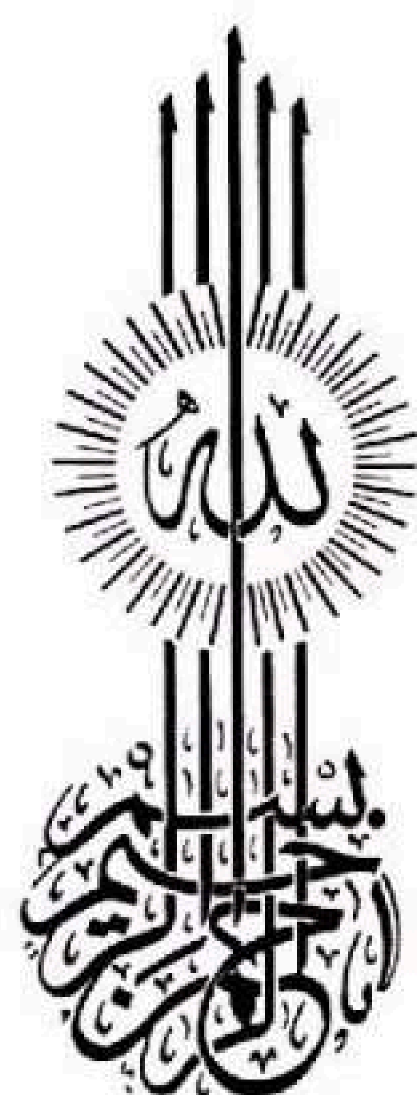
الدكتور محمد عادل سودان

الدكتور حسن محيي الدين حميده



النشر العلمي و المطابع

جامعة الملك سعود


الله
بسم الله الرحمن الرحيم

الجبر الخطي

وتطبيقاته

تأليف

جلبرت سترنج

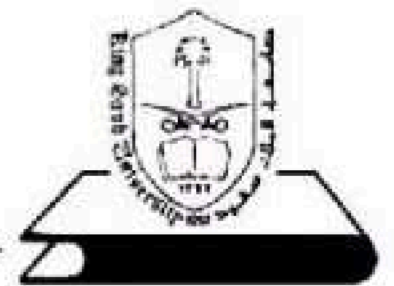
أستاذ في معهد ماساشوستس التقني

ترجمة

الدكتور محمد عادل سودان **الدكتور حسن محيي الدين حميدة**

قسم الرياضيات - كلية العلوم

جامعة الملك سعود



النشر العلمي والمطابع - جامعة الملك سعود

ص . ب ٦٨٩٥٣ - الرياض ١١٥٣٧ - المملكة العربية السعودية

ⓒ جامعة الملك سعود، ١٤٢١هـ (٢٠٠٠م)
هذه ترجمة عربية مصرح بها لكتاب :
Linear Algebra and Its Applications, 3rd edition.
By : Gilbert Strang
©1988, Harcourt Brace Jovanovich

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر

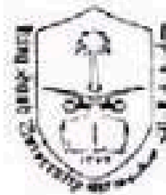
سترنج ، جلبرت
الجبر الخطي وتطبيقاته / ترجمة محمد عادل سودان ، حسن محيي الدين حميدة ٠ - ط١
- الرياض

٨٠٠ ص ، ١٧سم ×٢٤سم
ردمك : ١ - ١١٣ - ٣٧ - ٩٩٦٠

١ـ الجبر الخطي أ ـ سودان ، محمد عادل (مترجم) ب ـ حميدة ، حسن محيي الدين (مترجم) ج ـ العنوان .
ديوي ٥١٢,٥ ٢١/٠٥٨١

رقم الإيداع: ٠٥٨١ / ٢١

حكمت هذا الكتاب لجنة متخصصة شكّلها المجلس العلمي بالجامعة ، وقد وافق المجلس على نشره بعد إطلاعه على تقارير المحكمين في اجتماعه الرابع عشر للعام الدراسي ١٤١٥ / ١٤١٦ هـ المعقود في ١٣/ ٩/ ١٤١٥هـ الموافق ١٢/ ٢/ ١٩٩٥م .



مطابع جامعة الملك سعود

المحتويات

مقدمة الترجمة

بسم الله الرحمن الرحيم والصلاة والسلام على رسوله الأمين وبعد،

إن من دواعي السرور والبهجة إحداث مركز للترجمة في جامعة الملك سعود العزيزة علينا وهو أمر كنا نتوقعه منذ زمن طويل من هذه الجامعة التي انطلقت انطلاقة إسلامية عربية. كيف لا يكون ذلك في جامعة البلاد التي ولدت فيها العربية وإنتشر فيها ومنها الإسلام العظيم. الشكر الجزيل لجامعة الملك سعود وللقائمين على إدارتها لهذه الخطوة المباركة التي نرجو أن تعطي، بعد عون الله، ثمارها سريعاً فيترسخ التدريس باللغة العربية، لغة القرآن الكريم وأن تكون فاتحة خير لهذه الأمة ولتقدمها العلمي. ونأمل أن يحذو حذوها جامعات أخرى في المملكة ومن البلاد العربية الأخرى كما نأمل أن تقنع جامعات عربية غير قانعة بإمكان التدريس بلغة بلادها، بأن اللغة العربية لغة واسعة قادرة على إستيعاب جميع العلوم الحديثة، بجهود أبنائها ودأبهم على الترجمة إليها والكتابة فيها. سدد الله الخطى لما فيه خير هذه الأمة المنكوبة من بعض أبنائها.

يحتل الجبر الخطي مكاناً متميزاً في الرياضات المعاصرة؛ فهو أساسي في أغلب البراهين، تقوم عليه الهندسة والجبر و التحليل والميكانيك. و لقد أصبح مستنداً لكثير من الأبحاث الفزيائية واستخدم بشكل واسع في العلوم الأخرى من طبيعية وإنسانية. لقد أصبحت الرياضيات دراسة متجهة، يدخل فيها المتجه وفضاء المتجهات وعملياتها في قاعدة كل فرع من فروعها.

تقوم أكثر الحسابات الرياضية والفزيائية على تطبيقات الجبر الخطي، وإن كثيرامن مسائل الهندسة المعمارية والهندسة الميكانيكية لا يمكن حلها حالياً إلا باستخدام فضاء المتجهات ومفهوم المصفوفات وهما مفهومان أساسيان من مفاهيم الجبر الخطي. يمكننا أن نصف العصر الحاضر بأنه عصر الحساب. يدخل الحساب في كل شئ، في حل المسائل الرياضية المعقدة، والمسائل الفيزيائية الدقيقة، في الإقتصاد والإحصاء، في التجارة وإدارة الأعمال. كل ذلك تطبيقات لمفاهيم الجبر الخطي.

و لقد أراد مؤلف هذا الكتاب إستخدام الجبر في كل شئ حتى في تنظيم فرق كرة القدم وفي أغلب الألعاب. لا نريد هنا عرض محتويات هذا الكتاب فإن في مقدمة المؤلف ما يكفي.

لا تزال المكتبة العربية شبه خالية، إن لم نقل خالية تماماً، من كتاب في الجبر الخطي التطبيقي، رغم ما لهذا الموضوع من أهمية كبيرة في خدمة فروع العلم المختلفة. لقد قمنا بتوفيق من الله تعالى، بترجمة هذا الكتاب آملين أن يسد جزءاً ولو يسيراً من الحاجة.

نريد أن نذكر قبل الإنتهاء، بعض الإلتزامات التي أخذنا بها، دون غيرها، خلال الترجمة

١ - إلتزمنا بالمصطلحات التي أقرها مكتب تنسيق التعريب التابع لجامعة الدول العربية، فان لم نجد حاجتنا أخذنا بمصطلحات التعليم الثانوي في المملكة العربية السعودية، و إلا، بمصطلح بلد عربي أو اجتهدنا برأينا آملين أن يكون صائبا.

٢- ترجمنا كلمة corner الإنكليزية، المستخدمة كثيراً في هذا الكتاب بقرنة (قرنات) وهي كلمة عربية حملها مجمع اللغة العربية بالقاهرة، المعنى الجديد الذي نريده وقد استعملت هذه الكلمة في جامعة الرباط.

٣- فضلنا كلمة (متراجحة) على كلمة (متباينة) ترجمةً لكلمة inequality للدلالة على التراجح وتركنا (متباينة) لعدم التساوي الذي رمزه $\neq$.

٤- ترجمنا كلمة dimension ببعد إذا كانت تخص فضاءاً ذا بعد واحد وبعدد

أبعاد (أو سعة) إذا كانت تصف فضاء متجهات ذا أبعاد متعددة. خاصة وأن الكتاب قد استخدم هذه الكلمة من أجل بعد واحد وذكر فراغاً ذا بعدين وآخر ذا ثلاثة أبعاد.

٥- استخدمنا كتابة الهمزات كما هي مرسومة في القرآن الكريم وذلك إستناداً إلى كتاب الأستاذ الشيخ مصطفى الغلاييني «قواعد اللغة العربية»، بصورة خاصة من أجل كتابة الهمزة المتوسطة التي أصلها متطرفة.

هذا ما أمكننا القيام به، بتوفيق من الله تعالى، نأمل أن يكون عملنا هذا خالصاً لوجهه الكريم وأن يكون مفيداً، والله سبحانه من وراء القصد.

المترجمان

الدكتور محمد عادل سودان و الدكتور حسن محي الدين حميدة

المقدمة

يعد الجبر الخطي موضوعاً تصورياً وهو من ناحية أولى جميل وواضح . فإذا كانت لديك ثلاثة متجهات من فضاء ذي ١٢ بعداً، فقد يمكنك إدراكها، لكن من الصعب إدراك تركيب لها مثل : الأول + الثاني - مثلي الثالث، إلا أن ذلك يبقى ممكناً. لا يمكن لأحد أن يتصور جميع التراكيب المماثلة . ولكننا، بطريقة أو بأخرى، سنبدأ بإدراك ذلك في هذا المقرر . حتماً، لا يمكن لتركيبات هذه المتجهات الثلاثة أن تغطي الفضاء ذا الاثني عشر بعداً .

الجانب الآخر للجبر الخطي هو كونه ضرورياً وقابلاً للإستخدام . قبل عشر سنوات، كان يعلم بصورة مجردة وكانت الأهمية الحاسمة لهذا الموضوع مفقودة . لا يمكن لمثل هذا الحال أن يستمر . فقد أصبح الجبر الخطي أساسياً وتطبيقياً مثل حساب التفاضل والتكامل، ولحسن الحظ، فإنه أكثر سهولة؛ وكان لا بد للمناهج من أن تتطور . لقد أصبح الآن من المقبول، بصورة شاملة، أن الجبر الخطي مقرر أساسي ضمن مقررات السنتين الأولى وقبل الأخيرة في الكليات بوصفه متطلباً للهندسة والعلوم، وجزءاً أساسياً من الرياضيات .

هدف هذا الكتاب بيان هاتين الناحيتين معاً - جمال الجبر الخطي وقيمته العلمية .

لن تكون جهودنا مركزة على النظريات وبراهينها رغم وجود رياضيات فيها . لن يكون التأكيد على دقة التعبير كبيراً ولكن الإهتمام بالفهم كبير . أحاول التفسير أكثر من الاستنتاج . تقدم الفكرة في الكتاب وكذلك في الدرس، بالأمثلة . سوف

تدرك ذلك عندما تتعامل مع الفضاء الجزئي . سوف تتطور القابلية للمحاكمة الريا ضية إذا أعطيت حقها من العمل . ومع ذلك ، فإن الفكرة الأساسية للجبر الخطي ليست ذات صعوبة كبير ة .

أحب أن أقول ، بوضوح ، أن هذا الكتاب هو كتاب حول الرياضيات ، و ليس كله تعابير مخففة بحيث يفقد غرضه الذاتي . وإني لا أعتقد أن الطالب والأستاذ يريدان منه مقرراً فارغاً ؛ إذ يمكن لثلاث ساعات في الأسبوع أن تنهي كمية لابأس بها شرط أن يساعد الكتاب في إنجاز ذلك . آمل وأعتقد أنك سترى من خلال الأسلوب الشخصي والمألوف لهذا الكتاب ، أنه كتب لتعليم رياضيات حقيقية . كما أن هناك مقاطع يمكنك إهمالها وشروحاً لست بحاجة إليها ، ولكن ، لا يمكنك أن لا تلاحظ القوة الأساسية لهذا الموضوع . إنه ينتقل بصو رة طبيعية وسهلة من المستقيم أو المستوي إلى الفضاء ذي الـ n بعداً R^n . هذه الخطوة ريا ضية على أحسن وجه ويمكن لأي طالب أن يتقبلها .

هناك سؤال يصعب تأ جيل الجواب عنه : كيف ينبغي أن يبدأ المقرر؟ يأتي كثير من الطلاب إلى السنة الأولى وهم يعرفون بعض الشيء عن المعادلات الخطية ، لذا أعتقد أن علينا أن نبدأ بـ n معادلة بـ n مجهولاً ، $Ax = b$ وبالطريقة الأكثر سهولة – الحذف الغاوسي (وليس بالمحددات) . سيكون ذلك مقدمة مثالية لضرب المصفوفات . لحسن الحظ ، حتى لو كانت الطريقة واضحة المعالم ، فإن هناك أفكاراً غريبة وأساسية يطلب فهمها ، وهي جديدة بالنسبة لكل طالب تقريباً . على المرء أن يدرك أنه مثلما انتقل الحذف من المصفوفة الأصلية إلى مصفوفة مثلثية عليا U ، فإن A تصبح محللة الى مصفوفتين مثلثيتين $A=LU$.

هذه الملاحظة ليست غامضة ومن السهل التحقق من صحتها ، ولها أهمية كبيرة من الناحية العملية . بالنسبة لي إنها أحد مؤشرات مقرر جدي ، إنها الخط الفاصل بين العرض الذي يتعامل مع العمليات السطرية فقط وذلك الذي يستدعي R^{-1} .

هناك مسألة أخرى ، هو إيجاد السرعة الملائمة . إذا كان الحساب المصفوفي

مألوفاً، فإنه ليس من الضروري أن يكون الباب الأول بطيئا جداً. أما الباب الثاني الذي يحتاج إلى عمل أكبر وهذا يعني عملاً من نوع آخر -ليس ذلك إجتراراً للاعداد وهو ما يقوم به الحاسوب، بل فهم للنظام Ax=b الذي يبدأ بالحذف ويتقدم بعمق. على الطالب أن يدرك أن جهاز السرعة قد تغير؛ الأفكار تتقدم. عوضاً عن متجهات قائمة بذاتها، أصبحنا نحتاج الى فضاءات متجهات. إنني على قناعة تامة من أن الفضاءات الجزئية الأربعة - فضاء أعمدة A، فضاء أسطرها و القضائين الصفريين لـ A و A^T، هي الطريق الأكثر فاعلية لتوضيح الإرتباط والإستقلال الخطيين وفهم كل من «الأساس» و «عدد الأبعاد». لقد وضحت هذه الأمور بتدرج ولكن بثبات. لقدكونت أمثلة بطريقة طبيعية تماماً وكانت أيضاً أساساً لدراسة Ax=b. يمكننا أن نقدم مثالاً نبين فيه كيف يمكن رؤية فكرة ما بطرق مختلفة؛ إنه الخطوة الأساسية لضرب مصفوفة A بمتجه x. في المستوي الأول، Ax يمثل أعداداً، في المستوي الثاني، سيكون تركيباً لأعمدة A. في المستوي الثالث، إنه متجه من فضاء الأعمدة. (لقد تصورنا فضاء متجهات يحوي جميع التراكيب وليس هذا المتجه فقط). عند الجبريين، A يمثل تحويلاً خطياً و Ax هو ناتج تطبيق ذلك على x. الفضاءات الأربعة كلها مهمة، وعلى هذا الكتاب أن يقوم بالربط فيما بينها.

تعد الفصول من الأول حتى الخامس، فعلاً، قلب مقرر الجبر الخطي. إنها تحوي عدداً كبيراً من التطبيقات الفيزيائية والهندسية، الاحتمالية والإحصائية، الاقتصادية والحياتية. لم تقدم هذه التطبيقات في النهاية بل كانت جزءاً من الرياضيات. لقد كانت الشبكات مصدراً رائعاً للمصفوفات المستطيلة، وبصورة رئيسية، في الهندسة وعلم الحاسوب، وكذلك أمثلة مثالية للتعليم. رغم ما تقدر الرياضيات على فعله ورغم ما يقدر الجبر الخطي على فعله، فإنه من الضروري رؤية النماذج المختبئة، إلى حد ما، في التطبيقات. يستخدم هذا الكتاب الرياضيات البحتة لتعليم الرياضيات التطبيقية. أعتقد أن الكلية قادرة على هذا التحول وأن تعلم ما يحتاجه الطلاب. الجهود حتماً مكافأة.

إذا نظرت في الطبعة السابقة فإنك ستجد تغييراً . البند(١-١) معتاد ولكن الأمر ليس كذلك من أجل البند(٢-١) . من المؤكد أن الروح لم تتغير : هذا المقرر حيوي لأن موضوعه كذلك . بسبب تعليمي إياه باستمرار ، فقد وجدت سلسلة كاملة من التحسينات - قي التنظيم والتمارين (مئات منها جديدة بالإ ضافة إلى سعة مداها) ، والمحتوى؛ تصبح معظم هذه التحسينات ملموسة من خلال تعليم هذا الموضوع - عند الشرح الصحيح أو التدريب ، يظهر الفرق بين الطبعتين . أذكر تغييرين ظاهرين في الفهرس : لقد دمجت التحويلات الخطية بالنص ووجد بند جديد (إختياري) يتعلق بتحويل فوريه السريع . يمكن أن يكون ذلك هو الخوارزمية البارزة في الرياضيات المعاصرة وهي طريقة رقمية ثورية . إنها ليست سوى طريق سريع للضرب بمصفوفة معيّنة! يمنك أن ترى (كما فعلت أنا) أن هذه الفكرة موجودة ومهمة . من الحبور أن يكتشف المرء كيف تلاء مت هذه الطريقة مع الجبر الخطي . (وكيف أدخلت الأعداد المركبة) .

إن ذلك هو المقرر الأول في الجبر الخطي . فالجانب النظري مبرر ومدعم بتطبيقات أصيلة . في الوقت ذاته ، الهدف واضح والأسباب مبرهنة . بعد أن يتناول الباب الثاني ، بعد الحذف و A^{-1} ، مفهوم فضاء المتجهات ، يتركز الباب الثالث على التعامد . يفهم ذلك ، هندسيا ، قبل القراءة الأولى . من الناحية الجبرية ، الخطوات معتادة ولكنها حاسمة - معرفة متى تكون متجهات متعامدة ومتى يكون فضاءان جزئيان متعامدين أوكيف يسقط على فضاء جزئي أو كيف ينشأ أساس قائم . لذا ، لا تبخس هذاالفصل حقه . يقدم الفصل الرابع المحددات وهي الصلة الرئيسية بين $Ax=b$ و $Ax = \lambda x$. إنها تعطي معياراً لقابلية العكس ، الأمر الذي يظهر القيم الذاتية ويمثل آخر خطوة ضخمة من المقرر .

يقدم الفصل الخامس التقطير كمقدمة لشكل جوردان . تأخذنا القيم الذاتية والمتجهات الذاتية ، مباشرة ، من مصفوفة A إلى قواها A^k . إنها تحل معادلات تتطور مع الزمن - مسائل ديناميكية - خلافاً للمسألة المتزنة $Ax=b$. إنها تحمل معلومات

ليست ناتجة، بصورة واضحة، عن المصفوفة ذاتها - لمصفوفة ماركوف $\lambda_{max} = 1$ في مصفوفة قائمة جميع القيم الذاتية $|\lambda| = 1$ ولمصفوفة متناظرة قيم ذاتية حقيقية. إذا امتد مقررك إلى بدء الفصل السادس، فإن الترابط بين القيم الذاتية والمحاور والمحددات للمصفوفات المتناظرة يجعل الموضوع متصلاً بدون انقطاع. (البند الأخير من كل فصل إختياري). يعطي، بعد ذلك الباب السابع عناية أكثر تركيزاً للجبر الخطي العددي الذي أصبح أساساً للحساب العملي. إنني أعتقد أن نظرة وجيزة للفصل الثامن، رغم كونها جديرة بالاهتمام، تعتبر مقدمة ملطفة للبرمجة الخطية. صفي سعيد لأن هذا الموضوع يأتي في النهاية ولا يدخل في الإمتحان.

أحب أن أذكر كتاب المعلم وكتاباً آخر. يحوي كتاب المعلم حلول جميع التمارين (بما في ذلك تمارين المراجعة الواردة في نهاية الأبواب من الأول إلى الخامس، بالإضافة الى أفكار و اقتراحات تتعلق بالجبر الخطي التطبيقي. آمل أن يطلب المعلمون نسخاً من الناشر:

(HBJ College Departement, 7555 Caldwell Avenue, Chicago,Illinios 60648) .

وآمل، أيضاً، من قارئ هذا الكتاب أن يسعى مباشرة إلى الكتاب الثاني وهو الذي يدعى Introduction to Applied Mathematics إنه يركب الجبر الخطي مع المعادلات التفاضلية بنص واحد في الرياضيات التطبيقية المعاصرة والرياضيات الهندسية. إنه يحوي تحليل فورييه، متغيرات مركبة، معادلات تفاضلية جزئية، طرائق عددية و(حسابات مثالية) - إلا أن نقطة الانطلاق هي الجبر الخطي. لقد نشر من قبل:

Wellesley - Cambridge Press (P.O.Box 157, Wellesly, MA. 02181)

وكانت الإستجابة إليه هائلة. لقد أراد كثير من الأقسام تجديد هذا المقرر لتدريس ماهو أشد حاجة.

إن هذا الكتاب، مثل سابقه، يسعى للتعرف على ما يقدر الحاسوب على عمله (دون أن يكون مسيطراً عليه). إن حل مسألة لا يعني، أبداً، كتابتها بصورة سلسلة لا نهائية أو إيجادقانون مثل قانون كرامر، ولكنه يعني إيجاد خوارزمية فاعلة. يحتاج

ذلك إلى أفكار جيدة. يبقى الجبر واضحاً وبسيطاً وثابتاً. في الحذف، كان لعملية التعداد، في الفصل الاول، غرض ثان أيضاً - هو دعم إدراك مفصل لحالة nxn بتعداد فعلي للخطوات. لكني لا أعمل كل شئ في الصف. على النص أن يتمم ويلخص المحاضرات.

بصورة مختصرة نحتاج للكتاب لكي تدرس التطبيقات بصورة متتابعة مختلطة مع الريا ضيات الأساسية. هذا هو الكتاب الذي حاولت كتابته.

في النهاية، فإن هذه فرصة خاصة لشكركم. إنني معترف جداً بالجميل للقراء الذين أحبوا هذا الكتاب وتعرفوا على محتواه. كثيرون أولئك الذين كتبوا لي أفكاراً و تشجيعات وإنني أكتفي بذكر خمسة أسماء فقط :

Dan Drucker, Vince Giambalvo,stave kleiman, Bresford Parlett and Jim Simmonds. خلف أولئك حشد كبير من الأصدقاء والنقاد الذين أفتخر بهم.

لقد ظهرت هذه الطبعة بصورة أقضل مما تعلمه الطلاب والمؤلف. إن من البهجة الكبرى العمل مع Sophia Koulouras التي نضدت المخطوطة و Michael Michaud الذي حدد شكل الكتاب وجلده. فوق كل ذلك، أقدم شكري لزوجتي وأولادي ووالدي. فهذا الكتاب لهم أيضاً. هل يمكنني أخيراً أن أهدي هذا الكتاب إلى أمي وأبي اللذين قدما الكثير من أجله : شكراً لكما معاً.

جلبرت سترانغ

Gilbert Strang

الفصل الأول

المصفوفات والحذف الغاوسي

١ ــ ١ تمهيد :

إنَّ المسألة الاساسية في الجبر الخطي هي الحل الآني لمعادلات خطية وإن أهم حالات هذه المسألة وأسهلها هي تلك التي يكون فيها عدد المجاهيل مساوياً عدد المعادلات . لذا سنبدأ بهذه المسألة وهي التي تتكون من n **معادلة في n مجهولاً**.

سنقدم ، لحل هذه المسألة ، طريقتين وهما ، بصورة تقريبية ، تشبهان ماقدم من أجل ذلك في الدراسة الثانوية . تقوم الطريقة الأولى ، وهي طريقة الحذف ، على ضرب المعادلة الأولى من نظام بعدد مناسب وطرح المعادلة الناتجة من المعادلة الثانية وإجراء ذلك في بقية المعادلات . إن ذلك يؤدي إلى نظام أصغر مكون من n -1 معادلة في n -1 مجهولاً . نكرر هذه الطريقة مرة تلو مرة حتى نصل إلى معادلة ذات مجهول واحد يمكن حلها مباشرة . لن يكون ، بعد ذلك ، الأمر عسيراً من أجل ايجاد قيم بقية المجاهيل وذلك بالسير بصورة معاكسة . سنقدم بعد قليل مثالاً على ذلك . الطريقة الثانية وهي أكثر بريقاً ، تستدعي مفهوم **المحددات** . تمثل هذه الطريقة قانوناً فعلياً يدعى قانون كرامر *Cramer* ، يعطي الحل (القيمة الحقيقية للمجاهيل) على صورة نسب بين محددتين من النوع $n \times n$. ليست دوماً هذه الطريقة سهلة كالأمثلة التي سنعالجها في هذا الكتاب ($n = 3$ أو $n = 4$ هما الحد الأعلى لقدرة إنسان معتدل) .

في الواقع ، قد يحوي استخدام هذا القانون محددات صعبة ، لذا فان طريقة الحذف هي المستخدمة باستمرار لحل أنظمة المعادلات الكبيرة . سيكون هدفنا الأول ،

هو فهم هذه الطريقة التي تسمى عادة بطريقة **الحذف الغاوسي** .

إن لهذه الفكرة مظهر سهل خادع وقد اعتاد القارىء من قبل على بعض أشكالها . هناك أمور أربعة تجعلها ليست مجرد حذف آلي ، سوف نوضحها في هذا الباب بالإضافة إلى توضيح الطريقة ذاتها .

(١) هندسة المعادلات الخطية : ليس من السهل تصور عشرة مستويات من فضاء ذي ١١ بعداً . ومن العسير رؤية أحدعشر مستوياً من هذه المستويات تتقاطع في نقطة وحيدة ـ لكن هذا الأمر سيكون ممكناً بطريقة أخرى ـ يمكننا حتماً أن نعمل ذلك لمستويات ثلاثة بأبعاد ثلاثة . لذا ينقل الجبر الخطي هذه المسألة إلى ٤ أبعاد أو ١١ بعداً، عندما يمكن للحدس أن يتصور الهندسة (ويدركها كحقيقة) .

(٢) تفسير طريقة الحذف **كتحليـل** لمصفوفة المعاملات A : سنقدم التمثيل المصفوفي لنظام المعادلات الآنية حيث نمثل مجموعة المجاهيل بمتجه x ونظام المعادلات التي عددها n بالرمز المصفوفي المختزل $Ax = b$. تكافىء طريقة الحذف تحليل A إلى جداء LU لمصفوفة مثلثية دنيا L في مصفوفة مثلثية عليا U . هذه الملاحظة أساسية وكثيرة الأستخدام .

نقدم أولاً المصفوفات والمتجهات بطريقة نظامية بالاضافة إلى قواعد ضربها . نعرف أيضاً **المنقول** A^T **والمعكوس** A^{-1} لمصفوفة A .

(٣) في كثير من الحالات ، تجري طريقة الحذف دون صعوبات أو تعديلات . لكن ، في بعض الحالات الأستثنائية ، قد **تفشل** هذه الطريقة في إيجاد الحل وذلك لأن نظام المعادلات إما أن يكون قد كتب أصلاً بترتيب خاطىء ، الأمر الذي يمكن تصحيحه بسهولة بالمبادلة بين معادلات هذا النظام ، أو بسبب عدم وجود حل وحيد لهذه المعادلات . من الممكن ، في هذه الحالة ، أن لايكون للنظام **أي حل أو يكون له عدد غير منته من الحلول** . نريد أن نعرف كيف يمكن لطريقة الحذف أن تبين كل واحد من هذه الامكانات عند الفشل .

(٤) من المهم أن نحصل على تقدير تقريبي **لعدد العمليات** الحسابية الضرورية لحل نظام معادلات بطريقة الحذف . تعين تكلفة الحساب في كثير من الأحيان الدقة في النظام ـ يمكن للحاسوب أن يقوم بملايين من العمليات ولكن ليس أكثر من ترليون . وبعد مليون خطوة ، يمكن أن يكون خطأ التدوير محسوساً . (بعض المسائل حساسة وغيرها غير حساس) . بدون تجربة جميع التفاصيل كاملة ، نريد معرفة أي نظام يظهر عملياً ومن منها يحل فعلاً . في كثير من المسائل تتحكم عملية التعداد هذه بالقرار المتعلق بعدد المجاهيل التي ندخلها في المسألة ـ وذلك للموازنة بين الدقة الزائدة في النموذج الرياضي مع كلفة الحسابات الزائدة .

ستكون النتيجة النهائية لهذا الباب ، طريقة حذف فعالة بقدر الإمكان . وهذه الطريقة هي التي تستخدم دوماً في عدد ضخم من التطبيقات المختلفة . إن فهم هذه الطريقة المعبر عنها بالمصفوفات ـ مصفوفة المعادلات ، المصفوفات التي تؤدي كل منها إلى خطوة في الحذف أو مبادلة بين الأسطر والمصفوفتان المثلثيتان النهائيتان L, U ـ هو أساس ضروري لهذه النظرية .

١ ـ ٢ هندسة المعادلات الخطية

ستكون طريقة فهم هذا الموضوع بالأمثلة . نبدأ بمعادلتين متواضعتين جداً ، معترفين بأنك قادر على حلها دون أخذ مقرر في الجبر الخطي . وعلى الرغم من ذلك سنعطي غاوس حظاً من ذلك . هناك طريقتان للنظر في هذا النظام ، ومقصدنا الرئيسي هو رؤيتهما معاً .

$$2x - y = 1$$
$$x + y = 5.$$

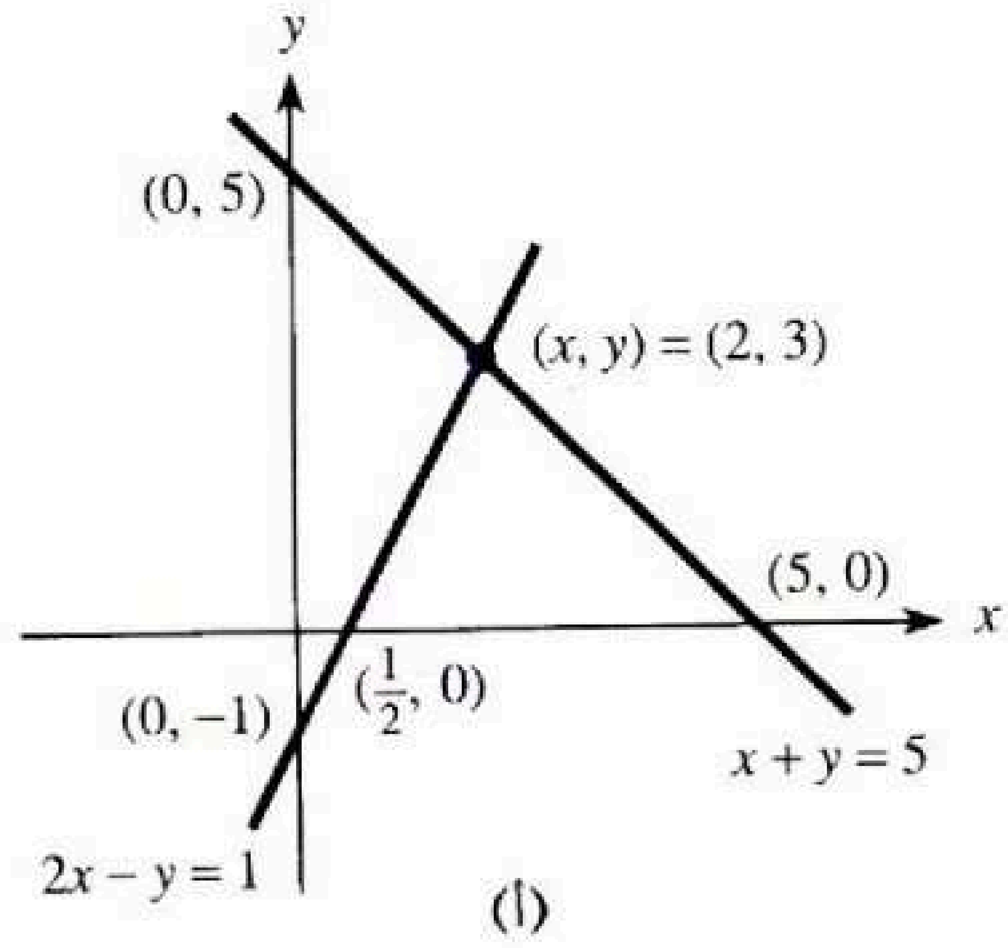
المعالجة الأولى تتركز على المعادلتين منفصلتين ، بقول آخر **بالأسطر** . إن ذلك هو المعتاد ويمكننا اجراء ه في حالة البعدين ، بسرعة . تمثل المعادلة الأولى $2x - y = 1$ مستقيماً في المستوي x-y . يمر المستقيم من النقطتين $x=1$ و $y=1$ ، $x=1/2$ و $y=0$ (وكذلك

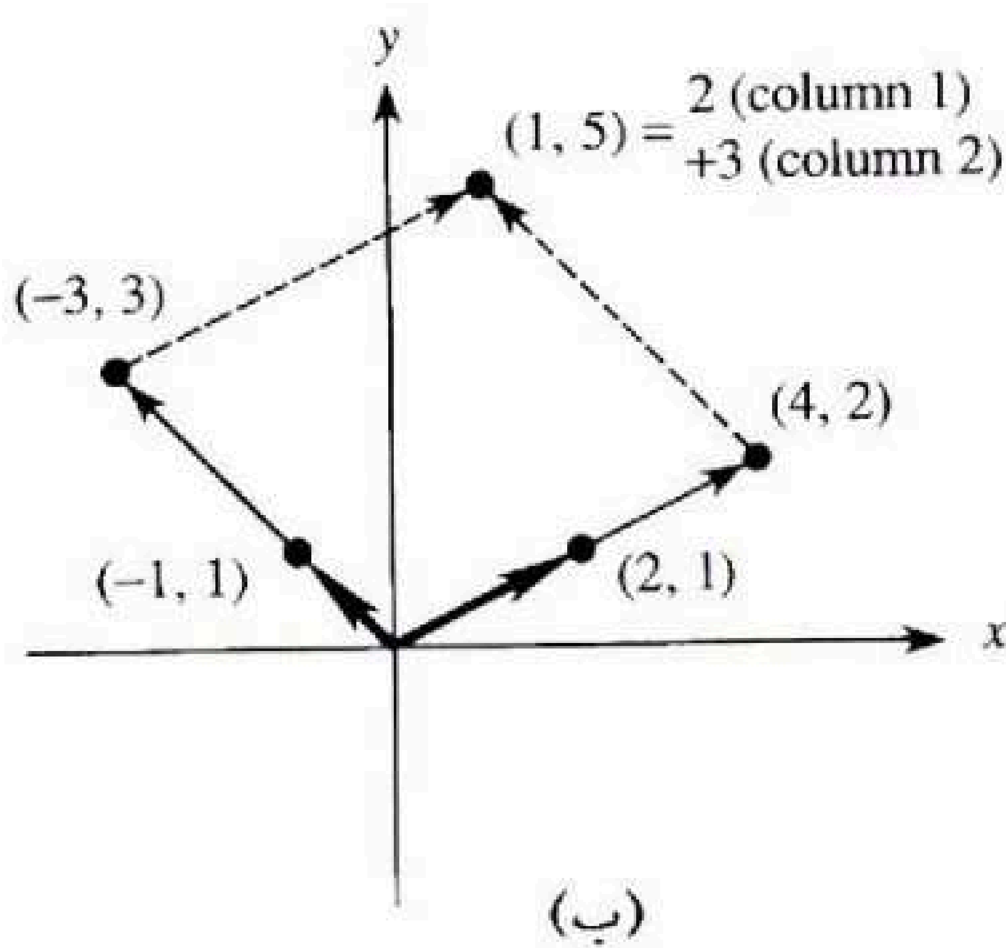
من النقطتين (0,-1) و (2,3) وجميع النقاط المتوسطة) . تمثل المعادلة الثانية 0مستقيماً آخر (شكل 1-1a) ميله $dy/dx = -1$ ويقطع المستقيم الأول في نقطة الحل . نقطة التقاطع هي النقطة الوحيدة المشتركة بين المستقيمين ، ولذا فهي الحل الوحيد للمعادلتين . إحداثياها $x = 2, y = 3$ ـ اللذين سنجدهما بعد قليل بانتظام بطريقة الحذف .

المعالجة الثانية ليست معتادة . تنظر بأعمدة النظام الخطي . المعادلتان المنفصلتان هما في الحقيقة معادله متجهة.

$$x \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

المسألة هي ايجاد تركيب لمتجهات أعمدة الطرف الأيسر، ينتج المتجه الواقع في الطرف الأيمن . هذان المتجهان الثنائيا البعد ممثلان بخطين أسودين في الشكل (1-1b) . المجهولان هما العددان x , y المضروبان بالمتجهين العموديين . تظهر الفكرة كاملة في هذا الشكل ، حيث جمعنا مثلي العمود الأول إلى ٣ أضعاف العمود الثاني . هندسياً يكوّن ذلك متوازي الأضلاع المشهور . جبرياً ، ينتج ذلك المتجه الصحيح $\begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}$ الواضح في الطرف الأيمن من معادلتينا . يؤكد العمود المرسوم أن الحل هو $x = 2, y = 3$.



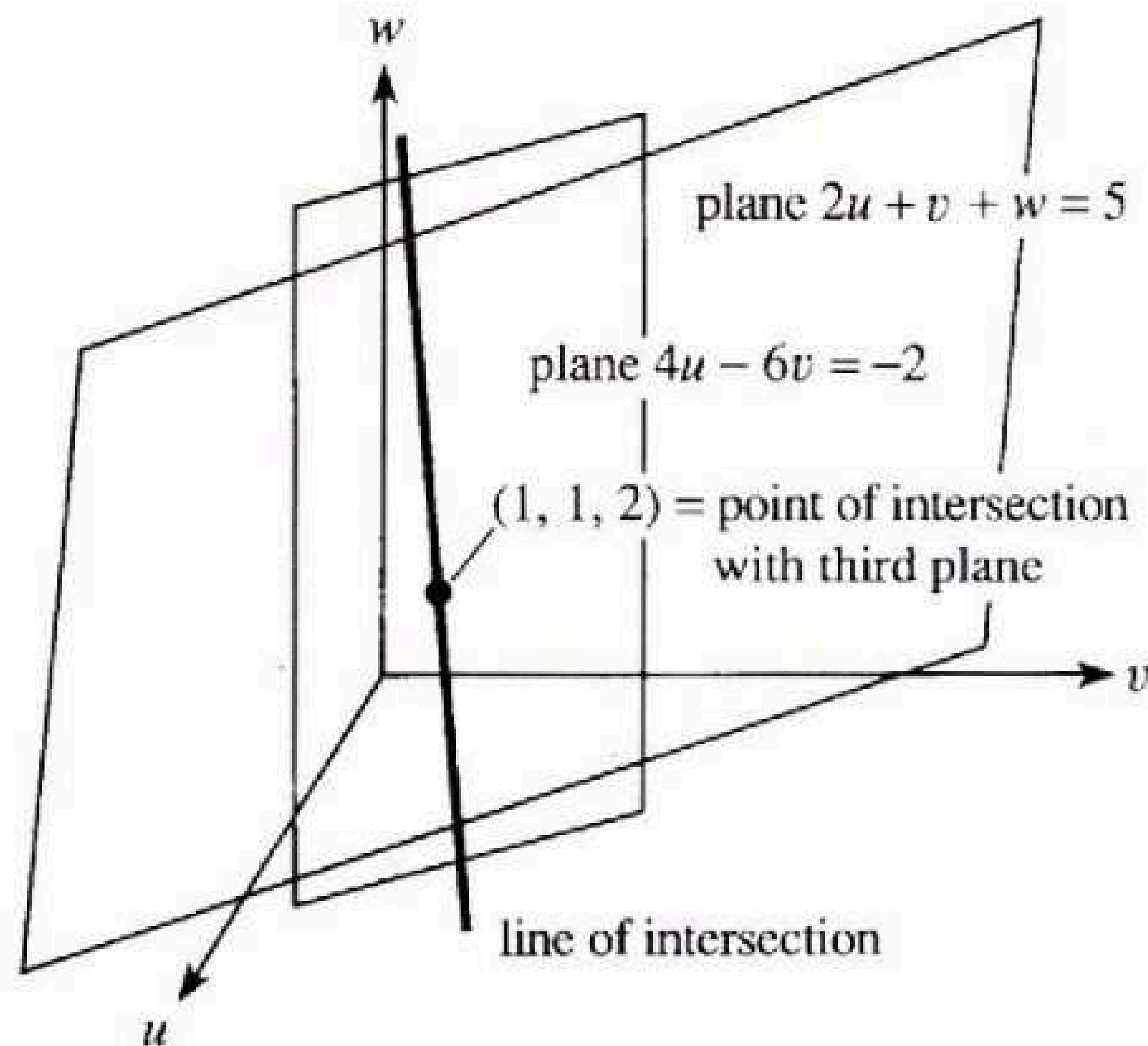


شكل (١ – ١) . هندسة الأسطر والأعمدة .

لقد قضينا وقتاً كبيراً في هذا المثال ، ونريد بالتأكيد الإنتقال قدماً إلى $n = 3$. سنكون أمام ثلاث معادلات وسيكون هناك تنوع أكثر . لننظر في :

$$\begin{aligned} 2u + v + w &= 5 \\ 4u - 6v \qquad &= -2 \qquad (١) \\ -2u + 7v + 2w &= 9. \end{aligned}$$

يمكننا أيضاً أن ندرس الأسطر والاعمدة ونبدأ بالأسطر . كل معادلة تمثل مستوياً في الفضاء ذي الأبعاد الثلاثة . المستوي الأول $2u + v + w = 5$ مرسوم في الشكل (١ - ٢) إنه يحوي النقاط $(5/2,0,0),(0,5,0),(0,0,5)$. إنه يتعين بهذه النقاط أو بأي ثلاث من نقاطه ـ شرط أن لاتقع على مستقيم واحد . نشير بسرعة إلى أن المستوي . $2u + v + w = 10$ يوازي ذلك المستوي . النقاط المقابلة هي ، $(5,0,0),(0,10,0),(0,0,10)$. كل منهما لا يمر من نقطة الأصل التي هي نقطة المركز



شكل (١ – ٢). صورة مستقيم تقاطع المستويين

$u = 0, v = 0, w = 0$. بتغيير الطرف الأيمن يتحرك المستوي موازياً لنفسه وإن المستوي $2u + v + w = 0$ يمر من نقطة الأصل[١] .

المستوي الثاني هو $4u - 6v = -2$ قد رسم رأسياً، لأنه يمكن لـ w أن تأخذ أي قيمة . يمكن أن يكون معامل w صفراً، إلا أن ذلك يبقي المستوي في الفضاء الثلاثي . (لو كانت المعادلة $4u = 3$ أو الحالة القصوى $u = 0$ فانها تبقى ممثلة مستوياً .) . يظهر الشكل تقاطع المستوي الثاني مع الأول . هذا التقاطع مستقيم . **في الأبعاد الثلاثة، يحتاج المستقيم لمعادلتين وفي الـ n بعداً سيحتاج إلى $n - 1$ معادلة** .

أخيراً يقطع المستوي الثالث هذا المستقيم في نقطة . يمثل المستوي (لم يرسم) المعادلة الثالثة $-2u + 7v + 2w = 9$ ويقطع المستقيم في $u = 1, v = 1, w = 2$. هذه النقطة تحل النظام الخطي .

كيف يمكن توسيع هذا الشكل إلى n بعداً . سيكون لدينا n معادلة تحوي n مجهولاً . المعادلة الأولى تمثل أيضا «مستوياً» ؛ إنه لم يعد المستوي ذي البعدين المعتاد الواقع في الفضاء ذي الأبعاد الثلاثة ، بطريقة أخرى، إنه ذو $n - 1$ بعداً، إنه رقيق جداً ومفلطح يقع في فضاء ذي n بعداً، مع أنه يظهر مجسماً أيضاً . إذا كان الزمن هو البعد الرابع ، فان المستوي $t = 0$ يقطع الفضاء ذي الأبعاد الأربعة فينتج الكون ذو الأبعاد الثلاثة الذي نعيش فيه (أو بالأحرى الفضاء حيث كان فيه $t = 0$) . المستوي الآخر $y = 0$ هو أيضاً ذو أبعاد ثلاثة، إنه المستوي المعتاد $x - y$ المعروف دائماً والمأخوذ على كل زمن . يتقاطع هذان المستويان ذوا الأبعاد الثلاثة . إنهما يشتركان بالمستوي المعتاد $x - y$ عند $t = 0$. لقد هبطنا إلى بعدين، يترك المستوي التالي مع المستويات السابقة مستقيماً . وأخيراً تترك المستويات الأربعة بعضها لبعض نقطة . إنها نقطة تقاطع أربعة مستويات من أربعة أبعاد . وهي حل المعادلات الأربعة الأصلية ـ سأكون منزعجاً إذا سار هذا

---

(١) إذا كانت المعادلتان الأوليان $2u + v + w = 10$, $2u + v + w = 5$، فان المستويين لايتقاطعان ولن يكون هناك حل .

المثال إلى أبعد من النسبية. النقطة المهمة هي أنه يمكن للجبر الخطي أن يتعامل مع أي عدد من المعادلات. المعادلة الأولى تنتج مستوياً ذا $n-1$ بعد في فضاء ذي n من الأبعاد. تعين المعادلة الثانية مستوياً آخر، ويتقاطع هذان المستويان (آمل ذلك) في مجموعة أصغر ذات «$n-2$ بعداً». إذا فرضنا أن كل شيء يسير على مايرام، فكل مستو جديد (كل معادلة جديدة) تنقص عدد الأبعاد واحداً. في النهاية، عندما تؤخذ جميع المستويات الـ n بالأعتبار سيكون بعد التقاطع صفراً. إنه نقطة واقعة في كل واحد من هذه المستويات وإن إحداثياتها تحقق المعادلات الأصلية. إنها الحل! الشكل حدسي ــ الهندسة تحتاج إلى عون من الجبر ــ ولكنها صحيحة بصورة أساسية.

متجهات أعمدة:

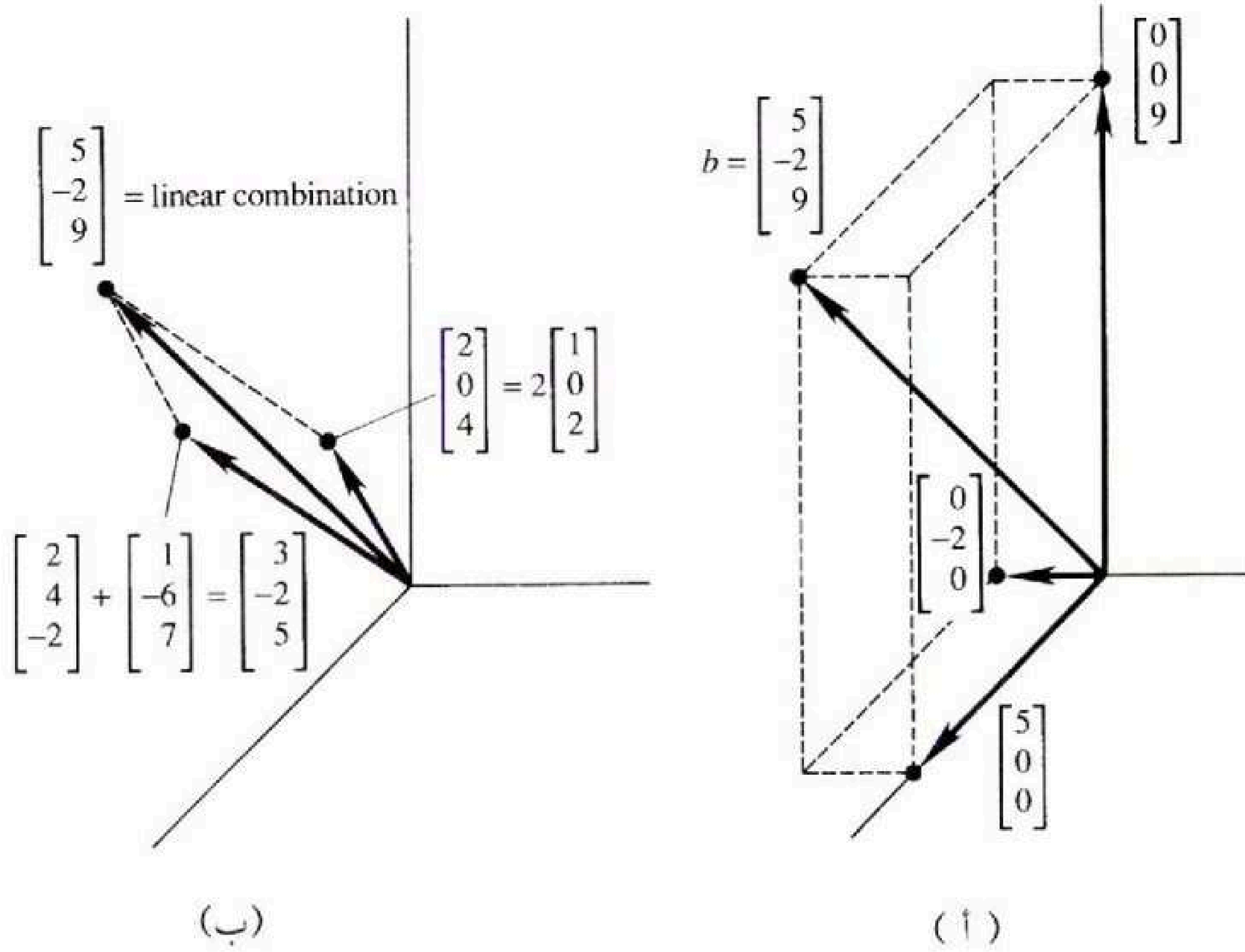
لننتقل إلى الأعمدة. في هذه المرة، المعادلة المتجهة (المعادلة ذاتها كما في (١)) هي:

$$u\begin{bmatrix}2\\4\\-2\end{bmatrix}+v\begin{bmatrix}1\\-6\\7\end{bmatrix}+w\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\-2\\9\end{bmatrix}. \quad (٢)$$

إنها متجهات أعمدة ثلاثية الأبعاد. للمتجه b الواقع في الطرف الأيمن المركبات 5,-2,9 . تسمح لنا هذه المركبات برسم متجه. **يتطابق هذا المتجه مع النقطة التي إحداثياتها 5,-2,9** . كل نقطة من الفضاء الثلاثي الأبعاد توافق متجهاً والعكس بالعكس. هذه هي فكرة ديكارت الذي حول الهندسة إلى جبر بالتعامل مع إحداثيات النقطة. يمكن كتابة المتجه في عمود أو يمكننا إدراج مركباته مثل $b=(5,-2,9)$ أو يمكننا تمثيله هندسياً بسهم منشأ من نقطة الأصل[1]. سنستخدم طوال هذا الكتاب قوسين

---

(١) يفضل بعض المؤلفين أن نعتبر السهم هو المتجه ذاته ولكننا نعتقد أن ذلك غير مهم؛ يمكنك أن تختار السهم أو النقطة أو الأعداد الثلاثة. (كلها تنطلق من نقطة الأصل (0,0,0)). في الأبعاد الستة، من المحتمل أن يكون الأسهل اختيار الأعداد الستة.



شكل (١ ـ ٣) . صورة عمود : تركيب خطي لأعمدة يساوي b .

وفواصل عندما نعرض المركبات أفقياً، وحاضنتين قائمتين (بدون فواصل) عند وضع متجه عمود رأسياً.

مهما كان شأن **جمع المتجهات والضرب بعدد**، فإنك تلاحظ في الشكل 1-3a أن جمع المتجهات يجري مركبة فمركبة :

$$\begin{bmatrix}5\\0\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\-2\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\\9\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\-2\\9\end{bmatrix}.$$

في الشكل الأيمن نجد الضرب بالعدد (٢) (سيكون حاصل ضرب المتجه بالعدد (−٢) متجهاً في الاتجاه المعاكس) : تظهر في الشكل الأيمن كذلك الفكرة الأساسية

$$2\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\0\\4\end{bmatrix}, \qquad -2\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\0\\-4\end{bmatrix}.$$

للجبر الخطي، إنه يستخدم معاً العمليتين الأساسيتين؛ **ضرب المتجهين بعددين ثم جمع الناتجين**. يدعى الناتج تركيبا خطيا وفي هذه الحالة، فإن التركيب الخطي هو :

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 7 \end{bmatrix} +2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

إنك تدرك معنى هذا التركيب الخاص، إنه يحل المعادلات (٢). تطلب هذه المعادلة قيم المضاريب u,v,w التي تنتج الطرف الأيمن هذه الأعداد هي $u=1, v=1, w=-2$. أنها تعطي التركيب الصحيح لمتجهات الأعمدة وهي تعطي النقطة $(1,1,2)$ على صورة سطر (حيث تتقاطع المستويات الثلاثة).

ينفذ الضرب والجمع على كل مركبة بصورة منفصلة. لذا فالتركيب يكون ممكناً شرط أن يكون للمتجهات العدد نفسه من المركبات. لاحظ أن لأي متجه في الشكل ثلاثة أبعاد حتى لو كان مجموع مركباتها يساوي الصفر.

يجب أن لاننسى هدفنا. إنه النظر فيما فوق بعدين أو ثلاثة، في فضاء ذي n بعداً. في نظام ذي n معادلة في n مجهولاً يوجد n مستوياً على صورة أسطر. يوجد أيضاً n متجهاً على صورة أعمدة، بالاضافة إلى المتجه b في الطرف الأيمن. تتطلب المعادلات **تركيباً خطياً للمتجهات، التي عددها n يساوي b**. في هذا المثال، قد وجدنا مثل هذا التركيب (ولا يوجد غيره). لكن من أجل بعض الأنظمة قد يكون ذلك مستحيلاً. بصورة ظاهرها التناقض، يقال : لكي نفهم الحالة الجيدة علينا أن ندرس الحالة السيئة. لذا سنعمد إلى الهندسة، فعلاً، عندما نفشل في الحل، في الحالة التي تدعى **الحالة الشاذة**.

أولاً لنلخص :

صورة سطر : تقاطع n مستوياً.

صورة عمود : الطرف الأيمن هو تركيب لمتجهات الأعمدة.

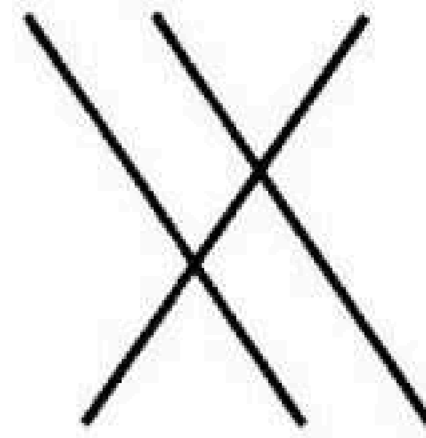
حل المعادلات : نقطة تقاطع المستويات = معاملات تركيب الأعمدة.

الحالة الشاذة :

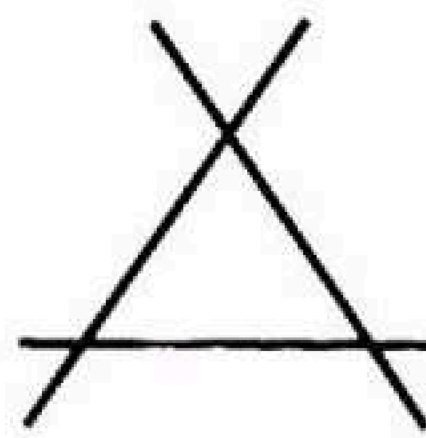
لنفرض أننا من جديد في الأبعاد الثلاثة ، وأن المستويات الثلاثة الظاهرة على صورة أسطر لا تتقاطع . ترى هل يمكننا متابعة الخطأ ؟ أحد الامكانات ، وقد ذكر سابقاً، أن يكون مستويان منها متوازيين . يمكن لمعادلتين مثل $2u + v + w = 5$ و $4u + 2v + 2w = 11$ أن تكونا غير متسقتين . ولا يوجد في هذه الحالة حل (الشكل ٤-١أ الصورة الأخيرة) .

في المسألة ذات البعدين ، حيث نجد مستقيمين عوضاً عن مستويات ، فإن الحالة الوحيدة الفاشلة هي الحالة التي يكون فيها المستقيمان متوازيين ، وتكون عندئذ المسألة شاذة . إلا أنه ، في الأبعاد الثلاثة ، قد يقع اضطراب في المستويات الثلاثة دون أن يكون هناك تواز .

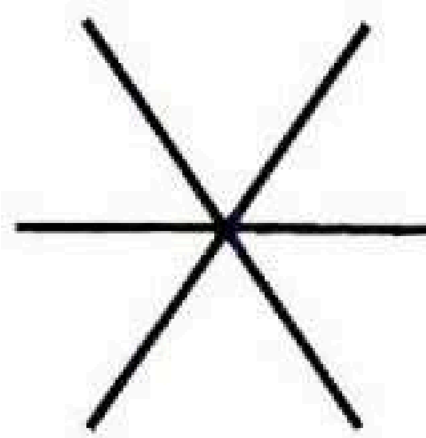
تظهر المشكلة الجديدة في الشكل١ -٤ب . كل المستويات الثلاثة قائم على صفحة الكتاب ؛ بالمنظر الخارجي ، إنها تكون مثلثاً . يتقاطع كل زوج من هذه المستويات ، ولكن لاتوجد نقطة مشتركة بين هذه المستويات الثلاثة[1] . هناك حالة أكثر نموذجية من حالة توازي المستويات ، تقابل نظاماً شاذاً مثل النظام :



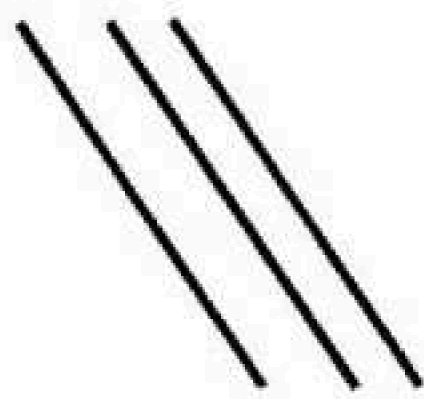
(أ)



(ب)



(ج)



(د)

شكل (١-٤) حالات شاذة : لايوجد حل أو يوجد عدد غير منته من الحلول .

(١) المستوي الثالث لايوازي المستويين الآخرين ، بل يوازي مستقيمهما المشترك .

$$u + v + w = 2$$
$$2u + 3w = 5 \qquad (٣)$$
$$3u + v + 4w = 6$$

مجموع الطرفين الأولين يساوي الثالث . هذا الأمر غير واقع في الأطراف اليمنى . مجموع المعادلة الأولى مع الثانية مع مثلي الثالثة يعطي قضية مستحيلة 0=1 . لذلك تكون هذه المعادلات **غير متسقة**، سننظر ذلك بصورة نظامية بالحذف الغاوسي .

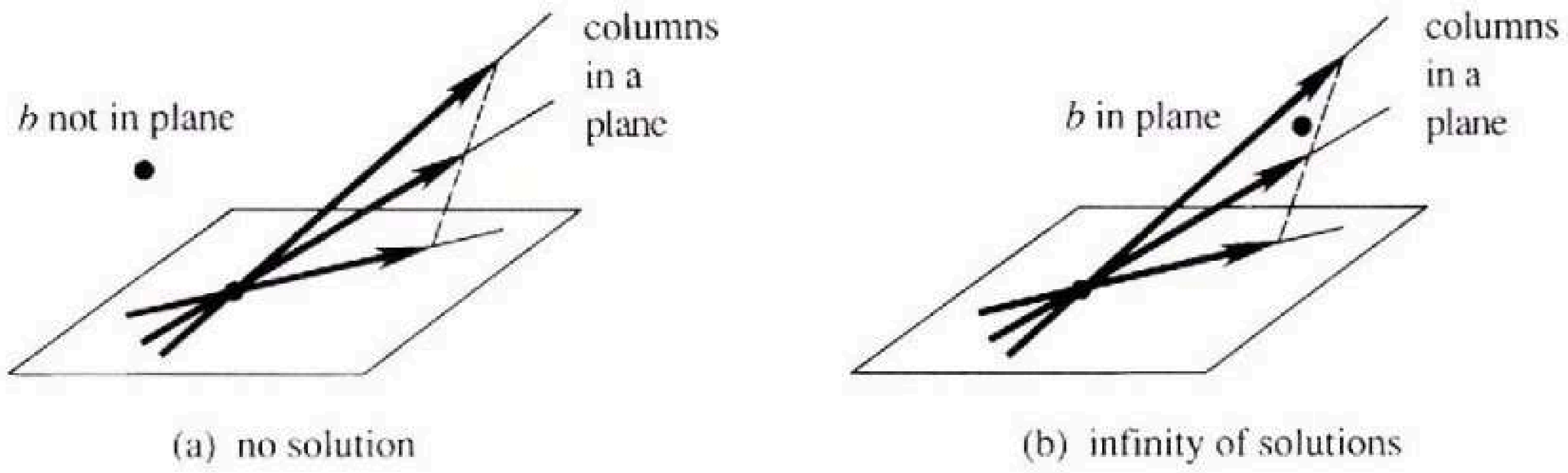
هناك نظام شاذ آخر ، قريب من النظام السابق ، له عدد غير منتهه من الحلول عوضاً عن حل واحد . إذا أصبح العدد (6) في المعادلة الأخيرة (7)، وإذا ركبت هذه المعادلات ، بالطريقة السابقة ، فانه ينتج عن ذلك 0 =0 . يظهر ذلك صحيحاً ، لإن المعادلة الثالثة هي مجموع المعادلتين الأوليين في هذه الحالة يكون للمستويات الثلاثة **مستقيم كامل مشترك** (شكل ٤-١ج) . تأثير تغير الطرف الثاني يؤدي إلى تحريك المستوي موازياً لنفسه ومن أجل الطرف الثاني $b=(2,5,7)$، يصبح الشكل بغتة مختلفاً . بتحريك المستوي الأدنى إلى الأعلى ليلاقي الآخرين معاً، ويكون الحل مستقيماً . المسألة أيضاً شاذة ولكنها تعاني الأن من كثرة **الحلول المفرطة** بدلاً من قلتها الفاحشة .

طبعاً تقع حالة قصوى لثلاث مستويات متوازية . من أجل أغلب الأطراف اليمنى لاتوجد حلول (شكل ١-٤د) . لكن هناك حالة خاصة ، وذلك عندما تكون الأطراف اليمنى مثل $b=(0,0,0)$ ـ يكون الحل عندئذ مستوياً كاملاً ـ لأن المستويات الثلاثة تصبح مستوياً واحداً .

ماذا يحصل لصورة العمود عندما يكون النظام شاذاً؟ يوجد أيضاً ثلاثة أعمدة في الأطراف اليسرى من المعادلات ، أيضاً ، وسنجرب تركيبها لنحصل على b :

$$u\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + v\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} + w\begin{bmatrix}1\\3\\4\end{bmatrix} = b. \qquad (٤)$$

من أجل ، $b=(2,5,7)$ الأمر ممكن وهو غير ممكن من أجل $b=(2,5,6)$. السبب هو أن هذه **الأعمدة الثلاثة تقع في مستو واحد** ، لذا فان أي تركيب لها يقع في هذا المستوي أيضاً (الذي يمر من نقطة الأصل) . إذا لم يكن b واقعاً في هذا المستوي ، فانه لا يوجد حل للنظام . وهذا ، إلى حد بعيد ، أكثر الوقائع المشابهة ؛



شكل (١ – ٥) . حالات شاذة b داخل أو خارج مستوي الأعمدة .

ليس للنظام الشاذ بصورة عامة حل . لكن هناك احتمال أن يقع b في مستوي الأعمدة ، ويكون في هذه الحالة عدد كبير مفرط من الحلول . في هذه الحالة يمكن للأعمدة الثلاثة أن تركب بعدد **غير منته** من الطرق لتنتج المتجه b . يعطي ذلك مخطط الأعمدة 1-5b الذي يقابل مخطط الأسطر ١-٤جـ

إن ذلك قضية صحيحة ولكنها لم تبرر بعد . كيف نعرف أن ثلاثة أعمدة تقع في مستوٍ واحد؟ أحد الأجوبة هو إيجاد تركيب لهذه الأعمدة يساوي الصفر . بعد الحساب ، نجدأن $u = 3, v = -1, w = -2$ ، وثلاثة أمثال العمودالأول تساوي العمود الثاني + مثلي العمود الثالث . والعمود الأول واقع في مستوي الآخرين . وليس سوى عمودين منها مستقلين . عندما يقع عمود مثل $b=(2,5,7)$ أيضاً في هذا المستوي ــ يساوي العمود الأول + العمود الثالث ــ فانه يمكن حل النظام . مع ذلك ، يوجد كثير من التراكيب الأخرى الممكنة . المتجه b نفسه يساوي ٤(العمود١)–(العمود٢)–(العمود٣)، وذلك باضافة $(3,-1,-2)$ إلى الحل السابق الذي أعطى صفراً . لأنه

يمكننا أن نضيف إلى الحل أي مضاعف لـ (3,-1,-2) . وهكذا نجد أن الحل مكون من مستقيم كامل ــ كما رأينا بطريقة الأسطر .

إن ذلك إقناع عددي ولكنه ليس السبب الحقيقي الذي جعلنا نتوقع وقوع الأعمدة في مستوي . الحقيقة هي أننا عرفنا أنه يمكن للأعمدة أن تتركب لتعطي صفراً لأن الأسطر فعلت ذلك . إن ذلك أمر رياضي وليس من الحساب ــ وإنه يبقى صحيحاً في n بعداً . **إذا لم يكن لـ n مستوياً نقطة مشتركة، فان الأعمدة الـ n تقع في مستو واحد .** إذا فشلت الصورة السطرية ، حصل الأمر ذاته للصورة العمودية . إن ذلك نتيجة أساسية للجبر الخطي وهي تظهر الفرق بين الفصل الأول والثاني . يدرس هذا الفصل معظم المسائل المهمة ــ الحالة غير الشاذة ــ عندما يكون هناك حل واحد يمكن حسابه . يدرس الفصل الثاني الحالة العامة حيث يمكن وجود كثير من الحلول أو لايوجد أي حل . في كل من الحالتين ، لايمكننا المتابعة دون رموز ملائمة (الرمز المصفوفي) وطريقة ملائمة (الحذف) . بعد التمارين ، سنبدأ بهذه الطريقة .

تمــــاريــــن

١-٢-١ ارسم من أجل المعادلات ، $x+y=4$ ، $2x-2y=4$ صورة سطرية (مستقيمان متقاطعان) وصورة عمودية (تركيب للعمودين يساوي المتجه العمود (4,4) الواقع في الطرف الأيمن)

١-٢-٢ حل النظام المثلثي غير الشاذ بينّ أن حلك يعطي تركيباً في الأعمدة يساوي المتجه الأيمن .

$$u+v+w=b_1$$
$$v+w=b_2$$
$$w=b_3.$$

١-٢-٣ صف تقاطع المستويات الثلاثة : $u+x+w+z=6, u+w+z=4, u+w=2$ (جميعها في فضاء ذي أربعة أبعاد) . هل هو مستقيم أم نقطة أم مجموعة

خالية؟ ما هو التقاطع إذا كان المستوي الرابع هو $u = -1$ ؟

١-٢-٤ ارسم المستقيمات الثلاثة

$$x + 2y = 2$$

$$x - y = 2$$

$$y = 1.$$

هل هذه المعادلات قابلة للحل آنياً؟ يحصل للشكل إذا كانت الأطراف اليمنى أصفاراً؟ هل يوجد اختيار غير صفري للأطراف اليمنى يسمح المستقيمات الثلاثة بالتقاطع في نقطة واحدة ويكون لهذه المعادلات حل؟

١-٢-٥ أوجد نقطتين من مستقيم تقاطع المستويات الثلاث $t = 0$, $x + y + z + t = 1$, $z = 0$ من الفضاء ذي الأبعاد الأربعة .

١-٢-٦ عندما يكون $b = (2,5,4)$ أوجد حلاً (u,v,w) للمعادلات (٤) غير الحلين $(1,0,1)$, $(4,-1,1)$ الظاهرين في النص .

١-٢-٧ أوجد طرفين يمينيين آخرين ، بالاضافة إلى $b = (2,5,7)$ تكون المعادلات (٤) من أجل ذلك قابلة للحل .

أوجد طرفين يمينين آخرين ، بالإضافة إلى $b = (2,5,6)$ بحيث تصبح هذه المعادلات غير ممكنة الحل .

١-٢-٨ فسر لماذا يكون النظام شاذاً :

$$u + v + w = 2$$

$$u + 2v + 3w = 1$$

$$v + 2w = 0$$

وذلك بايجاد تركيب للمعادلات الثلاث يعطي $0=1$. ما هي القيمة التي يجب استبدالها بالصفر الأخير في الطرف الأيمن ، ليصبح لهذه المعادلات

حلول ـ ما هو أحد هذه الحلول؟

١-٢-٩ الصورة العمودية بالتمرين السابق هي :

$$u\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+v\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}+w\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}=b.$$

برهن أن الأعمدة الثلاثة الواقعة في اليسار تقع في مستوٍ واحد، وذلك بالتعبير عن العمود الثالث كتركيب للآخرين الأولين. ماهي الحلول (u,v,w) إذا كان b هو المتجه الصفري $(0,0,0)$ ؟

١-٢-١٠ تحت أي شروط على y_1, y_2, y_3 تقع النقاط $(0, y_1),(1, y_2),(2, y_3)$ على مستقيم واحد؟

١-٢-١١ تقبل حتماً المعادلتان :

$$a x + 2y = 0$$

$$2x + ay = 0$$

الحل $x = y = 0$. من أجل أي قيمة لـ a يكون الحل مستقيماً كاملاً؟

١-٢-١٢ ارسم المستوي $x + y + z = 1$ أو جزءه الذي يقع في الثمن الموجب $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ افعل الأمرنفسه من أجل المستوي $x + y + z = 2$ في الشكل ذاته . ما هو المتجه العمودي على هذين المستويين؟

١-٢-١٣ انطلق بالمستقيم $x + 4y = 7$ وأوجد معادلة المستقيم الموازي له المار من النقطة $x = 0, y = 0$. أوجد معادلة مستقيم آخر يقطع الأول في النقطة $x = 3, y = 1$ (ويمر من المبدأ) .

١ - ٣ مثال للحذف الغاوسي

ستكون طريقة فهم هذا الموضوع بالأمثلة ونبدأ من أجل ذلك، بنظام من السعة الثالثة :

$$\begin{aligned} 4u - 6v \quad &= -2 \\ 2u + v + w &= 5 \\ -2u + 7v + 2w &= 9. \end{aligned} \qquad (١)$$

المسألة هي : إيجاد قيم المجاهيل $x. y. v$ وسنطبق من أجل ذلك طريقة غاوس في الحذف (يعد غاوس من أعظم الرياضيين ليس حتماً بسبب هذا الاكتشاف الذي، من المحتمل، أنه قد حصل عليه خلال عشر دقائق ومن السخرية أن يستخدم اسمه بكثرة من أجل هذه الأفكار) . تنطلق الطريقة بطرح مضاعف مناسب للمعادلة الأولى من كل واحدة من المعادلات الآخرى وذلك لحذف المجهول u من المعادلتين الأخيرتين . إن ذلك يتطلب منا :

أ) طرح المعادلة الأولى مضروبة بالعدد(2) من الثانية .

ب) طرح المعادلة الأولى مضروبة بالعدد(1-) من الثالثة .

فنحصل على نظام مكافىء .

$$\begin{aligned} 2u + v + w &= 5 \\ -8v - 2w &= -12 \\ 8v + 3w &= 14. \end{aligned} \qquad (٢)$$

و يسمى العدد (2) الذي هو معامل المجهول u في المعادلة الأولى محور الخطوة الأولى من الحذف . في الحذف نقسم ، دائماً ، على المحور ، العدد الذي يقع تحته ، لايجاد المضروب الصحيح .

في المرحلة الثانية من الحذف نتجاهل المعادلة الأولى . أما المعادلتان الباقيتان فلا تحويان سوى المجهولين v, w ويمكن تطبيق طريقة الحذف ذاتها عليهما . المحور في هذه الحالة هو (8 -). يجب طرح مضاعف للمعادلة الثانية من المعادلات الباقية (في هذه الحالة توجد معادلة واحدة فقط وهي المعادلة الثالثة) وذلك لحذف المجهول v. نجمع المعادلة الثانية إلى المعادلة الثالثة ، أوبقول آخر :

جـ) نطرح جداء (1 -) بالمعادلة الثانية من المعادلة الثالثة .

وهكذا تكون طريقة الحذف ، هنا ، قد انتهت ، على الأقل ، في الاتجاه التقدمي ونتج معنا : **النظام المبسط**.

$$\begin{aligned} 2u + v + w &= 5 \\ -8v - 2w &= -12 \\ w &= 2. \end{aligned} \qquad (٣)$$

إن هذا ترتيب واضح لحل النظام . تعطي المعادلة الأخيرة $w = 2$ ؛ إذا عوضنا هذه القيمة في المعادلة الثانية ، نجد $v = 1$ وهكذا تعطي المعادلة الأولى $u = 1$. تدعى هذه الطريقة السهلة **التعويض التراجعي**.

نعيد : الحذف التقدمي ينتج المحاور 2,-8,1 . بطرح مضاعف لكل سطر من الأسطر الواقعة تحته ، نتوصل إلى النظام « المثلثي » (٣) . ثم يحل هذا النظام بترتيب معاكس من الأدنى إلى الأعلى وذلك بتعويض كل قيمة حسبت من معادلة في المعادلات التي تقع فوقها .

ملاحظة : هناك طريقة جيدة لاظهار ـ خطوات الحذف التقدمي ، هي أن نضم الطرف الأيمن كعمود إضافي . ليس هناك ضرورة لكتابة u,v,w في كل مرحلة :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & -6 & 0 & -2 \\ -2 & 7 & 2 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -8 & -2 & -12 \\ 0 & 8 & 3 & 14 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -8 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

أخيراً ، سنجد نظاماً مثلثياً جاهزاً للتعويض التراجعي . يمكنك أن تختار هذا الترتيب الذي يضمن أن العمليات التي تجري على الطرف الأيسر للمعادلات ، تجري أيضاً على الطرف الأيمن منها ـ **لأن الطرفين موجودان هنا معاً** .

في المسائل **الكبيـرة**، يأخذ الحذف التقدمي أكثر الجهد . إنه محكوم بالأطراف اليسرى للمعادلات ، بينما يتعلق الحذف التراجعي بالأطراف اليمنى أيضاً . في الخطوة الأولى ، نستخدم مضاعفات للمعادلة الأولى لايجاد أصفار تحت المحور الأول . ثم نجعل عناصر العمود الثاني الواقعة تحت المحور الثاني أصفاراً . أخيراً ، ستحتوي المعادلة

المجهول x_n منفرداً مضروباً بالمحور الأخير. تنتهي الخطوة التقدمية عندما يصبح النظام مثلثياً. ينتج التعويض التراجعي الحل كاملاً باتجاه معاكس، وأخيراً، نجد المجهول الأول.

بالتعريف: **المحور لايمكن أن يكون صفراً لاننا نحتاج للقسمة عليه.**

فشل الحذف

نريد هنا طرح سؤالين قد يكون فيهما سبق للحوادث ولكن الاجابة عليهما ستعطي ضوءاً على الطريقة ذاتها. السؤال الأول: هل تؤدي هذه الطريقة دائماً إلى حل؟ وتحت أي ظروف تفشل هذه الطريقة؟ بعض الأشياء تظل خاطئة في الحالة الشاذة وبعض الأشياء قد تظل خاطئة في الحالة غير الشاذة. المسألة ليست هندسية بل جبرية.

الجواب هو: إذا أنتجت الطريقة n محوراً فان هناك حلاً وحيداً للمعادلات ويكون النظام غير شاذ ويحل بالحذف التقدمي والتعويض التراجعي. **أما إذا ظهر صفر** في موضع محور فان عملية الحذف تتوقف إما مؤقتاً أو نهائياً. يمكن أن يكون النظام شاذاً ويمكن أن لا يكون كذلك.

مثلاً إذا كان المعامل الأول صفراً في القرنة العليا اليسرى فان حذف u من بقية المعادلات مستحيل. وهذا الأمر صحيح من أجل كل خطوة من خطوات الحذف الأخرى. لاحظ أنه من الممكن أن يظهر صفر في موضع أحد المحاور المتوسطة رغم أن المعامل في النظام الأصلي الذي يشغل موضعه لايساوي الصفر. **نقول بدقة إننا لانعرف ما إذا كان سيظهر صفر قبل أن نجرب بمتابعة طريقة الحذف فعلاً.**

في كثير من الأحيان، يمكن معالجة المشكلة وتتابع عملية الحذف طريقها لايجاد الحل الوحيد للمسألة وتبقى المسألة المحسوبة غير شاذة؛ المسألة وحدها تحتاج إلى إصلاح. ولكن قد لايمكن، في حالات أخرى، تحاشي الفشل. هذا النظام غير القابل للاصلاح شاذ، ليس له حل وإلا سيكون له عدد غير منته من الحلول كما لايمكن ايجاد مجموعة المحاور كاملة.

مثال غير شاذ (أصلح بالمبادلة بين المعادلتين ٢و٣)

$$\begin{matrix} u+v+w= __ & & u+v+w= __ & & u+v+w= __ \\ 2u+2v+5w= __ & \rightarrow & 3w= __ & \rightarrow & 2v+4w= __ \\ 4u+6v+8w= __ & & 2v+4w= __ & & 3w= __ \end{matrix}$$

أصبح النظام الأن مثلثياً ويمكن للتعويض التراجعي حله .

مثال شاذ (غير قابل للإصلاح)

$$\begin{matrix} u+v+w= __ & & u+v+w= __ \\ 2u+2v+5w= __ & \rightarrow & 3w= __ \\ 4u+4v+8w= __ & & 4w= __ \end{matrix}$$

لايوجد هنا مبادلة بين المعادلات يمكن بها تحاشي الصفر في موضع المحور الثاني . يمكن للمعادلات نفسها أن تكون قابلة للحل أو غير قابلة للحل . إذا كانت المعادلتان الأخيرتان من الشكل $3w = 6, 4w = 7$ فانه لايوجد حل . إذا حصل أن كانت هاتان المعادلتان متسقتين مثل $3w = 6, 4w = 8$ ، فان لهذه الحالة الشاذة عدد غير منته من الحلول . نستنتج أن $w = 2$ ، لكن لايمكن للمعادلة الأولى أن تقرر شيئاً من أجل u, v معاً .

سيناقش البند (١-٥) مبادلات الأسطر عندما يكون النظام غير شاذ ؛ لذا فان المبادلات تنتج مجموعة كاملة من المحاور . الباب الخامس يقبل الحالة الشاذة ويترنح متقدماً إلى الأمام في الحذف . يمكن لـ $3w$ حذف $4w$ ويمكننا أن نعتبر المحور الثاني(3) (يمكن أن لانفوز بمحور ثالث) . من أجل الحالة الحاضرة ، نأمل أن تكون جميع العناصر المحورية غير صفرية ، دون أي تغيير في ترتيب المعادلات . إنها الحالة الفضلى وبمثلها يمكننا الاستمرار .

تكلفة الحذف :

السؤال الثاني عملي محض وهو في الحقيقة مايلي : **ماهو عدد العمليات الحسابية**

التي تتطلبها عملية الحذف من أجل نظام مـن n معادلة في n مجهولاً ؟ إذا كان n كبيراً فان الحاسوب ينوب عنا باجراء العمليات (يمكنك أن تجد برنامجاً جاهزاً أو تستخدم النظام الموجود في الملحق جـ). بما أن جميع الخطوات معروفة، فانه يمكننا تقدير عدد العمليات التي على الحاسب أن يقوم بها. لنتجاهل لفترة، الأطراف اليمنى للمعادلات ولنعد فقط العمليات المتعلقة بالأطراف اليسرى. هذه العمليات من نوعين: النوع الأول هو القسمة على المحور وذلك لمعرفة أي مضاعف (لنقل l) للمعادلة المحورية، يجب طرحه. في الحقيقة، من أجل طرح معادلة من أخرى، سنواجه، باستمرار، تركيب ضرب ـ طرح؛ نضرب حدود المعادلة المحورية بالعدد l ويطرح الناتج من معادلة تقع تحتها.

لنفترض أننا قد اتفقنا أن نعتبر كل عملية قسمة وكل ضرب ـ طرح عملية واحدة. في البدء، إذا حوت المعادلة الأولى n حداً **فاننا نحتاج إلى n عملية لكل صفر نرغب الحصول عليه في العمود الأول** ـ واحدة لايجاد المضروب l والبقية لايجاد العناصر الجديدة على طول السطر. هناك n -1 سطراً تحت السطر الأول، لذا، فان الخطوة الأولى من عملية الحذف تتطلب $n(n-1)=n^2-n$ عملية. (إليك طريقة أخرى من أجل n^2-n: يجب تغيير جميع العناصر التي عددها n^2 **عدا العناصر الواقعة في السطر الأول** والتي عددها n). لنلاحظ أن المراحل التالية ستكون أسرع من سابقتها وذلك لأن المعادلات تأخذ بالقصر وعندما يصبح الحذف مقصوراً على k معادلة، فاننا نحتاج إلى k^2-k من العمليات فقط لجعل معاملات هذه المعادلات الواقعة تحت المحور أصفاراً ـ بالمحاكمة ذاتها التي أجريت في الخطوة الأولى عندما كان $k=n$. بالجمع، نجد أن العدد الكلي لعمليات الأطراف اليسرى للمعادلات هو مجموع الحدود k^2-k على جميع قيم k من 1 إلى n:

$$(1^2+\dots+n^2)-(1+\dots+n^2)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^3-n}{3}.$$

هاتان الصيغتان اعتياديتان لمجموع الأعداد الـ n الأوائل ومجموع مربعاتها . إذا عوضنا $n=1$, $n=2$, $n=100$ في القانون ، فان الحذف التقدمي لايحتاج إلى خطوات أو يحتاج إلى خطوتين أو مايقارب ثلث مليون خطوة (وهذا يعني ٤١ ثانية لنظام جيد في PC) الأمر المهم هو النتيجة :

إذا كان n كبيراً **فإن العدد $p = n^3/3$ تقدير جيد لعدد العمليات.**

إذا جعل حجم النظام ضعفين وكان قليل من المعاملات أصفاراً فان التكلفة تضرب بالعدد (٨) .

تعدُّ عملية التعويض التراجعي أسرع بكثير ـ المجهول الأخير يعرف بعملية واحدة (القسمة على المحور الأخير) ويحتاج المجهول الذي قبله إلى عمليتين . وهكذا يكون مجموع عمليات التعويض التراجعي :

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \approx \frac{n^2}{2} .$$

سنرى أن $n^2/2$ خطوة أخرى تهيء الطرف الأيمن إلى التعويض التراجعي ، لذا فان **الطرف الثاني مسؤول عن $n^2/2$ عملية** ، وهذا أقل بكثير من $n^3/3$ للطرف الأيسر .

منذ عدة سنين ، كان ظن جميع الرياضيين تقريباً ، أن هذه الأعداد تفاؤلية بحته أو بقول آخر إذا وجدت مجموعة n معادلة في n مجهولاً ، فانه لايمكن ايجاد حل لها بأقل من $n^3/3$ عملية ضرب . (لقد وجدت نظريات لبرهان ذلك ولكنها لم تأخذ بعين الاعتبار جميع الطرائق الممكنة) . من المدهش أنه قد تم إثبات خطأ هذه الظنون ويوجد حالياً طريقة تتطلب فقط $cn^{\log_2 7}$ عملية ضرب! يتعلق ذلك بأمر بسيط : قد يظهر أنتركيبين لمتجهين من فضاء ذي بعدين يحتاجان إلى ٨ عمليات ، ولكن يمكن إجراء ذلك بسبع . إن ذلك يخفض الأس من $\log_2 8$ الذي هو 3 إلى $\log_2 7 \approx 2.8$. يؤدي هذا الاكتشاف إلى جهد ضخم لايجاد أصغر قوة ممكنة لـ n لقد انخفض أخيراً الأس (في مركز أبحاث IBM) إلى أقل من 2.5 حيث بقي كما كتبت[١] . لحسن حظ الحذف ،

---

(١) بمساعدة زوريخ وصل إلى أخفض من ٢,٣٧٦ . يظهر أنه يتوقع كثيراً أن يكون الحد الأدنى لأنه لايوجد عدد بينهما له مظهر خاص . إن ذلك فعلاً رأي شخصي .

الثابت C كبير جداً والبرمجة محيرة جداً بحيث لن يكون للطريقة، إلى حد كبير (أو بصورة كاملة) سوى فائدة نظرية. المسألة الأكثر حداسة هي معرفة تكلفة طرائق عديدة موازية وإن ذلك لم يعرف بعد.

تمارين

١-٣-١ طبق الحذف والتعويض التراجعي لحل

$$\begin{aligned} 2u - 3v \quad &= 3 \\ 4u - 5v + w &= 7 \\ 2u - v - 3w &= 5. \end{aligned}$$

ماهي المحاور؟ اذكر ثلاث عمليات طرح مضاعف سطر من آخر.

١-٣-٢ من أجل النظام:

$$\begin{aligned} u + v + w &= 2 \\ u + 3v + 3w &= 0 \\ u + 3v + 5w &= 2. \end{aligned}$$

ماهو النظام المثلثي بعد الحذف التقدمي وماهو الحل؟

١-٣-٣ حل النظام التالي وأوجد المحاور

$$\begin{aligned} 2u - v \qquad\quad &= 0 \\ -u + 2v - w \quad &= 0 \\ -v + 2w - z &= 0 \\ -w + 2z &= 5. \end{aligned}$$

يمكنك جعل الطرف الأيمن عموداً خامساً (وإهمال كتابة u,v,w,t حتى ايجاد الحل).

١-٣-٤ طبق الحذف على النظام

$$u + v + w = -2$$

$$3u + 3v - w = 6$$

$$u - v + w = -1.$$

عندما يظهر صفر في موضع محور، بادل بين تلك المعادلة مع التي تحتها ثم تابع الحل. ماهو معامل v الذي يجب وضعه في المعادلة الثالثة عوضاً عن المعامل الحاضر (1-) لتصبح المتابعة مستحيلة، ويجعل الحذف يتوقف.

١-٣-٥ حل بالحذف نظام المعادلتين :

$$x - y = 0$$

$$3x + 6y = 18.$$

ارسم مخططاً يمثل كل معادلة بمستقيم في المستوي $x - y$؛ يتقاطع المستقيمان عند الحل. أضف أيضاً، مستقيماً آخر، وهو بيان الشكل الجديد للمعادلة الثانية الذي يظهر بعد الحذف .

١-٣-٦ اوجد ثلاث قيم لـ a بحيث يكون الحذف من أجلها فاشلاً، دوماً أو مؤقتاً. وذلك في النظام :

$$a u + v = 1$$

$$4u + a v = 2$$

يمكن إصلاح فشل الخطوة الأولى بمبادلة بين السطرين ـ ولكن لن يكون ذلك من أجل ـ فشل الخطوة الأخيرة .

١-٣-٧ (أ) إذا كان سطرا A الأولان متساويين، متى يمكن للحذف أن يكتشف أن A شاذة؟ أعط مثالاً من النوع 3×3 يسمح بمبادلة أسطر .

(ب) إذا كان العمودان الأولان من A متساويين، متى يمكن للحذف أن يكتشف أن A شاذة؟

١-٣-٨ كم عدد عمليات الضرب ـ طرح التي يجب إجراؤها لحل نظام من المرتبة $n = 600$ ؟ كم عدد ثواني العمل في PC الذي يمكنه اجراء ٨٠٠٠ عملية في الثانية أو في VAX حيث يمكن اجراء ٨٠٠٠٠ عملية في الثانية أو في $CRAY\ X\text{-}MP/2$ حيث يمكن اجراء ١٢ مليون عملية في الثانية؟

(إن في ذلك دقة ثنائية ـ اعتقد أن $CRAY$ أرخص، إذا كنت قادراً عليه.)

١-٣-٩ صح أو خطأ:

(أ) إذا ابتدأت المعادلة الثالثة بمعامل صفري (تبدأ بـ $0u$) فانه لن يطرح مضاعف المعادلة (١) من المعادلة (٣).

(ب) إذا كان المعامل الثاني في المعادلة (٣) صفراً (تحوي $0v$) فانه لن يطرح مضاعف للمعادلة (٢) من المعادلة (٣).

(جـ) إذا حوت المعادلة الثالثة $0u, 0v$، فانه لن يطرح مضاعف للمعادلة الأولى أو للمعادلة الثانية من المعادلة (٣).

١-٣-١٠ (اختياري جداً) يتضمن عادة ضرب عددين مركبين

$$(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(bc + ad)$$

أربع عمليات ضرب ac, bd, bc, ad. متجاهلا i، هل يمكنك حساب المقدارين $ac - bd, bc + ad$ بثلاث عمليات ضرب فقط؟ (يمكنك القيام بعمليات جمع مثل تكوين $a + b$ قبل الضرب دون حظر).

١-٣-١١ استخدم الحذف لحل:

$$\begin{aligned} u + v + w &= 6 \\ u + 2v + 2w &= 11 \\ 2u + 3v - 4w &= 3 \end{aligned} \quad \text{و} \quad \begin{aligned} u + v + w &= 7 \\ u + 2v + 2w &= 10 \\ 2u + 3v - 4w &= 3 \end{aligned}$$

التمارين الأخيرة تعطي خبرة في انشاء المعادلات الخطية. أفرض:

أ ـ أن ٨٠ في المائة ممن يكونون في بدء السنة في كاليفورنيا يبقون فيها و٢٠ في المائة يخرجون منها.

ب ـ وأن ٩٠ في المائة ممن يبدؤون سنتهم خارج كاليفورنيا يبقون فيها بينما يدخل ١٠ في المائة منهم إليها.

إذا علمنا الوضع في البدء، يوجد ٢٠٠ مليون خارج كاليفورنيا و ٣٠ مليون داخلها، فمن السهل أن نجد العددين u,v الممثلين لما في كاليفورنيا وخارجها في نهاية العام. المسألة الحقيقية هي العودة إلى الخلف وحساب وضع الإنطلاق بمعرفة الوضع النهائي.

$$.9\ (200{,}000{,}000) + .2\ (30{,}000{,}000) = u$$

$$.1\ (200{,}000{,}000) + .8\ (30{,}000{,}000) = v$$

١-٣-١٢ إذا كان u مساوياً ٢٠٠ مليون و v مساوياً ٣٠ مليوناً في نهاية السنة، ضع المعادلات الضرورية لايجاد u,v في بدء العام (الحل غير مطلوب).

١-٣-١٣ إذا كان u, v في نهاية العام مساويين لـ u,v في بدئه، فما هي المعادلات التي نحصل عليها؟ وما هي نسبة u إلى v في هذه "الحالة الثابتة"؟

١-٤ الرمز المصفوفي وضرب المصفوفات

حتى الآن ومن أجل مثالنا ٣×٣، كنا قادرين على كتابة جميع المعادلات كاملة. ولقد تمكنا أيضاً من سرد كل خطوات الحذف بالتفصيل وهي طرح مضاعف لمعادلة من أخرى وذلك لوضع النظام بشكل مثلثي. لكن عملية الحذف على هذا النحو تصبح مستحيلة حينما يكون نظام المعادلات كبيراً مما يجعل صياغة مختصره أمراً ضرورياً. سنقدم الآن الرمز المصفوفي لتمثيل نظام المعادلات الأصلي ونقدم أيضاً ضرب المصفوفات وذلك لوصف العمليات التي تجري بصورة أكثر سهولة.

لنذكر أن في مثالنا

$$\begin{aligned} 2u + v + w &= 5 \\ 4u - 6v \quad &= -2 \\ -2u + 7v + 2w &= 9 \end{aligned} \qquad (1)$$

تظهر ثلاثة أنواع من المقادير . في الطرف الأيسر تقع المجاهيل u,v,w وفي الطرف الأيمن يقع المتجه b وأخيراً مجموعة تسعة معاملات عددية تقع في الأطراف اليسرى (قد يصدف أن واحداً منها صفر) . من الطبيعي أن تمثل المجاهيل الثلاثة بمتجه :

المجهول هو $x = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$ ؛ والحل هو $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

أما ما يتعلق بالمعاملات المصطفة في ثلاثة أسطر وثلاثة أعمدة فان أفضل شكل لها هو مصفوفة ثلاثة في ثلاثة تدعى مصفوفة المعاملات :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix}.$$

A مصفوفة مربعة وذلك لأن عدد المعادلات متفق مع عدد المجاهيل . بصورة أعم ، إذا وجدت n معادلة في n مجهولاً فسيكون لدينا مصفوفة معاملات مربعة من المرتبة n ذات n سطراً و n عموداً . بصورة أكثر عمومية ، يمكننا أن نحصل على m معادلة و n مجهولاً . في هذه الحالة ، تكون المصفوفة مستطيلة ذات m سطراً و n عموداً . بقول آخر إنها مصفوفة من النوع ($m \times n$) .

تجمع مصفوفة إلى أخرى أو تضرب بعدد كما يجري ذلك من أجل المتجهات حيث نتعامل مع كل مركبة لوحدها . بالفعل يمكننا أن ننظر إلى المتجهات على أنها حالات خاصة من المصفوفات ؛ هي مصفوفات ذوات عمود واحد . كما هو حال المتجهات ، يمكن جمع مصفوفتين فقط في حالة كونهما من نوع واحد :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}, \quad 2\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

ضرب مصفوفة في متجه

سوف نستخدم فيما يلي الرمز التالي. نقترح كتابة النظام (١) ذي المعادلات الثلاث والمجاهيل الثلاثة بالشكل المصفوفي المبسط $Ax=b$. لنكتب ذلك بصورة مفصلة على الشكل :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

الطرف الأيمن واضح بصورة كافية، إنه المتجه العمود «للحدود غير المتجانسة». أما الطرف الأيسر فانه مكون من المتجه x مضروباً من اليسار بالمصفوفة A. يجب تعريف هذا الضرب بحيث ينتج عنه **النظام الأصلي**. لذا يجب أن تنتج أول مركبة لهذا الجداء من ضرب أول سطر من A في المتجه العمود x :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2u + v + w \end{bmatrix}. \qquad (٢)$$

يساوي ذلك المركبة الأولى من b ؛ $2u+v+w=5$ هي المعادلة الأولى من نظامنا. تتعين المركبة الثانية من الجداء Ax بالسطر الثاني من A ـ إنها $4u - 6v$ ـ أما المركبة الثالثة فانها تنتج عن السطر الثالث. إذاً المعادلة المصفوفية $Ax=b$ هي، بصورة دقيقة، مكافئة للمعادلات الآنية الثلاث التي انطلقنا منها.

العملية الظاهرة في المعادلة (٢) أساسية في كل ضرب مصفوفي. ننطلق من متجه سطر ومتجه عمود من سعة واحدة ويكون الجداء عدداً صرفاً. تدعى هذه الكمية الجداء الداخلي للمتجهين. بقول آخر، إنَّ جداء مصفوفة $1\times n$ التي هي **متجه سطر**، في مصفوفة $n\times 1$، المعروفة **بمتجه عمود**، هو مصفوفة 1×1 :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}.$$

يؤكد ذلك أن الحل المقترح $x = (1,1,2)$ يحقق المعادلة الأولى .

إذا نظرنا إلى جميع الحسابات ، في ضرب مصفوفة في متجه ، فان هناك طريقتين لاجراء ذلك . الأولى متابعة **سطر** في كل مرة . نركب كل سطر من المصفوفة مع المتجه لينتج مركبة من الجداء . يوجد ثلاثة جداء ات داخلية ، عندما توجد ثلاثة أسطر : من أجل المثال :

بالاسطر :

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2 & +1.5 & +6.0 \\ 3.2 & +0.5 & +3.0 \\ 1.2 & +1.5 & +4.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

هكذا يشرح الأمر ، عادة ، لكن الطريقة الثانية لاتقل عن هذه أهمية ، وهي في الواقع أكثر أهمية . إنها تجري الضرب : عمود في كل مرة . نحصل على Ax دفعة واحدة وهو **تركيب في الأعمدة الثلاثة لـ A** :

$$Ax = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} +5\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} +0\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}. \qquad (٣)$$

الجواب هو مثلاً العمود (١)+٥ أمثال العمود(٢) . إنه يقابل «الصورة العمودية» للنظام الخطي $Ax = b$. إذاكان للطرف الأيمن المركبات 7,6,7 فان للحل x المركبات 2,5,0 . طبعاً تتفق الصورة السطرية مع ذلك . (وعلينا أخيراً أن نقوم بالعمليات ذاتها) .

نستخدم قاعدة العمود باستمرار وفي كل مكان في هذا الكتاب ، لذلك نعيد ذكرها للتأكيد :

١ـ أ يمكن إيجاد الجداء Ax باستخدام الأعمدة كاملة كما هو ظاهر في (٣) . ولذلك ، فإن Ax تركيب خطي لأعمدة A. المعاملات التي تضرب بالأعمدة هي مركبات x .

إذا أردنا أن نستخلص قاعدة عامة للضرب في n بعد ، فاننا نحتاج إلى رمز لكل

عنصرفي Aتمكن قراؤ ته بسهولة . إذا وقع عنصر من A في السطر ذي الرقم i والعمود ذي الرقم j فاننا نمثله بالرمز a_{ij}. يعطي الدليل الأول رقم السطر ويعطي الدليل الثاني رقم العمود . (في المصفوفة السابقة ، $a_{21}=3$, $a_{13}=6$)، إذا كانت A من النوع $m\times n$ فان i يتحول من 1 إلى m و j يتحول من 1 إلى n ، و بالجملة إن للمصفوفة $m\times n$ عنصراً مكونة نظاماً مستطيلاً ، a_{mn} يقع في الزاوية اليمنى الدنيا .

ويكفي دليل واحد لكل مركبة لـ x ؛ تمثل مركبته ذات الرقم j بالرمز x_j (في الضرب السابق $x_1=2, x_2=5, x_3=0$) . يكتب عادة x على صورة متجه عمود ـ يشبه مصفوفة من النوع $n\times 1$ ـ لكن يطبع في بعض الأحيان بصورة سطر ، مثل $x=(2,5,0)$. وجود القوسين والفواصل يبين أن ذلك ليس مصفوفة من النوع 1×3 . إنه متجه عمود لكنه انكب على وجهه مؤقتاً .

من أجل تمثيل الجداء Ax ، يمكننا استخدام رمز التجميع سيغما $sigma$: «Σ»

$$\sum_{J=1}^{n} a_{ij}x_j \quad \text{هي المركبة } i \text{ من } Ax$$

ينتقل هذا المجموع على طول السطر i من A مكوناً الجداء الداخلي لهذا السطر بالمتجه x . يعطي الدليل j جميع القيم من 1 إلى n ومن ثم يضيف النتائج ـ المجموع هو $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+....+a_{in}x_n$. نلاحظ من جديد أن طول السطر (عدد أعمدة A) يجب أن يساوي عدد مركبات x . مصفوفة من النوع $m\times n$ تضرب بمتجه ذي n بعداً (تعطي متجهاً ذا m بعداً) . التجميع يبسط العمل وذلك بكتابة كل شيء كاملاً ، ولكن ليس له جودة الترميز المصفوفي[1]

---

(١) أدخل انشتاين «الرمز التنسوري» حيث يعني تكرار الدليل تجميعياً . لقد كتب a ijxj أو a ijxj بدون الرمز Σ .

الشكل المصفوفي لإحدى خطوات الحذف

استخدمنا، حتى الآن، شكلاً مختزلاً مناسباً للنظام الأصلي هو $Ax=b$. ولكن ماذا نستخدم من أجل العمليات التي نجريها خلال عملية الحذف؟ في مثالنا، تقوم الخطوة الأولى بطرح جداء المعادلة الأولى بالعدد (2) من المعادلة الثانية وتؤدي هذه الخطوة، في الطرف الثاني إلى ضرب المركبة الأولى من b بالعدد (2) أيضاً وطرح الناتج من المركبة الثانية. ندعي أننا **نحصل على هذه النتيجة ذاتها إذا ضربنا المتجه b بالمصفوفة الأولية التالية**:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

يتحقق ذلك بتطبيق قاعدة ضرب مصفوفة بمتجه:

$$Eb = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -12 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

نلاحظ أن المركبتين الأولى والأخيرة 5,9 تبقيان كما هما (بسبب الشكل الذي اخترناه للسطرين الأول والثالث من E). المركبة الجديدة الثانية هي 12- وذلك ماظهر بعد الخطوة الأولى من الحذف.

من السهل وصف المصفوفات التي تشبه E والتي تنفذ مختلف خطوات الحذف. نلاحظ أيضاً أن «مصفوفة الوحدة» لاتقوم (في الضرب) بأي عمل.

١ـب المصفوفة التي تبقى (في الضرب) أي متجه كما هو، **هي مصفوفة الوحدة** I، مكونة من وحدان على قطرها وأصفار في المواقع الأخرى. المصفوفة التي تطرح مضاعفاً l للسطر j من السطر i **هي المصفوفة الأولية** E_{ij} مكونة من وحدان على القطر وبالعدد l- عند تقاطع السطر i مع العمود j (بقية العناصر أصفار).

مثال $E_{31} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

إذا ضربت أي متجه b بمصفوفة الوحدة فانك تحصل من جديد على b. إن ذلك يشبه الضرب بالعدد (١) : $Ib = b$. إذا ضربت ، عوضاً عن ذلك ، بالمصفوفة E_{31} ، فانك تحصل على $E_{31}b = (b_1, b_2, b_3 - b_1)$. إنها عملية نموذجية على الطرف الأيمن من المعادلات. والشيء المهم هو ماذا يحصل في الطرف الأيسر.

للمحافظة على المساواة علينا أن نطبق العملية ذاتها على طرفي المعادلة $Ex = b$ ، أو بقول آخر ، علينا أن نضرب من اليسار ، المتجه Ax بالمصفوفة E. مصفوفتنا الأصلية E تطرح جداء العدد (٢) بالمركبة الأولى من المركبة الثانية تاركة المركبتين الأولى والثالثة ثابتتين. بعد هذه الخطوة يظهر النظام الجديد الأبسط (المكافىء للنظام القديم) وهو $E(Ax) = Eb$. إنه نظام أبسط بسبب الصفر الذي أحدث تحت المحور وهو مكافىء لأنه يمكننا أن نعود إلى النظام الأصلي (باضافة جداء العدد(2) بالمعادلة الأولى إلى الثانية). لذا فان لهذين النظامين الحل نفسه x.

ضرب المصفوفات

نصل الآن إلى المسألة الأكثر أهمية : كيف نضرب مصفوفتين. لدينا من قبل مفتاح جزئي لهذا الأمر وذلك من خلال طريقة الحذف. نعرف مصفوفة المعاملات الأصلية وإلى ماتؤول بعد الخطوة الأولى من الحذف، ونعرف أخيراً المصفوفة E التي تنفذ هذه الخطوة. من أجل ذلك نرغب أن يكون :

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad \text{ضرب} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{يعطي} \quad EA = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

يظهر أن السطرين الأول والثالث بقيا كما هما في EA بينما طرح ضعفا السطر الأول من الثاني. إذاً الضرب المصفوفي متوافق مع عمليات السطر في الحذف. يمكننا

كتابة هذه النتيجة إما بالصورة $E(Ax)=Eb$، بضرب E ب لطرفي معادلتنا أو بالشكل $(EA)x=Eb$؛ لقد كونت المصفوفة الجديدة EA ، تماماً، بالصورة التي توافق هذه المعادلات . بقول آخر القوسان غير ضروريين ويمكننا أن نكتب $EAx = Eb$[1] .

هناك حاجة أخرى من ضرب المصفوفات : نعرف الآن كيف نجري الضرب Ax لمصفوفة في متجه، وعلى التعريف أن يبقى متسقاً مع مثل هذه الحالة . عندما تتكون مصفوفة B من عمود واحد xفان على مصفوفة الجداء AB أن تكون متطابقة مع متجه الجداء Ax. من المفضل أن تسير الأمور إلى أبعد من ذلك : عندما تحوي المصفوفة B أعمدة متعددة، مثل x_1 , x_2 , x_3 فاننا نتوقع أن تكون أعمدة AB هي بالضبط Ax_1, Ax_2, Ax_3 لذا يصبح ضرب المصفوفات واضحاً تماماً؛ يمكننا أن نعتبر المصفوفة B مكونة من عدد من الأعمدة المتتابعة ويمكننا أن نأخذ كل واحد منها منفرداً. يمكن استخدام هذه القاعدة من أجل المصفوفتين المضروبتين أعلاه . يساوي العمود الأول من EA جداء E في العمود الأول من A، نعمل بهذه الصورة في بقية الأعمدة .

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

لنلاحظ أن مطلبنا الأول كان اجراء عمليات سطر بينما يتعلق المطلب الثاني بالأعمدة . أما الأسلوب الثالث فهو وصف كل عنصر من AB بصورة منفردة . في الواقع توجد قاعدة واحدة ممكنة، ولست متأكداً ممن اكتشفها . ليس من الممكن أن نضرب أي مصفوفتين A و B ؛ إذا كانتا مربعتين، كما في مثالنا فان عليهما أن تكونا من حجم واحد وإذا كانتا مستطيلتين فان من الضروري أن لاتكونا من النوع ذاته بل يجب أن **يكون عدد أعمدة A مساوياً عدد أسطر B**. عندئذ فقط يمكن ضرب A بكل عمود من B

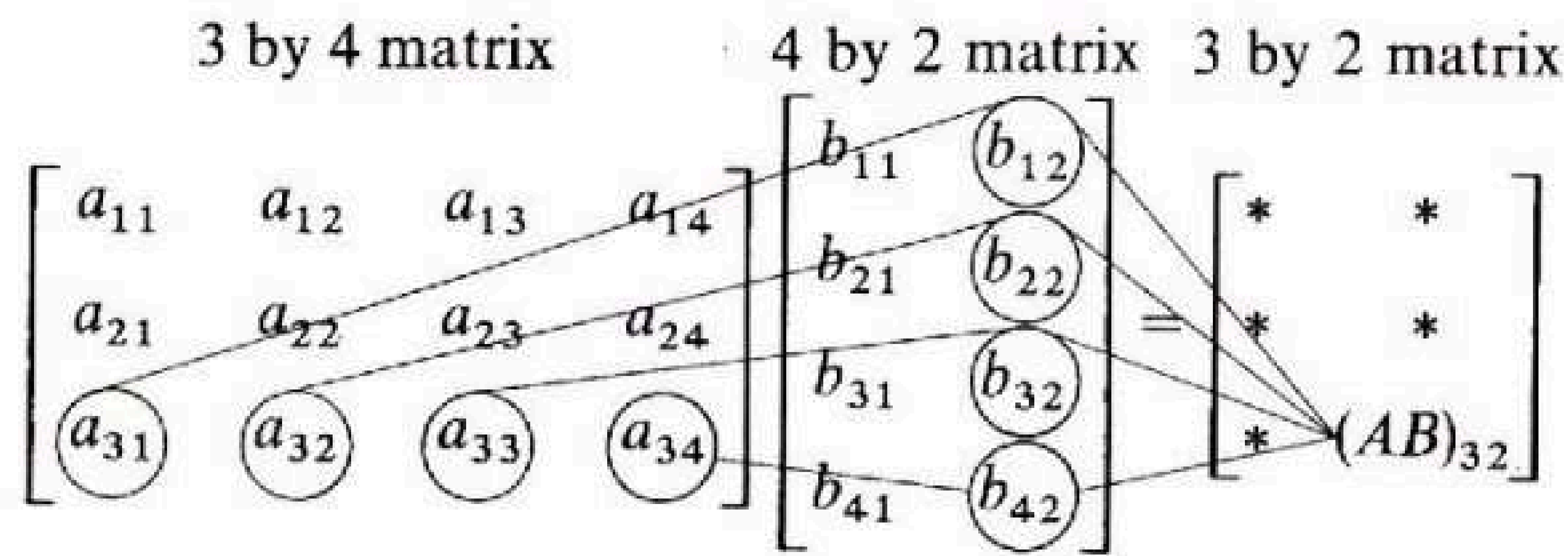
(١) إن ذلك هو الخاصة التجميعية $4\times(2\times3) = (4\times3)\times2$ الأمر يظهر واضحاً بحيث من الصعب تصور خطأه . من الممكن أن يظهر الأمر نفسه من أجل «الخاصة التبديلية» $2\times3 = 3\times2$ ولكن هذه الخاصة خاطئة فعلاً من أجل المصفوفات .

منفرداً. بقول آخر إذا كانت A من النوع $m \times n$ و B من النوع $n \times r$ فان الضرب ممكن وسيكون **الجداء AB مصفوفة من النوع $m \times r$** .

سنصف الآن كيف نجد العنصر الواقع في السطر i والعمود j في $A B$.

١ـ جـ العنصر i, j من AB هو الجداء الداخلي للسطر i من A والعمود j من B . من أجل المثال الظاهر في الشكل (١-٦)،

$$(AB)_{32} = a_{31} b_{12} + a_{32} b_{22} + a_{33} b_{32} + a_{34} b_{42}.$$



شكل (١ – ٦) توضيح لضرب المصفوفات.

ملاحظة نكتب AB عندما لايكون لهاتين المصفوفتين أي دور خاص في عملية الحذف. لقد كان مثالنا القريب EA بسبب المصفوفة الأولية E؛ سنجد فيما بعد PA أو LU أو LDU أيضاً. في كل حالة نستخدم القاعدة العامة نفسها لضرب المصفوفات.

مثال ١

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 0 \end{bmatrix}.$$

العدد 17 مثلاً هو (5) (3) + (1) (2) وهذا هو الجداء الداخلي للسطر الأول من المصفوفة الأولى بالعمود الأول من الثانية. أما العدد 8 فهو (1-) (0) + (2) (4) وهو ناتج عن السطر الثاني من المصفوفة الأولى والعمود الثاني من الثانية. العمود الثالث من B مكون من أصفار وهو كذلك أصفار في AB .

مثال ٢

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

تأثير المصفوفة اليسرى هو المبادلة بين سطرين في المصفوفة اليمنى .
مثال ٣

$BI = B.$ و $IA = A$

تبقي مصفوفة الوحدة كل متجه كما هو وتبقي أيضاً كل مصفوفة كما هي :
مثال ٤

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 2a + 3c & 2b + 3d \end{bmatrix}.$$

بالأعمدة ، يوضح هذا المثال الخاصة التي تأملنا وجودها قبل قليل . إن B مكونة من عمودين متتابعين وإن A تضرب كل منهما على انفراد . لذا فإن **كل عمود من AB سيكون تركيباً لأعمدة A**. تماماً كما في ضرب مصفوفة بمتجه ، أعمدة A مضروبة بعناصر من B. العمود الأول من AB هو جداء « a» بالعمود (١) + جداء « c» بالعمود (٢) .

نتساءل الآن عن أسطر AB. يمكن للضرب أن يعمل مع سطر في كل مرة . يستخدم السطر الثاني من الجواب العددين $2, 3$ من السطر الثاني من A. يضرب هذان العددان سطري B لنحصل على $2[a \;\; b]+3[c \;\; d]$. بصورة مشابهة ، يستخدم السطر الأول من الجواب ، العددين $1, 0$ ليعطي $1[a \;\; b]+0[c \;\; d]$. تماماً كما في الحذف ، كل سطر من AB **تركيب في أسطر B** .

سنجمل فيما يلي الطرائق الثلاث للتعبير عن ضرب مصفوفتين .

(١) كل عنصر من AB هو جداء **سطر في عمود** :

$(AB)_{ij}$ = السطر i من A في العمود j من B .

(٢) كل عمود من AB هو جداء **مصفوفة في عمود**:

العمود j من AB = A مضروباً بالعمود j من B

(٣) كل سطر من AB هو جداء **سطر في مصفوفة**:

السطر i من AB = جداء السطر j من A في المصفوفة B .

تفيد هذه الملاحظة لتحقيق خاصة من خواص ضرب المصفوفات . لنفرض أن لدينا ثلاث مصفوفات A, B, C من الممكن أن تكون مستطيلة، ولنفرض أن أنواعها تسمح بضربها بهذا الترتيب: عدد الأعمدة في كل من A , B يساوي على الترتيب عددالأسطر في كل من B , C ؛ عندئذ تتحقق الخاصة التالية :

١ـ هـ ضرب المصفوفات تجميعي $(AB)C = A(BC)$.

إذا فرضنا أن C مجرد متجه (مصفوفة ذات عمود واحد) فان ذلك هو المتطلب الذي قدمناه سابقاً $(EA)x = E(Ax)$. إن ذلك هو القاعدة الأساسية كاملة لضرب المصفوفات . إذا كان للمصفوفة C عدد من الأعمدة فان علينا أن نعتبرها موضوعة الواحد تلو الآخر ونطبق هذه القاعدة عدة مرات . لذا فان الأقواس غير ضرورية عندما نضرب عدداً من المصفوفات بعضها بالبعض الآخر . يمكن التحقق من ذلك بمقارنة كل عنصر من $(AB)C$ مع العنصر المقابل له من $A(BC)$ ؛ (التمرين ١-٤-٢٠)؛ لكن سنرى لماذا الرمز المصفوفي هو المفضل .

نريد أن نتوصل إلى الرابطة التي تقع بين ضرب المصفوفات وطريقة الحذف، ولكن هناك خاصتان أخريان علينا أن نقدمهما أولاً ـ يتمتع الضرب المصفوفي بالأولى منهما بينما لا يتمتع بالثانية . الخاصة التي يحققها هي :

١ـ و ضرب المصفوفات توزيعي على جمعها :

$$A(B+C) = AB+AC \quad , (B+C)D = BD + CD$$

من الواضح أن أنواع هذه المصفوفات يجب أن تكون متوافقة كما ينبغي كون C وB من نوع واحد لكي يمكن جمعهما . أما D و A فان عليهما أن تكونا قابلتين للضرب في $B+C$ من اليمين ومن اليسار على الترتيب . برهان هذا القانون عمل مضجر .

أما الخاصة الفاشلة في هذا المجال فهي ذات أهمية أكبر :

١ـز ضرب المصفوفات غير إبدالي : بصورة عامة $FE \neq EF$.

مثال ٥ نفرض أن E هي المصفوفة التي قدمت أعلاه والتي تقوم بطرح ضعفي المعادلة الأولى من الثانية ـ ولنفرض أن F هي مصفوفة الخطوة التالية ، إنها **تجمع السطر (١) إلى السطر (٣)** ؛

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

هاتان المصفوفتان تتبادلان :

$$EF = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = FE.$$

يقوم هذا الجداء بخطوتين ، بكلا الترتيبين ، أو بهما معاً ، لأنه في هذه الحالة ليس للترتيب أي تأثير .

مثال ٦ نفرض أن E هي نفسها لكن G هي مصفوفة الخطوة الأخيرة ـ إنها تضيف **السطر ٢ إلى السطر ٣** . الترتيب الآن ينتج اختلافاً ؛ في حالة أولى ، عندما نطبق E ثم G فان المعادلة الثانية تتغير **قبل أن تؤثر** في الثالثة . إن ذلك هو الترتيب الذي سد الحاجة في الحذف . تؤثر المعادلة الأولى في الثانية التي تؤثر في الثالثة . إذا جاء ت E بعد G فان المعادلة الثالثة لا تتأثر بأي شيء من قبل الأولى . يمكنك أن تلاحظ وجود صفر في الموضع (3,1) من EG بينما هو 2- في GE :

$$EG = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{لكن} \quad GE = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

لذا فان $EG \neq GE$. من أجل مثال كيفي سيقع ، على الأغلب ، الشيء ذاته ـ معظم المصفوفات غير تبديلية ـ لكن المصفوفات الواردة هنا ذات معنى خاص . هناك سبب لكون $EF = FE$ وسبب لكون $EG \neq GE$. يستحق ذلك أن نأخذ خطوة اضافية ،

لكي نرى ماذا يحدث **لمصفوفات الحذف الثلاث في الوقت ذاته :**

$$GFE = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad و \quad EFG = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

إن الجداء GFE هو بالترتيب الصحيح للحذف . **إنها المصفوفات التي تنقل المصفوفة الأصلية A إلى المصفوفة المثلثية العليا U** . سنراها من جديد في البند التالي .

المصفوفة الأخرى EFG ألطف ، لأنه ، في هذا الترتيب ، لم يختل نظام الأعداد 2 من E و 1 من F و 1 من G . بقيت مرتبة في الجداء . لسوء الحظ إنه الترتيب الخاطىء من أجل الحذف . لكن لحسن الحظ **إنه الترتيب الصحيح لعكس خطوات الحذف**، الذي سيأتي أيضاً في البند التالي . لاحظ أن جداء مصفوفتين مثلثيتين دنياوين هو أيضاً مصفوفة مثلثية دنيا .

تمـــاريـــن

١-٤-١ احسب الجداءات

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \quad و \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad و \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

ارسم محورين متعامدين وارسم في مستويهما متجهي النقطتين $x = 0$, $y = 3$ و $x = 2, y = 1$. اجمع هذين المتجهين وذلك بإتمام متوازي الأضلاع .

١-٤-٢ استخدم عموداً في كل مرة لحساب الجداءات

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad و \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad و \quad \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

١-٤-٣ أوجد الجداءين الداخليين والجداء المصفوفي :

$$\begin{bmatrix}1 & -2 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-2\\7\end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix}1 & -2 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\5\\1\end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix}1\\-2\\7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 5 & 1\end{bmatrix}.$$

الأولان يعطيان طول متجه (مربع)

١-٤-٤ إذا كانت مصفوفة من النوع $m \times n$ مضروبة بمتجه x ذي n بعداً، فما هو عدد فما هو عدد العمليات التي يحويها ذلك ؟ وما هو عدد هذه العمليات إذا ضربت A بمصفوفة من النوع $n \times p$ ؟

١-٤-٥ احسب الجداء:

$$Ax = \begin{bmatrix}3 & -6 & 0\\0 & 2 & -2\\1 & -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}.$$

من أجل هذه المصفوفة، أوجد x متجه حل النضام $Ax=0$، حيث الطرف الثاني أصفار في المعادلات الثلاث. هل يمكنك أن تجد أكثر من حل واحد؟

١-٤-٦ أكتب المصفوفتين A ,B من النوع 3×2 واللتين عناصرهما على الترتيب $a_{ij} = i+j$ و $b_{ij} = (-1)^{i+j}$

١-٤-٧ عبر عن الجداء الداخلي لمتجه السطر $y = (y_1, y_2, ...y_n)$ في المتجه العمود x، بصورة التجميع.

١-٤-٨ أعط أمثلة من النوع 3×3 (سوى $A = 0$) لمايلي

(أ) لمصفوفة قطرية : $a_{ij} = 0$ إذا كان $i \neq j$ ؛

(ب) لمصفوفة متناظرة : $a_{ij} = a_{ji}$ لكل i و j ؛

(جـ) لمصفوفة مثلثية عليا : $a_{ij} = 0$ إذا كان $i > j$ ؛

(د) لمصفوفة متناظرة تخالفية : $a_{ij} = -a_{ji}$ لكل i و j ؛

١-٤-٩ هل البرامج الجزئية التالية تجري الضرب Ax وفق الأسطر أو الأعمدة ؟

```
DO  10 I = 1,N        DO 10J = 1,N
DO  10J = 1,N         DO 10I = 1,N
10B(I) =  B(I) + A(I,J) * X(J )  10 B(I) + A(I,J) *  X(J)
```

النتائج متكافئة رياضياً، نفرض أنه منذالبدء B (I) =0 ولكن بناءفورتران *Fortran* يجعل الشفرة (*code*) الثانية، جزئياً، أكثر فعالية (الملحق٢). إنه أكثرفعالية على آلة متجهات مثل *CRAY* لأنه يمكن للمجموعة الداخلة (*inter loop*) أن تغير عدداً من (B (I دفعة واحدة وذلك عندما تقوم الشفرة الأولى بتغييرات عدة لواحدة من (B (I ولا تضعها على صور متجهات.

١-٤-١٠ إذا كانت عناصر A هي a_{ij} استخدم رمز الدليل الأدنى من أجل كتابة

(١) المحور الأول.

(٢) l_{ij} مضروب السطر الأول الذي يطرح من السطر i.

(٣) العنصر الجديد الذي يأخذ مكان a_{ij} بعد هذا الطرح.

(٤) المحور الثاني.

١-٤-١١ صائب أم خاطيء؛ أعط مثالاً معاكساً إذا كان الأمر خاطئاً.

(أ) إذا كان العمودان الأول والثالث في AB . متطابقين فانه يكون كذلك من أجل العمودين الأول والثالث في AB.

(ب) إذا كان السطران الأول والثالث من B متطابقين فانه يكون كذلك من أجل السطرين الأول والثالث في AB.

جـ) إذا كان السطران الأول والثالث من A متطابقين فانه يكون كذلك من أجل السطرين الأول والثالث في AB.

د) $(AB)^2 = A^2B^2$.

١-٤-١٢ السطر الأول من AB تركيب خطي لجميع أسطر B . ماهي المعاملات في

هذا التركيب وماهو السطر الأول من AB إذا كان :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} ?$$

١-٤-١٣ جداء مصفوفتين مثلثيتين دنياوين هو مصفوفة مثلثية دنيا (جميع عناصرها الواقعة فوق القطر الرئيسي أصفار . تأكد من ذلك بمثال من النوع 3×3 وفسر كيف ينتج ذلك عن قوانين ضرب المصفوفات .

١-٤-١٤ بطريقة التجربة والخطأ ، أوجد أمثلة من النوع 2×2 بحيث يكون

(أ) $A^2=-I$ ، عناصر A أعداد حقيقية فقط .

(ب) $B^2=0$ رغم أن $B \neq 0$.

(جـ) $CD=-DC$ خلاف الحالة $CD=0$.

(د) $EF=0$ رغم أن عناصر E أو F ليست كلها أصفار .

١-٤-١٥ صف أسطر EA و أعمدة AE إذا كان $E = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

١-٤-١٦ حقق الخاصة التجميعية $(EF)G=E(FG)$ من أجل مصفوفات النص .

١-٤-١٧ نفرض أن A قابلة للمبادلة مع كل مصفوفة من النوع 2×2 $(AB = BA)$ وبصورة خاصة

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ تتبادل مع } B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ و } B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بين أن $a=d, b=c=0$. إذا كان $AB=BA$ لكل مصفوفة B ، فان A مضاعف لمصفوفة الوحدة .

١-٤-١٨ ليكن x عمود مركباته $1,0,\ldots\ldots,0$. برهن أن القاعدة $(AB)x=A(Bx)$ تؤدي إلى أن العمود الأول من AB يساوي جداء A في العمود الأول من B.

١-٤-١٩ أي واحدة من المصفوفات التالية تساوي $(A+B)^2$ ؟

١-٤-٢٠ في رمز التجميع، الحد ذو الدليلين i, j من AB هو :

$$(AB)_{ij} = \sum_{k} a_{ik} b_{kj} .$$

إذا كانت كل من A , B مصفوفة من النوع $n \times n$ وكل عنصر فيهما يساوي الواحد، فأوجد $(AB)_{ij}$. الترميز ذاته يحول الخاصة التجميعية $(AB) C = A (BC)$ إلى الشكل

$$\sum_{j} \left(\sum_{k} a_{ik} b_{kj} \right) c_{jl} = \sum_{k} a_{ik} \left(\sum_{j} b_{kj} c_{jl} \right).$$

احسب كلاً من الطرفين إذا كانت C أيضاً من النوع $n \times n$ وكان $c_{ij} = 2$.

١-٤-٢١ هناك أربع طرائق للنظر في ضرب المصفوفات، مثل ضرب أعمدة بأسطر . إذا كانت أعمدة A هي $c_1 ,....,c_n$ وأسطر B هي المتجهات السطرية $r_1 ,....r_n$ فان $c_1 r_1$ مصفوفة وإن

$$AB = c_1 r_1 + c_2 r_2 + ... + c_n r_n .$$

(أ) أعط مثالاً من النوع 2×2 لهذه القاعدة في ضرب المصفه فات .

(ب) فسر لماذا يعطي الطرف الأيمن القيمة الصحيحة لـ $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$ للعناصر $(AB)_{ij}$.

١-٤-٢٢ المصفوفة التي «تدوِّر» المستوي $x y$ هي

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

(أ) حقق أن $A (\theta_1) A (\theta_2) = A (\theta_1+\theta_2)$ من المتطابقتين المتعلقتين بـ $\cos (\theta_1+\theta_2) , \sin (\theta_1+\theta_2)$.

(ب) ماهو جداء $A (\theta)$ في $A (-\theta)$؟

١-٤-٢٣ من أجل المصفوفات

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ و } C = AB = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

أوجد القوى... $A^2, A^3(A^2.A),..., B^2, B^3,..., C^2, C^3$...

١-٤-٢٤ ضرب الكتل هو أكثر عمومية من الضرب عن طريق الأعمدة. إذا وزعت مصفوفة إلى كتل (مصفوفات جزئية) وكانت طريقة اجراء الضرب بالكتل ممكنة، فان ذلك يجرى كما يلي :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x \end{array}\right] \text{ أو } \begin{bmatrix} x & x & x & x \\ x & x & x & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & x \\ x & x \\ x & x \\ x & x \end{bmatrix} \text{ أو} \ldots$$

(أ) عوض الحروف x بأعداد وتأكد أن ضرب الكتل عملية ناجحة.

(ب) أعط مثالين آخرين (بالحروف x)، إذاكانت A من النوع 3×4 وB من النوع 4×2. القطع الرأسي في A يجب أن يتلائم مع القطع الأفقي في B .

١ ـ ٥ العوامل المثلثية والمبادلات السطرية

نريد أن ننظر من جديد في طريقة الحذف ونرى ماذا يعني ذلك من وجهة النظر المصفوفي. لقد كانت نقطة الأنطلاق هي النظام $Ax = b$:

$$Ax = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix} = b. \quad (١)$$

لقد كان آن ذاك ثلاث خطوات حذف :

(١) طرح ضعفي المعادلة الأولى من الثانية ؛

(٢) طرح جداء العدد (-1) بالمعادلة الأولى من المعادلة الثالثة ؛

(٣) طرح جداء العدد (-1) في المعادلة الثانية من المعادلة الثالثة .

الناتج نظام مكافىء ولكنه أبسط ، يمثل بمصفوفة معاملات جديدة U :

$$Ux = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -12 \\ 2 \end{bmatrix} = c . \qquad (٢)$$

المصفوفة U **مثلثية عليا** ، جميع عناصرها الواقعة تحت القطر الرئيسي أصفار .

الطرف الأيمن متجه جديد نتج عن المتجه الأصلي b بالخطوات ذاتها التي أنتجت U عن A . لذا ، فان طريقة الحذف يمكن انجازها بما يلي :

الانطلاق من A ,b

تطبيق الخطوات (١)، (٢)، (٣) بهذا الترتيب

الإنتهاء بالمصفوفة U والمتجه c .

المرحلة الأخيرة هي حل النظام $Ux = c$ بالتعويض التراجعي ، لكننا لن نهتم الآن بذلك ، بل نركز اهتمامنا على علاقة A بـ U .

E مصفوفة الخطوة (١)، F مصفوفة الخطوة (٢) و G مصفوفة الخطوة (٣)، قد قدمت في بند سابق . لقد سميت **مصفوفات أولية** ومن السهل معرفة عملها . لطرح مضاعف l للمعادلة j من المعادلة i ، ضع العدد l - في الموضع (i, j) من مصفوفة الوحدة وحافظ على الوحدان على القطر والأصفار في بقية المواضع . الضرب بهذه المصفوفة ينفذ الخطوة المطلوبة .

نتيجة جميع الخطوات هو $GFEA = U$. لاحظ أن E هي الأولى التي يضرب بها A ثم F ثم G . يمكننا أن نضرب GFE بعضها ببعض لايجاد مصفوفة وحيدة تحول A إلى U (وتحول كذلك b إلى c). باهمال الأصفار يكون ذلك :

$$GFE = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ 1 & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ -2 & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ -2 & 1 & \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (٣)$$

إن ذلك جيد ولكن الأهم منه هو بالضبط العكس : كيف يمكننا العودة من U إلى A كيف يمكننا إبطال خطوات الحذف ؟

إن ابطال خطوة منفردة مثل (١) ليس بالأمر الصعب. عوضاً عن الطرح، نضيف مثلي السطر الأول إلى الثاني (ليس مثلي السطر الثاني إلى الأول !). نتيجة اجراء الطرح والجمع معاً هي ظهور مصفوفة الوحدة من جديد :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (٤)$$

إحدى العمليتين تلغي الثانية. بلغة المصفوفات، إحدى المصفوفتين هي **معكوس** الثانية.

إذا كان العدد $(-l)$ يشغل الموضع (i, j) في المصفوفة E فان معكوسه $(+l)$ يقع في هذا الموضع[1]. تمثل هذه المصفوفة بالرمز E^{-1}. جداء E^{-1} في E هو مصفوفة الوحدة. وهذه هي المعادلة (٤).

يمكننا عكس كل خطوة باستخدام E^{-1}, F^{-1}, G^{-1}. المسألة الأخيرة هي إلغاء كل هذه العمليات دفعة واحدة ومعرفة أي مصفوفة تعيد U إلى A. لنلاحظ أنه **لما كانت الخطوة (٣) هي الخطوة الأخيرة للإنتقال من A إلى U، فإن مصفوفتها G هي الأولى التي يجب عكسها عندما ننتقل في الاتجاه المعاكس**. العكس يجري في ترتيب مضاد، لذا، فإن الخطوة المعاكسة الثانية هي F^{-1} والأخيرة E^{-1} :

$$E^{-1} F^{-1} G^{-1} U = A \quad (٥)$$

يمكن للقارئ أن يعوض U ذهنياً بـ $GFEA$ ليرى كيف تسقط المعكوسات الخطوات الأصلية.

لقد تعرفنا الآن على المصفوفة التي تعيد U إلى A. **إنها المصفوفة** $E^{-1} F^{-1} G^{-1}$،

---

(١) يصعب ايجاد معكوس أغلب المصفوفات ! نقدم المعكوس بصورة نظامية في البند الأخير، لكنني أرى أنه ليس من الصعب رؤية الحالات البسيطة هنا.

وهي مفتاح طريقة الحذف. وهي أداة الوصل بين A التي ننطلق منها و U التي نصل إليها. تدعى هذه المصفوفة L لأنها **مثلثية دنيا**. لكن هناك أيضاً خاصة أساسية يمكن رؤيتها فقط عند ضرب جميع هذه المصفوفات بعضها ببعض:

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ -1 & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = L. \qquad (٦)$$

من المؤكد أن L مصفوفة مثلثية دنيا كل عنصر في قطرها الرئيسي يساوي الواحد. وأصفار فوقه. الشيء المميز فيها هو أن العناصر الواقعة تحت القطر الرئيسي هي بالضبط المعاملات $l = 2,-1,-1$. يظهر، عادة، عندما تضرب مصفوفات فيما بينها، أنه لا توجد طريقة مباشرة لمعرفة الجواب. في هذه الحالة، جاءت المصفوفات بالوضع المناسب لمعرفة جدائها مباشرة. إذا ما خزن حاسوب كل مضروب l_{ij} ـ وهو العدد الذي ضرب به سطر المحور ليطرح الناتج من السطر i لنحصل أخيراً على صفر في الموضع (i, j) ـ لذا فان تلك المضاريب تكون تسجيلاً تاماً لطريقة الحذف. إنها صالحة لتكوين المصفوفة L التي تعيد U إلى A.

١ - ح (التحليل المثلثي $A = LU$) إذا لم يكن هناك ضرورة لمبادلات سطرية، فانه يمكن كتابة المصفوفة الأصلية على شكل جداء $A = LU$. المصفوفة Lمثلثية دنيا، بوحدان على قطرها وتقع المضاريب l_{ij} (التي أخذت من أجل الحذف) تحت القطر. U مثلثية عليا تظهر بعد الحذف التقدمي وقبل التعويض التراجعي؛ عناصر قطرها هي المحاور.

مثال ١

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ينحو إلى $U = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ بـ $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$.

مثال ٢ (يحتاج إلى مبادلة سطرية)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$ لا يمكن تحويله إلى الصيغة $A = LU$

مثال ٣ (جميع المحاور موجودة والمضاريب تساوي الواحد)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = LU$$

يوجد طروح في الانتقال من A إلى U، وجموع في الانتقال من U إلى A.

مثال ٤ (حيث U هي مصفوفة الوحدة و L مطابقة لـ A)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix}.$$

خطوات الحذف هي (١) E تطرح جداء l_{21} بالسطر الأول من السطر الثاني (٢) F تطرح جداء l_{31} بالسطر الأول من السطر الثالث (٣) G تطرح جداء l_{32} بالسطر الثاني من السطر الثالث. الناتج هو مصفوفة الوحدة: في المثال $U = I$. في الاتجاه المعاكس، إذا كانت قاعدتنا صحيحة، يعيد المعكوس المصفوفة A:

$$E^{-1}[F^{-1}(G^{-1}I)] = A$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ l_{21} & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \text{ ضرب } \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ l_{31} & & 1 \end{bmatrix} \text{ ضرب } \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \text{ ضرب } I = A.$$

الترتيب الصحيح ضروري لتجنب التفاعل بين المصفوفات. لاحظ أن الأقواس ليست ضرورية بسبب القانون التجميعي.

$A = LU$: حالة $n \times n$

التحليل $A = LU$ مهم لدرجة يجب أن نتكلم عنه من جديد. كثيراً مايهمل في مقررات الجبر الخطي خاصة عندما يتركز على الجانب المجرد، أو عندما يظن أنه صعب ـ إلا أنك قد أدركته . لو أن المثال (٤) أعطي خطوة اضافية مقحمة لكي يقبل أي U عوضاً عن الحالة الخاصة $U = I$، فانه سيكون من الممكن رؤية كيف تعمل هذه القاعدة بصورة عامة. لذا فان علينا أن نتذكر كيف يستخدم التحليل LU في الناحية العملية.

القاعدة هي : تطبيق L على U يعيد A :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{سطر ١ من } U \\ \text{سطر ٢ من } U \\ \text{سطر ٣ من } U \end{bmatrix} = A . \qquad (٧)$$

البرهان **هو تطبيق خطوات الحذف**. في الطرف الأيمن، إنها تنقلنا من A إلى U. نريد أن نبين أنها تقوم بالأمر ذاته بالطرف الأيسر؛ إنها تزيل L. لما كان الجانبان في (7) تؤديان إلى U ذاتها وأن جميع الخطوات التي أنجزت قابلة للعكس، لذا فان الطرفين متساويان والعلاقة (7) صحيحة.

تطرح الخطوة الأولى جداء l_{21} في $(1,0,0)$ من السطر الثاني فتجعل فيه l_{21} صفراً. العملية الثانية تطرح جداء l_{31} بالسطر الأول من السطر (٣). تطرح الثالثة جداء l_{32} بالسطر الثاني الجديد (الذي هو $0,1,0$) من السطر الثالث. الترتيب صحيح ونجد الآن مصفوفة الوحدة. يسمح القانون التجميعي لنا أن نواصل عمليات الضرب هذه على طول المصفوفة U. في النهاية، عندما تحولت L إلى I، تبقى U وحدها في الطرف الأيسر. يؤكد هذا أن مصير طرفي العلاقة (7) المصفوفة U. أي أن عليهما أن يكونا الآن متساويين.

التحليل $A = LU$ حرج جداً وممل بحيث تتطلب التمارين معالجة ثانية. لقد كتبنا المصفوفات من النوع 3×3، لكن يمكنك أن ترى كيف يمكن تطبيق هذه المحاكمات على مصفوفة أكبر من ذلك. هنالك برهان ثالث يصل إلى $A = LU$ بوساطة الاستقراء

الرياضي وذلك بارجاع كل مسألة من النوع $n \times n$ إلى المرتبة الأخفض التالية n-1 . يوضح كتابي ، مدخل إلى الرياضيات التطبيقية كيف يسقط الحذف مصفوفة بسيطة في كل خطوة . مجموع هذه المصفوفات هو بالضبط $A = LU$. سنقدم هنا مثالاً ايضاحياً ومن ثم نترك $A = LU$ للاستخدام .

مثال ($A = LU$ ، بأصفار في المواضع الخالية)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & -1 & 2 & -1 \\ & & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -1 & 1 & & \\ & -1 & 1 & \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & & \\ & 1 & -1 & \\ & & 1 & -1 \\ & & & 1 \end{bmatrix}.$$

يبين ذلك كيف يمكن تحليل مصفوفة ذات ثلاثة أقطار غير صفرية إلى مصفوفتين بقطرين غير صفريين . ينتج هذا المثال عن مسألة مهمة في المعادلات التفاضلية (البند ١ـ٧)

نظام خطي = نظامين مثلثين .

هناك نقطة خطيرة تتعلق بالصيغة $A = LU$. إنها أكثر من سجل لخطوات الحذف ؛ إنها تعطي أيضاً المصفوفات الصحيحة لإتمام حل $Ax = b$. في الحقيقة A ستهمل عندما تعرف L, U . ننتقل من b إلى c بوساطة الحذف التقدمي (الذي يستخدم L) وننتقل من c إلى x بالتعويض التراجعي (الذي يستخدم U) . يمكننا العمل بدون A وسنقوم بذلك ، عندما نجد عامليها .

باستخدام لغة المصفوفات ، الحذف يجزّىء $Ax = b$ إلى نظامين مثلثين :

الأول $Lc = b$ ثم $Ux = c$ (٨)

إن ذلك يطابق $Ax = b$. **إذا ضربنا المعادلة الثانية بـ L لنحصل على $LUX = Lc$ التي هي $Ax = b$** . يحل كل نظام مثلثي بسرعة . إن هذا هو الذي يعمله الحذف وإن نظاماً

جيداً ينجز ذلك بهذا الترتيب :

١ - تحليل (من A نجد L,U)
٢- حل (من L و Uو b نجد x)

فصل هاتين الخطوتين يعني أنه يمكن اجراء سلاسل كاملة من الأطراف اليمنى على التوالي . الروتين الجزئي حل يخضع المعادلة (٨) . إنه يحل النظامين المثلثين بـ $n^2/2$ خطوة لكل منهما . يمكن ايجاد الحل المقابل بأي طرف أيمن جديد بـn^2 عملية فقط . إن ذلك أخفض كثيراً من $n^3/3$ خطوة ضرورية لتحليل A في الطرف الأيسر

مثال (المثال السابق مع طرف أيمن b)

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 \qquad\qquad &= 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \qquad &= 1 \\ - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 1 \\ - x_3 + 2x_4 &= 1 \end{aligned} \qquad Ax = b \quad \text{تجزأ إلى نظامين}$$

$$\begin{aligned} c_1 \qquad\qquad &= 1 \\ -c_1 + c_2 \qquad &= 1 \\ -c_2 + c_3 \quad &= 1 \\ -c_3 + c_4 &= 1 \end{aligned} \qquad Lc = b \quad \text{تعطي} \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 \qquad\qquad &= 1 \\ x_2 - x_3 \qquad &= 2 \\ x_3 - x_4 &= 3 \\ x_4 &= 4 \end{aligned} \qquad Ux = c \quad \text{تعطي} \quad x = \begin{bmatrix} 10 \\ 9 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

من أجل هذه «المصفوفات الحزامية» ينخفض عددالعمليات إلى $2n$. إنك ترى كيف يحل النظام $Lc = b$ تقدمياً ؛ هذا بدقة ما يحصل خلال الحذف . ثم $Ux = c$ يحل بالتعويض ـ التراجعي ـ كما هي العادة .

ملاحظة ١ الشكل LU غير تناظري لأنه من ناحية : تقع المحاور على قطر U الرئيسي ، بينما كل عنصر من قطر L الرئيسي يساوي الواحد . إن إصلاح هذا الأمر سهل وذلك باخراج مضروب من U **مكون من مصفوفة قطرية** D عناصر قطرها هي المحاور $d_1, d_2, \ldots, d_n$.

$$U = \begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \cdot & \\ & & & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12}/d_1 & u_{13}/d_1 & \cdot \\ & 1 & u_{23}/d_1 & \cdot \\ & & \cdot & \cdot \\ & & & 1 \end{bmatrix}. \qquad (٩)$$

في المثال الأخير، جميع المحاور تساوي الواحد. في هذه الحالة، D هي مصفوفة الوحدة وليس لهذه الملاحظة أية أهمية. لكن هذه الحالة استثنائية ومن المعتاد أن يكون LDU مختلفاً عن LU.

كثيراً ما يكتب التحليل المثلثي بالصورة $A = LDU$ ، حيث العناصر القطرية من كل من L, U وحدان و D هي المصفوفة القطرية للمحاور.

من المتفق عليه، رغم أن ذلك مربك، متابعة تمثيل هذه المصفوفة المثلثية العليا الجديدة بالرمز U. كلما رأيت LDU، فعليك أن تفهم من ذلك أن عناصر U القطرية وحدان ـ بقول آخر كل سطر قد قسم على محوره. لذا، فإن L, U تعاملان بالتساوي. مثال ذلك:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{bmatrix} = LDU .$$

حيث تقع وحدان على قطري L, U ويقع المحوران 2- ,1 في D.

ملاحظة ٢ ربما أعطينا انطباعنا عند وصف كل خطوة في طريقة الحذف، وهو أنه لايوجد لنا خيار لاجراء الحسابات بترتيب آخر. إن ذلك خاطىء. إن هناك بعض الحرية وهناك "طريقة كراوت *Crout*" التي ترتب الحسابات بطريقة مختلفة قليلاً. ولكن، من المؤكد أنه لاتوجد حرية كاملة لأن اجراء مبادلة الأسطر بترتيب اختياري، في خطوة ما، قد يزيل الأصفار التي كونت في خطوة سابقة. بالاضافة إلى ذلك، لاتوجد حرية في الوضع النهائي المتعلق بالمصفوفات L, D, U. إليك نقطتنا الأساسية:

١ـ ط إذا كان $A = L_1D_1U_1$, $A = L_2D_2U_2$ حيث تمثل L مصفوفة مثلثية دنيا بوحدان على قطرها، وتمثل U مصفوفة مثلثية عليا بوحدان على قطرها، وتمثل D مصفوفة

قطرية بعناصر غير صفرية على قطرها، فإن $L_1 = L_2 , D_1 = D_2 , U_1 = U_2$. التحليل LDU والتحليل LU يعينان بصورة وحيدة بالمصفوفة A.

البرهان تمرين جيد لمعكوسات المصفوفات في البند التالي .

مبادلة الأسطر ومصفوفة المبادلة

سنقابل الآن مسألة كنا قد استبعدناها : العدد الذي نرى استخدامه كمحور يمكن أن يكون صفراً . يمكن أن يقع ذلك في وسط الحسابات ومن الممكن أن يظهر في البدء (عندما يكون $a_{11} = 0$). إليك مثالاً سهلاً لذلك :

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

الصعوبة واضحة؛ لا يوجد مضاعف للمعادلة الأولى يمكنه تحويل المعامل 3 إلى صفر . العلاج كذلك واضح . إنه المبادلة بين المعادلتين ، حيث ينقل المعامل 3 ليقع موقع المحور . في هذه الحالة السهلة تكون المصفوفة مثلثية عليا مباشرة

$$3u + 4v = b_2$$

$$2v = b_1$$

ويمكن عندئذ حل النظام بصورة مباشرة بالتعويض التراجعي .

لكي نعبر عن ذلك بلغة المصفوفات، علينا أن نجد **مصفوفة المبادلة** التي تنجز المبادلة بين السطرين . إنها المصفوفة :

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

فاذا ضربنا بهذه المصفوفة فانه يقع التبادل بين السطرين :

$$PA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

للمصفوفة P التأثير نفسه على b؛ فهي تبادل بين b_1,b_2؛ يأخذ عندها النظام شكله الجديد $PAx = Pb$. لم يتغير موضعا المجهولين u ,v عند المبادلة بين السطرين.

ننتقل الآن إلى حالة أكثر صعوبة. لنفرض أن A مصفوفة من النوع 3×3

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ d & e & f \end{bmatrix}.$$

إن وقوع صفر في موضع المحور يثير إحتمالين: إما أن يكون من السهل إصلاح المشكلة القائمة أو أن تكون المشكلة أكثر جدية. يقرر هذا الأمر بالنظر إلى ما تحت الصفر. إذا وجد تحته، وفي العمود ذاته، عنصر لايساوي الصفر أجرينا مبادلة بين الأسطر ليصبح العنصر غير الصفري هذا هو المحور المطلوب وتتابع عملية الحذف طريقها من جديد[١].

في الحالة التي نحن بصددها، كل شيء يتعلق بقيمة d. إذا كان $d = 0$ فان المسألة تشكل معضلة وتدعى عندئذ المصفوفة **مصفوفة شاذة** وليس هناك أمل بحل وحيد. أما إذا كان $d \neq 0$ فان المبادلة بين السطر الأول والثالث ينقل d إلى موضع المحور وبذلك تكون الخطوة الأولى قد انتهت. لكن في موضع المحور التالي صفر أيضاً. العدد a يقع الآن تحته (e الواقعة أعلاه غير مستخدمة) وإذا لم يكن a صفراً، فان الأمر يحتاج إلى مبادلة أسطر أخرى، المبادلة الأولى P_{13} وهذه المبادلة الثانية P_{23} تنفذان بواسطة المصفوفتين:

$$P_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ و } P_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

يمكن إيجادهما بحيلة بارعة إذا ماضربنا بها مصفوفة الوحدة. مثلاً $P_{13}\,I = P_{13}$ تنتج مصفوفة الوحدة بمبادلة بين السطر الأول والثالث.

---

(١) عملياً، تجري أيضاً مبادلة أسطر عندما يكون المحور الأصلي قريب من الصفر ـ وكذلك إذا لم يكن مساوياً الصفر. إن اختيار محور كبير يصغر خطأ التدوير.

نقطة أخرى : توجد مصفوفة مبادلة تقوم بالمبادلتين السطريتين معاً. إنها جداء مصفوفتي المبادلة (P_{13} تعمل أولاً !) :

$$P_{23}P_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = P.$$

لو أننا عرفنا ذلك، لضربنا مصفوفتنا بالمصفوفة P من أول الأمر . لذا فانه لن يكون في الحذف صعوبة مع PA؛ ليس هناك سوى الترتيب الأصلي السيء الحظ . بالترتيب الصحيح للأسطر نصل فعلاً إلى الشكل المثلثي ،

$$PA = \begin{bmatrix} d & e & f \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$ هي فعلاً مثلثية

فعلاً إن كون هذه المصفوفة مثلثية، وقع صدفة؛ غالباً مايوجد حذف يساري يجب عمله . لكن النقطة الأساسية هي : إذا أمكن للحذف أن يتم بمساعدة مبادلات سطرية ، فانه يمكننا أن نتصور أن هذه المبادلات قد أجريت سابقاً، لتنتج PA، وان هذه *المصفوفة لم تعد بحاجة لمبادلات سطرية* . يعمل الحذف مع جميع الأسطر وهي الآن في وضع لاتقع فيه أصفار في مواضع المحاور . بقول آخر، تقبلت PA التحليل المعتاد L مضروبة بـ U . يمكن تلخيص نظرية غاوس في الحذف كمايلي :

١ـي في الحالة غير الشاذة، توجد مصفوفة مبادلة P تعيد ترتيب أسطر A بحيث لاتقع أصفار في مواقع المحاور . في هذه الحالة :

(١) للنظام $Ax=b$ حل وحيد .

(٢) يحصل عليه بالحذف مع مبادلات سطرية .

(٣) إذا أعيد ترتيب الأسطر مسبقاً، فانه يمكن تحليل PA بالصورة LU .

في الحالة **الشاذة** لا توجد إعادة ترتيب تنتج مجموعة كاملة من المحاور .

لاحظ أن لمصفوفة مبادلة P أسطر مصفوفة الوحدة ذاتها بترتيب ما . في الحقيقة $P=I$ أبسط مصفوفة مبادلة (إنها لا تجري أي مبادلة) . إنَّ جداء مصفوفتي مبادلة هو

مصفوفة مبادلة أخرى. إنها ليست تبديلية: الجداء $P_{13} \times P_{23}$، حيث ضربنا باتجاه معاكس لما في المثال أعلاه، يؤدي إلى مصفوفة P مختلفة.

ملاحظة ـ عليك الانتباه مع L. افرض أن الحذف طرح السطر الأول من السطر الثاني فأوجد $l_{21}=1$. ثم افرض أنه بادل بين السطر الثاني والسطر الثالث. إذا أجريت هذه المبادلة قبل، فان المضروب يتحول إلى $l_{31}=1$ في $PA = LU$ (١)

مثال

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = U .$$

بمبادلات سطرية نستعيد LU ـ لكن الآن $l_{21}=2$, $l_{31}=1$:

$$PA = LU \quad \text{و} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad .$$

الخلاصة: إن نظاما جيدا للحذف الغاوسي يحتفظ بتسجيل المصفوفات L, U, P. تحمل هذه المصفوفات المعلومات التي أتت بالأصل من A ـ و تحتفظ بها بشكل أكثر قابلية للاستخدام. إنها تسمح بحل النظام $Ax = b$ من خلال نظامين مثلثيين. إنها المكافىء العملي للحساب الذي نجريه فيما بعد ـ لا يجاد معكوس مصفوفة وحل النظام $x = A^{-1}b$. س

تمـــاريـــن

١ ـ ٥ ـ ١ متى تكون مصفوفة مثلثية عليا غير شاذة ؟

١ ـ ٥ ـ ٢ من أجل الحذف، أي مضاعف للسطر الثاني يطرح من السطر الثالث

---

(١) قال لي بعض الجبريين: إذا وقعت P بين U و L، فان ذلك يبقي $l_{21}=1$ لكن ذلك متأخر جداً.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

ماسيكون المحور ؟ هل هناك ضرورة لمبادلة سطرية ؟

١-٥-٣ إضرب المصفوفة $L = E^{-1}F^{-1}G^{-1}$ الظاهرة في المعادلة (٦) بالمصفوفة $G\,F\,L$ الظاهرة في المعادلة (٣) .

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

إضرب أيضاً بالاتجاه المعاكس . ما هي الأجوبة ولماذا كانت كذلك ؟

١-٥-٤ طبق الحذف لتحصل على L , U من أجل كل من المصفوفات :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} \text{ و } A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ و } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}.$$

١-٥-٥ حلل A بالصورة LU واكتب النظام المثلثي الأعلى $Ux = c$ الذي يظهر بعد الحذف، من أجل :

$$Ax = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 6 & 9 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

١-٥-٦ أوجد E^{-1}, E^{8}, E^{2} إذا كان :

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}.$$

١-٥-٧ أوجد الجداءين FGH , HGF (حيث أهملت الأصفار في المصفوفات المثلثية العليا)

$$F = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 2 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

١-٥-٨ (برهان آخر للعلاقة $A = LU$) ينتج السطر الثالث من U عن السطر الثالث من A بطرح مضاعف للسطر الأول ومضاعف للسطر الثاني (من U!) :
السطر 3 من U = السطر 3 من Aـ l_{31} (السطر الأول من U)ـ l_{32} (السطر 2 من U) .

(أ) لماذا طرحت أسطر من U وليست أسطراً من A ؟ الجواب لأنه قد استخدم سطر محور . . . .

(ب) المعادلة الواردة أعلاه هي المعادلة التالية نفسها
السطر ٣ من A= l_{31}(السطر ١ من U)+l_{32} (السطر ٢ من U)+1 (السطر ٣ من)
أي قاعدة في ضرب المصفوفات (في ١ـد) تعطي تماماً جداء السطر ٣ من L في ؟

الأسطر الأخرى من LU تتوافق بصورة مشابهة مع أسطر A .

١-٥-٩ (أ) تحت أي شروط تكون A غير شاذة، إذا كانت A هي الجداء

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & & \\ & d_2 & \\ & & d_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ?$$

(ب) حل النظام $Ax = b$ منطلقاً من $Lc = b$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = b .$$

١-٥-١٠ (أ) لماذا نأخذ بصورة تقريبية لـ $n^2/2$ من خطوات ضرب - طرح لحل كل من $Lc = b$, $Ux = c$

(ب) ما هو عدد الخطوات التي يستخدمها الحذف من أجل حل ١٠ أنظمة

بمصفوفة المعاملات A نفسها وهي من النوع 60×60 ؟

١-٥-١١ حل النظام التالي دون أن تجري الضرب LU لايجاد A :

$$LUx = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

١-٥-١٢ كيف تمكنت ، من تحليل A على صورة جداء UL ، جداء مصفوفة مثلثية عليا بمصفوفة مثلثية دنيا ؟ هل هذان المضروبان مطابقان للمضروبين في الجداء $A = LU$ ؟

١-٥-١٣ حل بالحذف وباستخدام مبادلات سطرية عند الضرورة :

$$\begin{aligned} u + 4v + 2w &= -2 \\ -2u - 8v + 3w &= 32 \\ v + w &= 1 \end{aligned} \qquad \text{و} \qquad \begin{aligned} v + w &= 0 \\ u + v &= 0 \\ u+v+w &= 1 \end{aligned}$$

أي مصفوفة مبادلة نحتاج لذلك ؟

١-٥-١٤ اكتب مصفوفات المبادلة الست من النوع 3×3 بما في ذلك $P=I$. أظهر معكوساتها التي هي أيضاً مصفوفات مبادلة ـ إنها تحقق $PP^{-1}= I$ وتقع في القائمة ذاتها .

١-٥-١٥ أوجد التحليل $PA = LDU$ (وتحقق من ذلك)لكل من

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

١-٥-١٦ أوجد مصفوفة غير شاذة من النوع 4×4 تحتاج إلى ثلاث مبادلات سطرية لتبلغ نهاية الحذف . اجعل المثال مصفوفة مبادلة ، إذا كان ذلك ممكناً .

١-٥-١٧ بسبب تفضيل الجبريين فيما يتعلق بترتيب LPU، تجري المبادلات السطرية فقط في النهاية :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix} = PU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

مـاهي L في هـذه الحالـة ؟ على نقيض $PA = LU$ والمثال الذي ورد بعد ١-ى، تبقى المضاريب بأمكنتها (l_{21} هي 1 و l_{31} هي 2).

١-٥-١٨ إذكر أي نظام مما يلي يكون شاذاً وأيها يكون غير شاذ، وأي منها ليس له حل، حل واحد أو عدد غير منته من الحلول :

$$\begin{aligned} v + w &= 1 \\ u + v &= 1 \\ u + w &= 1 \end{aligned} \quad \text{و} \quad \begin{aligned} v - w &= 0 \\ u - v &= 0 \\ u - w &= 0 \end{aligned} \quad \text{و} \quad \begin{aligned} v - w &= 2 \\ u - v &= 2 \\ u - w &= 2 \end{aligned}$$

١-٥-١٩ ماهي قيـم a, b, c التي تؤدي إلى مبادلات سطرية وما هي التي تجعل المصفوفتين شاذتين؟

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ a & 8 & 3 \\ 0 & b & 5 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{bmatrix} c & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

١-٦ المعكوس والمنقول

معكوس مصفوفة من النـوع $n \times n$ هو مصفوفة أخرى من النـوع $n \times n$. إذا كانت المصفوفة الأولى A، فاننا نمثل معكوسها بالرمز A^{-1} (يلفظ معكوس A). الخاصة الأساسية سهلة : *إذا ضربت بـ A ثم بـ A^{-1}، فانك تعود إلى ما انطلقت منه* :

$$\text{إذا كان } Ax = b \text{ فان } A^{-1}b = x$$

لذا، فإن $A^{-1}Ax = x$. جداء المصفوفة A بالمصفوفة A^{-1} يساوي مصفوفة الوحدة. **لكن ليس لكل مصفوفة معكوس**. تبرز المشكلة عندما يكون Ax صفراً، لكن x لايساوي الصفر. ينقلنا المعكوس من Ax إلى x. لاتوجد مصفوفة إذا ضربت بمتجه صفري تعطي متجهاً غير صفري - في هذه الحالة A^{-1} لن تكون موجودة. هدفنا تعريف المعكوس وحسابه واستخدامه في الحالة التي يكون فيها موجوداً، ومن ثم التعرف على المصفوفات التي لها معكوسات.

١ ـ ك تكون المصفوفة A **قابلة للعكس**، إذا وجدت مصفوفة B تحقق كلاً من العلاقتين $AB = I, BA = I$. يوجد على الأكثر مصفوفة واحدة مثل B تدعى معكوس A، تمثل بالرمز $B = A^{-1}$:

$$A^{-1}A = I\ ,\ AA^{-1} = I \qquad (١)$$

ملاحظة (١) لايمكن أن يكون لمصفوفة معكوسان مختلفان لأنه إذا كان $BA = I$ و $AC = I$ فإننا نجد :

$$B = B\,(AC) = (BA)\,C = C.$$

إذا وجد معكوس يساري ومعكوس يميني (B مضروبة من اليمين و C من اليسار) فانهما متساويان .

ملاحظة (٢) معكوس A^{-1} هو A نفسها . إنهما يحققان المعادلة (١) .

ملاحظة (٣) مصفوفة من النوع 1×1 قابلة للعكس عندما لاتكون صفراً : إذا كان $A = [\,a\,]$ فان $A^{-1} = [1/a]$. يمكن كتابة معكوس مصفوفة من النوع 2×2 يصلح لجميع مصفوفات هذا النوع (شرط أن لايكون $ad - bc$ صفراً) :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

ملاحظة (٤) المصفوفة القطرية قابلة للعكس عندما لايكون أحد عناصر قطرها صفراً

إذاكان $A = \begin{bmatrix} d_1 & & \\ & \cdot & \\ & & d_n \end{bmatrix}$ فإن $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/d_1 & & \\ & \cdot & \\ & & 1/d_n \end{bmatrix}$

ملاحظة (٥) المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ذات النوع 2×2 غير قابلة للعكس . عمودا جداء $A \times B$ متساويان حتماً ولا يمكن أن يكونا عمودين في I، اللذين هما مختلفان .

(سنرى سبباً آخر أفضل من هذا لكون المصفوفة A هذه غير قابلة للعكس).

عندما تكون مصفوفتان قابلتين للجمع، فانه لايمكننا أن نعمل كثيراً فيما يتعلق بمعكوس $A+B$. يمكن أن يكون المجموع قابلاً للعكس أو لايكون بصورة مستقلة عن قابلية العكس لكل من A و B. بالمقابل، يعتبر معكوس جدائهما AB قاعدة أساسية في حساب المصفوفات. يقع الأمر ذاته للأعداد العادية : من العسير تبسيط $(a+b)^{-1}$. بينما يمكن تجزئة $1/ab$ إلى $1/a \times 1/b$. لكن من أجل المصفوفات، يلزم أن يكون ترتيب **المضاريب صحيحاً**- إذا كان $ABx=y$ فان $Bx=A^{-1}y$ و $x=B^{-1}A^{-1}y$ الأمر الذي يبين أن المعكوسات تظهر بترتيب معاكس.

١-ي لجداء مصفوفتين قابلتين للعكس معكوس، هو جداء معكوسي هاتين المصفوفتين بترتيب معاكس.

$$(AB)^{-1}=B^{-1}\ A^{-1} \qquad (٢)$$

البرهان. لكي نبرهن أن $B^{-1}A^{-1}$ هو معكوس AB، نشكل جداء هما ونستخدم الخاصة التجميعية لحذف الأقواس :

$$(AB)(B^{-1}A^{-1})=ABB^{-1}A^{-1}=A\,I\,A^{-1}=AA^{-1}=I$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB)=B^{-1}A^{-1}AB=B^{-1}\,I\,B=B^{-1}B=I.$$

قاعدة مشابهة صالحة من أجل ثلاث مصفوفات أو أكثر :

$$(ABC)^{-1}=C^{-1}B^{-1}A^{-1}.$$

لقد رأينا تأثير تغيير الترتيب منذ قليل عندما عكسنا المصفوفات الأولية E, F, G في الحذف لنعود من جديد من U إلى A. في الاتجاه التقدمي $GFEA$ هي U. في الاتجاه المعاكس $L=E^{-1}F^{-1}G^{-1}$ هي جداء المعكوسات. بما أن G هي آخر مايطبق على A، فان G^{-1} تأتي أولاً.

يمكن ضرب معادلة مثل $GFEA=U$ بالمصفوفة G^{-1} (من اليسار) أو بالمصفوفة A^{-1} (من اليمين) أو بالمصفوفة U^{-1} (في كل من الطرفين). إذا احتجنا لـ A فإنه يمكن أن يدعى أنها $U^{-1}GFE$. رجاءً تحقق أنه من السهل بيان خطأ ذلك.

حساب A^{-1}

لننظر في المعادلة $AA^{-1} = I$. **إذا أخذنا عموداً في كل مرة ،** فان هذه المعادلة تعين أعمدة A^{-1} . إذا ضرب العمود الأول من A^{-1} بالمصفوفة A نحصل على العمود الأول من مصفوفة الوحدة : $Ax_1 = e_1$. بصورة مشابهة $Ax_2 = e_2$, $Ax_3 = e_3$ ؛ المتجهات e هي أعمدة I. في مثال من النوع 3×3 ، $A \times A^{-1}$ هي :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (٣)$$

لذا ، يكون لدينا ثلاثة أنظمة معادلات (أو n نظاماً) لكل منها مصفوفة المعاملات A ذاتها . الأطراف اليمنى تختلف ، ولكن من الممكن إجراء الحذف على جميع *الأنظمة في الوقت ذاته* . نسمي هذه الطريقة *طريقة غاوس-جوردان* . Gauss -Gordan . عوضاً عن التوقف عند U والانطلاق بالتعويض التراجعي ، نتابع بطرح مضاعفات سطر من *الأسطر التي تعلوه* لنحصل على أصفار فوق القطر كما حصل تحته ، وعندما نتوصل إلى مصفوفة الوحدة ، نكون قد وجدنا A^{-1} .

المثال التالي يحتفظ بالأعمدة e_1, e_2, e_3 ويعمل على أسطر ذوات ستة عناصر :

مثال لطريقة غاوس-جوردان لإيجاد A^{-1}

$$[\,A \;\; e_1 \;\; e_2 \;\; e_3\,] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 7 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [\,U \;\; L^{-1}\,].$$

بذلك ينتهي الحذف التقدمي. في المصفوفة الأخيرة، تعطى الأعمدة الثلاثة الأوائل المصفوفة المثلثية العليا المعتادة U. أما الأعمدة الثلاثة الأخرى التي هي الأطراف اليمنى الثلاثة وقد هيئت من أجل التعويض-التراجعي، فانها تكون المصفوفة L^{-1} نفسها (إن ذلك نتيجة تطبيق العمليات الأولية على مصفوفة الوحدة: $L^{-1}=GFE$). النصف الأول من الحذف انطلق من A إلى U، والآن يذهب النصف الثاني من U إلى I، محدثاً أصفاراً فوق المحاور في المصفوفة الأخيرة وهكذا نصل إلى A^{-1}:

$$[\,U \quad L^{-1}\,] \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -8 & 0 & -4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & \frac{12}{8} & \frac{5}{8} & -\frac{6}{8} \\ 0 & -8 & 0 & -4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{12}{16} & -\frac{5}{16} & -\frac{6}{16} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{8} & -\frac{3}{8} & -\frac{2}{8} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [I \quad A^{-1}].$$

في الخطوة الأخيرة، قسمنا على المحاور. تحولت مصفوفة المعاملات الواقعة في النصف الأيسر إلى مصفوفة الوحدة. بما أن A تحولت إلى I، فان العمليات ذاتها على النصف الأيمن تحول I إلى A^{-1}. بذلك نكون قد حسبنا المعكوس.

ملاحظة من أجل المستقبل: يمكنك أن تلاحظ المحددة 16 - الظاهرة في المقامات في A^{-1}. إنها جداء المحاور (1) (8-) (2) وهي تدخل في النهاية عندما نقسم الأسطر على المحاور.

رغم أن هذا نجاح في حساب A^{-1}، فانني لاأنصح بذلك. إنني أقبل أن المعكوس يحل $Ax=b$ بخطوة واحدة بدلاً من إثنتين:

$Lc = b$, $Ux = c$ عوضاً عن $x = A^{-1}b$

يمكننا أن نذهب إلى أبعد من ذلك ونكتب $c = L^{-1}b$ و $x = U^{-1}c = U^{-1}L^{-1}b$. لكنني لم أكتبه بصورة مفصلة، وفي الحسابات الحالية لن نكوّن المصفوفتين $U^{-1}L^{-1}$. سيكون هناك تبذير في الوقت لأنه سيكون علينا أن نجري العمليات التي عددها $n^2/2$ نفسها لضرب c بـ U^{-1} أو b بـ L^{-1} . ملاحظة مشابهة تطبق على A^{-1} ؛ يحتاج الضرب $A^{-1}b$ إلى n^2 خطوة. **إنه الحل الذي نبغيه وليست جميع عناصر المعكوس.**

ملاحظة ١ : خارج عن الغرابة، سنقوم بتعداد العمليات الضرورية لايجاد A^{-1}. إن التعداد المعتاد يعطي من أجل كل طرف أيمن جديد n^2 عملية نصفها من أجل الحذف التقدمي ونصفها الآخر من أجل التعويض التراجعي. لذا فمن أجل n من الأطراف اليمنى المختلفة، نحتاج إلى n^3 من العمليات، بالإضافة إلى $n^3/3$ من أجل المصفوفة A نفسها، فيكون المجموع $4n^3/3$.

هذه النتيجة، مع ذلك، عالية نوعاً ما، وذلك بسبب الشكل الخاص للأطراف اليمنى e_j. في الحذف التقدمي سيكون التغيير ضرورياً فقط، تحت العدد واحد الذي يشغل الموضع j من العمود. هذا الجزء مكون من $n-j$ مركبة فقط لذا فان التعداد من أجل e_j قد تحول فعلاً إلى $(n-j)^2/2$. إذا جمعنا من أجل كل j فان المجموع المتعلق بالحذف التقدمي سيكون $n^3/6$. هذا العدد يجب أن نضيف إليه : $n^3/3$ وهو عدد العمليات التي طبقت على A، بالاضافة إلى $n(n^2/2)$ عدد العمليات الضرورية لخطوات التعويض التراجعي التي تؤدي في النهاية لحساب قيم x_j، سواءً أجري ذلك بشكل متفرق أودفعة واحدة في طريقة غاوس-جوردان . ويكون عدد العمليات الكلي اللازم لحساب A^{-1} هو :

$$\frac{n^3}{6} + \frac{n^3}{3} + n\left(\frac{n^2}{2}\right) = n^3 \ .$$

إن هذا العدد منخفض بصورة واضحة . في الحقيقة بما أن ضرب مصفوفتين مربعتين من النوع $n\times n$ يحتاج إلى n^3 خطوة فان عدد العمليات اللازمة لحساب A^2 هو العدد نفسه الضروري لحساب A^{-1}. يظهر هذا الأمر وكأنه غير معقول (إن حساب A^3 يحتاج ، كما يظهر لنا ، إلى ضعفي ذلك) . في جميع الأحوال ، إذا كانت A^{-1} غير ضرورية فانه يفضل عدم حسابها .

ملاحظة ٢ : في حسابات طريقة غاوس - جوردان قطعنا قدماً الطريق كاملاً المؤدي إلى U ، قبل أن ننطلق إلى الجهة المعاكسة لاحداث أصفار فوق القطر . إن ذلك يشبه الحذف الغاوسي ، لكن تراتيب أخرى ممكنة . كان بامكاننا استخدام المحور الثاني ، لايجاد صفر فوقه كما هو الحال تحته . ولكن ذلك بطيء . في ذلك الوقت كان السطر الثاني ممتلئاً فعلاً ، لأنه كان يحتوي قبل النهاية أصفاراً نتجت عن المبادلات السطرية الصاعدة إلى الأعلى ، حيث أخذت مكانها مسبقاً .

قابل للعكس = غير شاذ

أخيراً نريد أن نعرف ماهي المصفوفة القابلة للعكس وما هي المصفوفة غير القابلة لذلك . إن هذه المسألة مهمة جداً لدرجة أن لها أجوبة متعددة . بالفعل ، كل فصل من الفصول الخمسة القادمة سيعطي طريقة لاختبار قابلية العكس مختلفة (لكنها مكافئة) . و يمكن في ، بعض الأحيان ، أن تمتد الطريقة لتشمل المصفوفات المستطيلة والمعكوس من جهة واحدة ؛ الفصل الثاني يتطلب ضرورة كون الأسطر مستقلة خطياً ، أو الأعمدة مستقلة . الفصل الثالث يعكس A^TA أو AA^T - تتعرض بقية الفصول فقط للمصفوفات المربعة وتنظر فقط في تلك التي **محددتها لاتساوي الصفر أو ذات القيم الخاصة غير الصفرية أو ذات المحاور غير الصفرية**. الاختيار الأخير هو الذي استخدمناه في عملية الحذف ونريد أن نبرهن (في عدد قليل من المقاطع النظرية) أنها طريقة ناجحة .

لنفرض أن هناك مصفوفة ذات مجموعة كاملة من المحاور - إنها بالتعريف

غير شاذة (نذكر من جديد أن المحاور ليست أصفاراً.) تعطي المعادلة $AA^{-1}=I$، n نظاماً منفصلاً $Ax_i=e_i$ من أجل أعمدة A^{-1}، ويمكن حلها ـ بالحذف أو بطريقة غاوس ـ جوردان. يمكن أن يكون هناك ضرورة لمبادلات سطرية، لكن أعمدة A^{-1} هي الوحيدة التي تتعين. بقول دقيق، علينا أن نبين أن المصفوفة A^{-1} بهذه الأعمدة هي أيضاً

معكوس ـ يساري. حل $AA^{-1}=1$ يؤدي بالوقت ذاته إلى حل $A^{-1}A=I$، لكن كيف يجري ذلك؟ ليس ذلك مسألة تافهة. إحدى الطرائق تنتظر الباب الثاني: معكوس من جانب واحد لمصفوفة مربعة هو بصورة آلية معكوس من جانبين. لكن، يمكننا أن نعمل دون الباب الثاني بملاحظة بسيطة: **كل خطوة في طريقة غاوس ـ جوردان تقوم على عملية ضرب من اليسار بمصفوفة أولية.** لقد استخدمنا ثلاثة أنواع من المصفوفات الأولية:

١) E_{ij} لطرح مضاعف l للسطر j من السطر i

٢) P_{ij} للمبادلة بين السطرين i و j

٣) D (أو D^{-1}) لتقسيم جميع الأسطر على محاورها.

طريقة غاوس ـ جوردان هي في الحقيقة متتالية ضخمة من عمليات الضرب المصفوفي:

$$(D^{-1}...E....B....E)A=I \qquad (٤)$$

هذه المصفوفة الواقعة داخل القوسين عن يسار A هي، بالبداهة معكوس يساري. إنه موجود وإنه يساوي المعكوس الأيمن وفق الملاحظة (١) لذا **كل مصفوفة غير شاذة قابلة للعكس.**

العكس صحيح أيضاً: **كل مصفوفة قابلة للعكس هي مصفوفة غير شاذة.** إذا كانت A قابلة للعكس، فان لها n محوراً. ذلك واضح في الحالة القصوى: اذا كان لـA معكوس، فمن غير الممكن أن يكون فيها عمود كله أصفار. (لايمكن أبداً للمعكوس

أن ينتج عموداً من مصفوفة الوحدة، بضربه بعمود صفري). في الحالة الأقل تطرفاً، نفرض أن الحذف انطلق من مصفوفة قابلة للعكس A لكنها محطمة مثل :

$$A' = \begin{bmatrix} d_1 & x & x & x & x \\ 0 & d_2 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x & x \end{bmatrix}.$$

لايمكن أن يكون لهذه المصفوفة معكوس مهما كانت الأعداد x . أحد البراهين هو استخدام عمليات عمود (للمرة الأولى) لجعل جميع عناصر العمود الثالث أصفاراً. بطرح مضاعف مناسب للعمود ٢ ثم مضاعف مناسب للعمود ١ (من العمود ٣)، نصل إلى مصفوفة غير قابلة للعكس فعلاً. لذا، فان المصفوفة الأصلية غير قابلة للعكس، نقع هنا في تناقض. عندما ننطلق بمصفوفة قابلة للعكس، فانه لايمكن للحذف أن يفشل.

الحذف يعطي اختباراً موثوقاً لوجود A^{-1} : يجب أن يكون هناك n محوراً.

تكون مصفوفة مربعة قابلة للعكس إذا وإذا فقط كانت غير شاذة.

سيستخدم الفصل الثاني عمليات سطر على A ليحصل على سطر أصفار وعلى النتيجة ذاتها. من أجل بعض الأطراف اليمنى لايكون للنظام $Ax = b$ حل. من أجل مصفوفة قابلة للعكس، يوجد دائماً الحل الوحيد $x = A^{-1}b$

المنقول

نحتاج إلى مصفوفة أخرى وهي لحسن الحظ أبسط كثيراً من المعكوس. تسمى هذه المصفوفة منقول A ، وتمثل بالرمز A^T . أعمدتها على الترتيب أسطر A ـ السطر ذو الرقم i من A يصبح العمود ذا الرقم i في A^T. لذا فإنه يمكن تكوينها دون أية حسابات :

إذا كان $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ فإن $A^{T} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

بالوقت ذاته ، أعمدة A تصبح أسطراً للمصفوفة A^T. إذا كانت A مصفوفة من النوع $m \times n$ فان A^T من النوع $n \times m$. إن التأثير النهائي هو قلب المصفوفة حول قطرها الرئيسي بحيث ينتج العنصر الذي يقع في السطر i والعمود j من A^T عن العنصر الذي يقع في السطر j والعمود i في A :

$$(A^T)_{ij} = A_{ji} . \qquad (٥)$$

إن منقول مصفوفة مثلثية دنيا هو مصفوفة مثلثية عليا وإن نقل A^T يعيد إلينا A .

لنفرض الآن أن لدينا مصفوفتين Bو A فاذا جمعناهما ثم نقلنا الناتج فاننا نحصل على الشيء ذاته فيما لو نقلنا أولاً ثم جمعنا : $(A+B)^T$ هو A^T+B^T نفسه . لكن ليس من الواضح ماهو منقول الجداء AB و منقول المعكوس A^{-1}، إليك القانونين الأساسيين في هذه الفقرة :

١ـم (١) منقول AB هو $(AB)^T=B^TA^T$

(٢) منقول المعكوس هو $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

نلاحظ أن القانون المتعلق بـ$(AB)^T$ يشبه القانون المتعلق بـ$(AB)^{-1}$ ، في كل من الحالتين نقلب الترتيب ونحصل على $B^{-1}A^{-1}$ و B^TA^T . لقد كان البرهان المتعلق بالمعكوس سهلاً ولكن الأمر يتطلب صبراً غير طبيعي من أجل نقل الجداء . السطر الأول من $(AB)^T$ هو العمود الأول من AB، وهذا يعني أن أعمدة A قد حملت بالعمود الأول من B . إذا بقينا مع الأسطر فان ذلك يكافىء أسطر A^T محملة بالسطر الأول من B^T وهذا بالتأكيد هو السطر الأول من B^TA^T .

الأسطر الأخرى من $(AB)^T$ ومن B^TA^T هي أيضاً متفقة

مثال

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B^{T}A^{T} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 5 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

لكي نتوصل إلى القانون المتعلق بـ $(A^{-1})^T$ ، ننطلق من العلاقتين $A^{-1}A = I$ و $AA^{-1} = I$ و نأخذ المنقول لكل من هاتين العلاقتين . من ناحية أولى $I^T = I$. من ناحية ثانية نعلم منقول حاصل الضرب من (١) .

$$(A^{-1})^{T} A^{T} = I \quad \text{و} \quad A^{T} (A^{-1})^{T} = I \qquad (٦)$$

وهذا يجعل $(A^{-1})^T$ معكوس A^T وبذلك نكون قد برهنا (٢) .

بعد أن أقمنا هاتين القاعدتين يمكننا أن نقدم صنفاً خاصاً من المصفوفات ، يحتمل أن يكون أهم صنف من أصنافها . **المصفوفة** *المتناظرة هي المصفوفة التي تساوي منقولها :* $A^T = A$. المصفوفة مربعة بالضرورة وكل عنصر فيها يساوي نظيره بالنسبة للقطر الرئيسي أو بصورة أخرى : $a_{ij} = a_{ji}$ و إليك المثالين البسيطين :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \text{ و } D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

ليس من الضروري أن تكون المصفوفة المتناظرة قابلة للعكس ؛ ومن الممكن أن تكون مصفوفة صفرية . ومع ذلك إذا كانت A^{-1} **موجودة** *فانها تكون متناظرة أيضاً .* *ينتج* **ذلك** *مباشرة من القانون (٢) الوارد أعلاه* **وذلك لأن** *منقول* A^{-1} *يساوي دوماً* $(A^{-1})^T$ ؛ من أجل مصفوفة متناظرة يساوي ذلك تماماً A^{-1} . لذا ، فان A^{-1} تساوي منقولها ، في هذه الحالة ، وهي متناظرة عندما تكون A كذلك .

تظهر المصفوفات المتناظرة في كل موضوع تكون قوانينه موافقة لذلك : «لكل فعل ردفعل يساويه ويعاكسه» والعنصر الذي يعطي تأثير i على j يكافيء الفعل الناتج

عن تأثير j في i . سنرى هذا التناظر في البند القادم عند دراسة المعادلات التفاضلية . سنبقى هنا مع الحذف الغاوسي وسنهتم بمعرفة تأثير التناظر . بصورة أساسية إنه يقطع العمل إلى نصفين . الحسابات لما فوق القطر نسخة عن الحسابات المتعلقة بما تحته كما أن المصفوفة المثلثية العليا U تتعين تماماً بالمصفوفة المثلثية الدنيا L :

١ـ ل إذا كانت A متناظرة وإذا كان من الممكن تحليلها على الصورة $A = LDU$، ولم يكن هناك تغيير أسطر يشوه التناظر ، فان المصفوفة المثلثية العليا U هي منقول المصفوفة المثلثية الدنيا L . يصبح التحليل $A = LDL^T$.

لبرهان ماتقدم ، نأخذ منقول $A = LDU$؛ يظهر المنقول بترتيب معاكس ليعطي $A^T = U^T D^T L^T$. بما أن A متناظرة فانها تساوي A^T، لذا ، لدينا الآن تحليلان لـ A وفق مصفوفة مثلثية دنيا في مصفوفة قطرية في مصفوفة مثلثية عليا (L^T مصفوفة مثلثية عليا عناصر قطرها تساوي الواحد وهي مشابهة تماماً للمصفوفة U). استناداً إلى ١ -ل، فإن مثل هذا التحليل وحيد . لذلك فان على L^T أن تكون مطابقة لـ U . وهذا ما ينهي البرهان .

مثال (A متناظرة و $L^T = U$)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

بعد كل خطوة من الحذف ، تبقى المصفوفة الواقعة في القرنة الدنيا واليمنى متناظرة ـ كما هي الحال بعد الخطوة الأولى :

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a - \dfrac{b^2}{a} & e - \dfrac{bc}{a} \\ 0 & e - \dfrac{bc}{a} & f - \dfrac{c^2}{a} \end{bmatrix}.$$

يقطع عمل الحذف، بصورة أساسية، إلى نصفين بسبب التناظر، من $n^3/3$ إلى $n^3/6$. ليس هناك حاجة لتخزين عناصر طرفي القطر أو تخزين L , U معاً.

تمـــاريـــن

١-٦-١ أوجد المعكوسات (لاضرورة لأنظمة خاصة) للمصفوفات :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix},\ A_3 = \begin{bmatrix} \cos\Theta & -\sin\Theta \\ \sin\Theta & \cos\Theta \end{bmatrix}.$$

١-٦-٢ (أ) أوجد معكوسات مصفوفات المبادلة

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ و } P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(ب) فسر لماذا، من أجل مصفوفات المبادلة، P^{-1} تساوي دوماً P^T وذلك ببيان أن الوحدان واقعة في المواضع المناسبة لتعطي $PP^T=I$.

١-٦-٣ من العلاقة $AB=C$ أوجد قانوناً لـ A^{-1}. قم بالأمر ذاته انطلاقاً من $PA=LU$.

١-٦-٤ (أ) إذا كانت A قابلة للعكس و $AB=AC$، برهن بسرعة أن $B=C$.

(ب) إذا كانت $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$، أوجد مثالاً يكون من أجله $AB=AC$ لكن $B \neq C$.

١-٦-٥ إذا كان معكوس A^2 هو B برهن أن معكوس A هو AB. (لذا، تكون A قابلة للعكس عندما تكون A^2 قابلة للعكس).

١-٦-٦ استخدم طريقة غاوس - جوردان لعكس

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix},\ A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

١-٦-٧ أوجد مصفوفة من النوع 2×2 غير $A=-I$ و $A=I$ بحيث يكون معكوسها مطابقاً لها : $A^2=I$.

١-٦-٨ برهن أنه ليس للمصفوفة $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ معكوس وذلك بمحاولة حل :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

١-٦-٩ عندما يفشل الحذف من أجل مصفوفة شاذة مثل

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

برهن أنه لايمكن أن تكون A قابلة للعكس. جداء السطر الثالث من A^{-1} مضروباً

بـ A، يجب أن يعطي السطر الثالث من $A^{-1}A=I$. ما هو الباعث لهذه الاستحال؟

١-٦-١٠ أوجد المعكوسات (بأي طريقة مقبولة) للمصفوفات :

$$A_1=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ A_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix},\ A_3=\begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{bmatrix}.$$

١-٦-١١ أوجد أمثلة لـ A, B بحيث يكون :

(١) $A+B$ غير قابلة للعكس رغم أن A, B قابلتان لذلك

(٢) $A+B$ قابلة للعكس رغم أن A, B غير قابلتين لذلك

(٣) كل من $A, B, A+B$ قابلة للعكس.

في الحالة الأخيرة، استخدم $A^{-1}(A+B)B^{-1}=B^{-1}+A^{-1}$ لبيان أن $B^{-1}+A^{-1}$ قابلة للعكس أيضاً ـ وأوجد قانوناً لمعكوسها.

١-٦-١٢ ما هي خواص المصفوفة A التي تبقى محفوظة من قبل معكوسها (بفرض A^{-1} موجودة) (١) A مثلثية (٢) A متناظرة (٣) A ثلاثية الأقطار (٤) جميع عناصرها أعداد صحيحة (٥) جميع عناصرها كسور (يدخل في ذلك الأعداد الصحيحة مثل 3/1).

١-٦-١٣ إذا كان $A=\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$، احسب A^TB, B^TA, AB^T, BA^T.

١-٦-١٤ (مهم) برهن، من أجل المصفوفات المستطيلة، أن كلاً من A^TA , AA^T مصفوفة متناظرة دوماً. بين بمثال أنه يمكن أن لاتكونا متساويتين، أيضاً من أجل مصفوفات مربعة.

١-٦-١٥ برهن، من أجل أي مصفوفة مربعة B، أن $A=B+B^T$ دائماً متناظرة وأن $K=B-B^T$ دوماً *متناظرة تخالفية*. الأمر الذي يعني أن $K^T=-K$. أوجد هذه المصفوفة إذا كانت $B=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$، واكتب B كمجموع مصفوفة متناظرة ومصفوفة متناظرة تخالفية.

١-٦-١٦ (أ) ما هو عدد العناصر المستقلة في مصفوفة متناظرة من المرتبة n؟

(ب) ما هو عدد العناصر المستقلة في مصفوفةمتناظرة ـ تخالفية من المرتبةn؟

١-٦-١٧ (أ) إذا كانت $A=LDU$، بوحدان على قطري L,U، ما هو التحليل المقابل لـ A^T؟ لاحظ أن A , A^T (كمصفوفتين مربعتين بدون حاجة لمبادلات سطرية) تشتركان بالمحاور ذاتها.

(ب) ما هو النظام المثلثي الذي يعطيه حل النظام $A^Ty=b$؟

١-٦-١٨ إذا كان $A=L_1D_1U_1, A=L_2D_2U_2$ برهن أن $L_1=L_2, D_1=D_2, U_1=U_2$. إذاكانت A قابلة للعكس، فان التحليل وحيد.

(أ) وضح المعادلة $L_1^{-1} L_2 D_2 = D_1 U_1 U_2^{-1}$ وفسر لماذا يكون أحد الطرفين مصفوفة مثلثية دنيا بينما الطرف الآخر مثلثية عليا.

(ب) قارن القطرين الرئيسيين في هذه المعادلة ثم قارن العناصر غير القطرية.

١-٦-١٩ تحت أية شروط تتعلق بالعناصر، تكون A قابلة للعكس، إذا كان

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & 0 \\ f & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ أو } A = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix}?$$

١-٦-٢٠ إذا حققت المصفوفة A ذات النوع 3×3 كون السطر١ + السطر٢ = السطر٣، برهن أنه من غير الممكن حل $Ax = [\,1 \;\; 2 \;\; 4\,]^T$. هل A قابلة للعكس؟

١-٦-٢١ احسب التحليل المتناظر LDL^T للمصفوفتين

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 12 & 18 \\ 5 & 18 & 30 \end{bmatrix} \text{ و } A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}.$$

١-٦-٢٢ أوجد المعكوس للمصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

١-٦-٢٣ إذا كانت A, B مصفوفتين مربعتين، برهن أن $I - AB$ قابلة للعكس إذا كانت $I - BA$ قابلة للعكس . انطلق من : $B(I - AB) = (I - BA)B$

١ - ٧ مصفوفات خاصة وتطبيقاتها

سيكون أمامنا في هذا البند هدفان . الأول هو شرح حالة واقعية يظهر فيها نظام كبير من المعادلات الخطية . حتى الآن لم يذكر هذا الكتاب أي تطبيقات من هذا النوع . في الحقيقة ، إن دراسة مسألة كبيرة وواقعية بصورة تامة ، سواء في الإنشاءات الهندسية أو في الاقتصاد ، قد يقودنا إلى متاهات عملية عميقة . لكن هناك تطبيق مألوف ومهم لايحتاج إلى كثير من التحضير .

الهدف الثاني هو التوضيح ، بهذا التطبيق ذاته ، للخواص الأساسية التي تتمتع بها عادة مصفوفة المعاملات . ليس من المعتاد مواجهه مصفوفة كبيرة بحيث تظهر وكأنها قد صيغت بصورة عشوائية ، بل سيكون على الأغلب هناك نموذج ظاهر للنظرة الأولى ـ غالباً مايكون نموذج تناظر فيه كثيرمن العناصر الصفرية . في هذه الحالة الأخيرة ، لما كانت مثل هذه المصفوفة غير المكتظة تحوي عدداً من المعلومات يقل كثيراً عن n^2 ، لذا فمن المتوقع أن تكون العمليات الحسابية الواجب اجراء ها أكثر سهولة من حالة مصفوفة مليئة . سوف ننظر بصورة خاصة إلى خواص *المصفوفة الحزامية* وهي التي تتجمع فيها العناصر غير الصفرية في جوار القطر الرئيسي وذلك لرؤية تأثير مثل هذه الخواص على طريقة الحذف . في الواقع إننا سننظر في مصفوفة حزامية خاصة .

يمكن رؤية هذه المصفوفة في المعادلة (٦) . الفقرة التالية ستبين التطبيق .

ينتج مثالنا عن إبدال مسألة متصلة بأخرى منقطعة . يمكن للمسألة المتصلة أن يكون لها عدد غير منته من المجاهيل (هي قيم $u(x)$ عند كل x) ولايمكن حلها بصورة صحيحة بالحاسوب . لذا سيجري حل ذلك بشكل تقريبي بوساطة مسألة منقطعة . كمسألة بسيطة ولكنها تبقى مسألة متصلة نموذجية ، وقع اختيارنا على المعادلة التفاضلية :

$$\frac{d^2u}{ax^2} = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1. \qquad (١)$$

هذه المعادلة معادلة تفاضلية خطية مجهولها u وهي ذات حد غير متجانس f. في هذه المسألة كثير من الاعتباطية وذلك لأنه يمكن اضافة تركيب من الشكل $C + Dx$ إلى

حل u فيكون المجموع حلاً آخر اذ أنه ليس للمشتقة الثانية للتركيب $C + Dx$ أي تأثير في المعادلة. يمكن إزالة عدم التعيين الناشىء عن الوسيطين C , D بإضافة 'شرط حدي' عند كل طرف من طرفي الفترة :

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0 \qquad (٢)$$

ينتج عن ذلك مسألة ذات *قيمتين حديتين في نقطتين*. إنها لاتصف قضية خيالية بل تصف مثلاً حالة ثابتة لحادثة توزيع الحرارة في قضيب يقع أحد طرفيه في الدرجة المئوية 0^{0} ويخضع إلى توزيع منبع حراري $f(x)$.

لنذكر أن هدفنا هو ايجاد مسألة منقطعة أو ذات عدد أبعاد محدود، بقول آخر ايجاد مسألة جبر خطي. لهذا السبب لايمكننا أن نقبل إلا عدداً محدوداً من المعلومات حول f، مثل قيمه عند النقاط التي تقع، فيما بينها، على أبعاد متساوية. $x = h, x = 2h$ $, ..., x = nh$ وسيكون أي ناتج لحسابنا قيماً تقريبية $u_1, ..., u_n$ للحل الحقيقي عند هذه النقاط. لقد سبق أن أعطينا القيمتين الحقيقيتين $u_0 = 0, u_{n+1} = 0$ عند الطرفين $x = 1 = (n+1)h$ و $x = 0$.

السؤال الأول هو كيف تستبدل المشتقة d^2u/dx^2 ؟ بما أن كل مشتقة هي نهاية قسمة فرقين، لذا يمكن أخذ ذلك بصورة تقريبية والتوقف عند قيمة محددة للبعد h دون أن ندع h (أو Δx) يسعى إلى الصفر. من أجل المشتقة الأولى يوجد اختيارات متعددة:

$$\frac{du}{dx} \approx \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \quad \text{أو} \quad \frac{u(x) - u(x-h)}{h} \quad \text{أو} \quad \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h}. \qquad (٣)$$

الاختيار الأخير هو المفضل عادة بسبب التناظر حول x، في الواقع هو الأكثر دقة. من أجل المشتقة الثانية يوجد تركيب واحد فقط تستخدم فيه القيم عند $x, x \pm h$:

$$\frac{d^2u}{dx^2} \approx \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2}. \qquad (٤)$$

تمتاز هذه الصيغة أيضاً بكونها متناظرة حول x . نعيد، إن الطرف الأيمن يقترب، في الحقيقة، من d^2u/dx^2 عندما $h \longrightarrow 0$ ولكن علينا أن نتوقف عندقيمة موجبة لـ h. عند نقطة نموذجية $x = jh$ من الشبكة، يستعاض الآن عن المعادلة التفاضلية $d^2u/dx^2 = f(x)$ ، بهذه المعادلة المنفصلة المشابهة (٤) ؛ بعد ضرب الطرفين بـ h^2 نجد :

$$-u_{j+1} + 2u_j - u_{j-1} = h^2 f(jh). \qquad (٥)$$

توجد n معادلة مشابهة تماماً لهذا الشكل واحدة لكل قيمة $j = 1, ..., n$. المعادلة الأولى والأخيرة تحويان القيمتين u_0 و u_{n+1} وهما غير مجهولتين ـ إنهما يمثلان الشرطين الحديين وقد نقلا إلى الطرف الأيمن للمعادلة ليقوما بدور الحد غير المتجانس (أو على الأقل، يمكنهما أن يكونا كذلك إذا لم يكونا معروفين أنهما يساويان الصفر) . من السهل فهم المعادلة (٥) على أنها معادلة حالة ـ ثابتة حيث يتوازن التدفق $(u_j - u_{j+1})$ الآتي من اليمين والتدفق $(u_j - u_{j-1})$ الآتي من اليسار مع الضياع $h^2f(jh)$ في المركز .

يمكن تصور بناء المعادلات (٥) بصورة أفضل إذا كتبت بالشكل المصفوفي $Au = b$ سنختار $h = 1/6$ أو $n = 5$:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = h^2 \begin{bmatrix} f(h) \\ f(2h) \\ f(3h) \\ f(4h) \\ f(5h) \end{bmatrix}. \qquad (٦)$$

منذ الآن، وحتى إشعار آخر، *علينا أن نتعامل مع المعادلة* (٦) وليس من الضروري النظر إلى الخلف لمعرفة مصدر هذه المسألة . مهما يكن الأمر، فقد كونا صنفاً من مصفوفات المعاملات من المرتبة n يمكن أن تكون كبيرة جداً، ولكنها كما يظهر بعيدة عن أن تكون عشوائية . للمصفوفة A خواص مختلفة، ثلاث منها أساسية :

(١) **المصفوفة ثلاثية الأقطار .** تقع جميع عناصرها غير الصفرية على القطر الرئيسي وعلى القطرين المجاورين له . أما خارج هذا الحزام المحدود فلا يوجد إلا أصفار $a_{ij} = 0$ إذا كان $|i-j| > 1$. ستقدم هذه الأصفار سهولة هائلة في عملية الحذف .

(٢) **المصفوفة متناظرة .** كل عنصر a_{ij} يساوي نظيره a_{ji}، بالنسبة للقطر الرئيسي أي $A^T = A$. لذا ستكون المصفوفة المثلثية العليا U هي منقول المصفوفة المثلثية الدنيا L، وسيكون التحليل النهائي : $A = LDL^T$. تناظر المصفوفة يعكس التناظر الموجودفي المعادلة التفاضلية . فلو كانت فيها مشتقة فردية مثل du/dx أو d^3u/dx^3، لما كانت A متناظرة .

(٣) **المصفوفة معرفة إيجابياً .** هذه الصفة الإضافية تتحقق عند حساب المحاور وهي تشير إلى أن **المحاور موجبة** . سنقدم في الباب السادس تعاريف متعددة ومتكافئة للمصفوفة المعرفة ايجابياً، ليس لمعظمها علاقة بالحذف ؛ إلا أن للتناظر ولكون المحاور موجبة، نتيجة مباشرة واحدة : التغيير السطري غير ضروري من الناحية النظرية والناحية العملية . هذا مخالف لحال المصفوفة A الظاهرة في نهاية هذا البند والتي هي غير معرفة ايجابياً . بدون تغييرات سطرية ستكون شديدة الحساسية للتدوير .

لنعد إلى الحقيقة الأساسية وهي كون A ثلاثية الأقطار . ماأثر ذلك على الحذف ؟ لنفرض، في البداية، أننا نفذنا الخطوة الأولى من الحذف وهي جعل ماتحت المحور الأول أصفاراً :

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

إذا ماقارنا ذلك مع مصفوفة عادية من النوع 5×5 فاننا نلاحظ وجود تبسيطين أساسيين :

(أ) لم يكن **سوى عنصر واحد غير صفري** واقعاً تحت المحور.

(ب) هذه العملية الوحيدة قد نفذت على سطر قصير جداً. بعد تعيين المعامل الصحيح $l_{21}=-1/2$، فاننا نحتاج *إلى عملية واحدة (ضرب ـ طرح) فقط*.

لقد تسهلت الخطوة الأولى كثيراً بسبب وجود الأصفار في السطر الأول والعمود الأول. علاوة على ذلك، *فان الشكل الثلاثي* الأقطار محفوظ خلال الحذف (عند عدم الحاجة لتغييرات سطرية).

(جـ) تقبل الخطوة الثانية من الحذف، شأنها في ذلك شأن الخطوات التالية، التبسيطين (أ) و (ب).

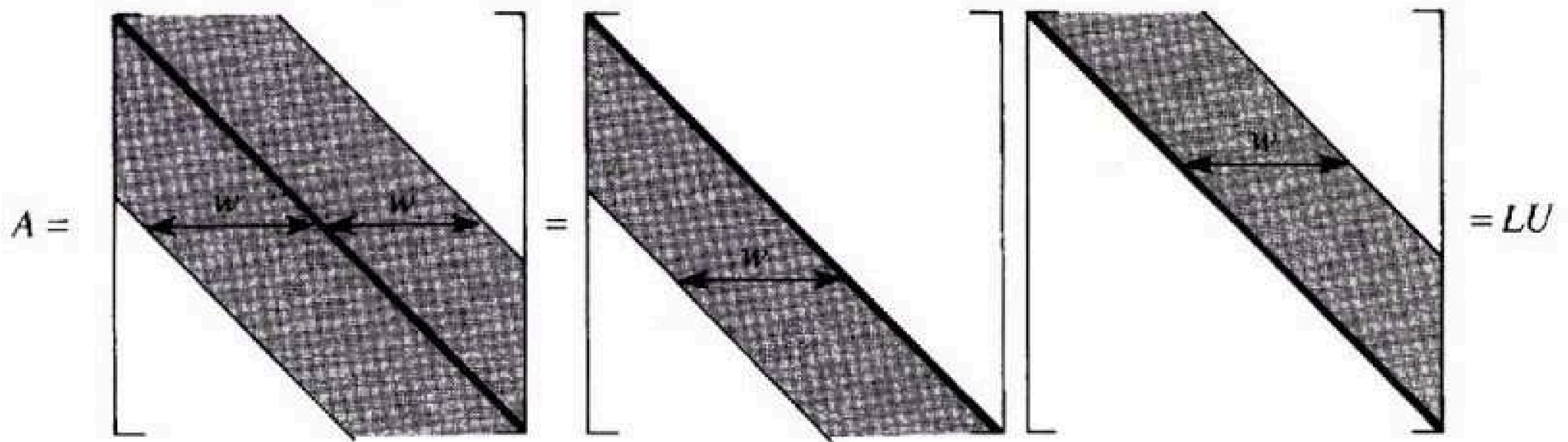
يمكننا أن نجمل النتيجة النهائية بطرق مختلفة. إن أفضل مظهر لذلك هو النظر في التحليل LDU للمصفوفة A:

$$A=\begin{bmatrix}1&&&&\\-\frac{1}{2}&1&&&\\&-\frac{2}{3}&1&&\\&&-\frac{3}{4}&1&\\&&&-\frac{4}{5}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{2}{1}&&&&\\&\frac{3}{2}&&&\\&&\frac{4}{3}&&\\&&&\frac{5}{4}&\\&&&&\frac{6}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{2}&&&\\&1&-\frac{2}{3}&&\\&&1&-\frac{3}{4}&\\&&&1&-\frac{4}{5}\\&&&&1\end{bmatrix}.$$

يمكن التعبير عن الملاحظات (أ) ـ (د) كمايلي: *العاملان L, U لمصفوفة ذات أقطار ثلاثة هما مصفوفتان بقطرين*. لهاتين المصفوفتين تقريباً بنية A ذاتها من الأصفار. لنلاحظ أيضاً، أن كلاً من L و U منقول الأخرى، كما كان متوقعاً بسبب التناظر، ولأن المحاور d_i كلها موجبة[1]. من الواضح أن المحاور تتقارب من قيمة نهائية هي (+١) وذلك عندما تزداد n كبراً. إن مثل هذه المصفوفة تجعل الحاسوب سعيداً.

---

(١) سيجري فيما بعد مطابقة جداء المحاور مع محددة A: $\det A=6$



شكل (١-٧). مصفوفة حزامية وعواملها .

هذه التسهيلات تؤدي إلى تغيير كامل في تعداد العمليات المعتاد . في كل خطوة من الحذف نحتاج إلى عمليتين وحيث إن هناك n خطوة ، *لذا نحتاج إلى* $2n$ **عملية عوضاً عن** $n^3/3$؛ الحساب سيكون أسرع بالنسبة لدرجة الضخامة . وهذا صحيح أيضاً من أجل التعويض التراجعي؛ فعوضاً عن $n^2/2$ نحتاج إلى $2n$ عملية ، لذا *فان عدد العمليات الضرورية في مصفوفة ذات أقطار ثلاثة* ، تتناسب مع n وليس مع قوة عالية لـ n. يمكن حل نظام ذي ثلاثة أقطار $Ax = b$ بصورة فورية تقريباً .

لنفرض بصورة أعم أن A *مصفوفة حزامية* ، أي أن عناصرها أصفار عدا تلك التي تقع في الحزام $|i-j| < w$ الشكل (١-٧) . نصف عرض الحزام $w = 1$ من أجل مصفوفة قطرية ، و $w = 2$ من أجل مصفوفة ذات أقطار ثلاثة و $w = n$ من أجل مصفوفة كاملة . تحتاج الخطوة الأولى إلى $w(w-1)$ عملية وبعد هذه الخطوة سيبقى لدينا مصفوفة ذات حزام من العرض w. بما أنه توجد حوالي n خطوة ، فان الحذف في مصفوفة حزامية يحتاج إلى حوالي w^2n عملية .

عدد العمليات يتناسب مع n ونلاحظ الآن أنه متناسب أيضاً مع مربع w. عندما تقترب w من n فان المصفوفة تقترب من أن تكون ممتلئة ويصبح عدد العمليات من جديد n^3 تقريباً . يتعلق التعداد الأكثر دقة بالأمر التالي في القرنة اليمنى والسفلى من A، لم يعد w عرض الحزام . إن العدد الدقيق من عمليات القسمة وعمليات الضرب-

الطرح اللازمة لايجاد L,D,U (دون اعتبار تناظر A) هو : $P=1/3\ w\ (w-1)\ (3n-2w+1)$ من أجل مصفوفة ممتلئة حيث $w=n$، من أجل مصفوفة ممتلئة حيث $w=n$، سيكون هذا العدد : $P=1/3\ n\ (n-1)\ (n+1)$[1]. نلخص ما سبق : إذا كان لدينا مصفوفة حزامية A فان لها عاملين مثلثيين Uو L تقع عناصرها غير الصفرية داخل الحزام وإن عمليتي الحذف والتعويض التراجعي سريعتان حقاً.

هذه آخر عملية تعداد نقوم بها ـ لذا علينا أن نوضح النقطة المهمة التالية. من أجل مصفوفة مثل A التي وردت في مثال الفرق المحدود، سيكون معكوسها مصفوفة ممتلئة. لذا، عند حل النظام $Ax=b$، سيجعل *عدم معرفتنا للمصفوفة* A^{-1}، *الوضع أسوأ من الحالة التي نعرف فيها* Uو L. إن ضرب A^{-1} بالمتجه b يحتاج إلى n^2 من الخطوات بينما $4n$ تكفي لحل $Lc=b$ و $Ux=c$ وهما الحذف التقدمي والتعويض التراجعي اللذان يعطياننا $x=U^{-1}c=U^{-1}L^{-1}b=A^{-1}b$.

نأمل أن يكون هذا المثال قد خدم غرضين اثنين : الأول زيادة فهم القارىء لمتتالية الحذف (التي سنعتبرها أصبحت مفهومة تماماً الآن). والغرض الثاني تقديم مثال حقيقي من الأنظمة الخطية الكبيرة التي نصادفها في الحياة العملية. سوف نتجه في الفصل القادم إلى القيمة النظرية للأنظمة الخطية $Ax=b$ ـ وجودو وحدانية الحل x .

أخطاء التدوير

من الناحية النظرية قد انتهينا من الحالة غير الشاذة. قد يكون من الضروري اجراء مبادلة بين الأسطر للحصول على مجموعة كاملة من المحاور؛ ومن ثم يحل التعويض التراجعي $Ax=b$. مع ذلك، قد نكون، من الناحية العملية، بحاجة لمبادلات سطرية أخرى أو أن يظهر بوضوح أن الحل المحسوب أصبح تافهاً. نريد أن نكتب صفحتين (اختياريتين كلياً في الصف). لجعل الحذف أكثر ثباتاً ـ لماذا هو ضروري

---

(١) إن P عدد صحيح إذا كان $n-1, n, n+1$ هي أعداد متتالية ولابد أن يكون أحدها يقبل القسمة على٣

وكيف يقدم. لنذكر أن الحذف، في نظام معتدل الحجم مثلاً 100×100، يتطلب ثلث مليون عملية. وعلينا أن نتوقع في كل عملية خطأ تدوير. نحتفظ عادة، بعدد ثابت من الأرقام البيانية (ثلاثة مثلاً لحاسوب ضعيف جداً). لذا، عند إضافة عددين من حجمين مختلفين مثل:

$$.345+.00123 \longrightarrow .346.$$

نلاحظ أنه قد اهملت الأرقام الأخيرة بصورة كاملة في العدد الصغير. السؤال الوارد هنا، ما هو تأثير أخطاء التدوير على الخطأ النهائي في الجواب؟

ليس هذا الأمو مسألة سهلة. لقد عالج ذلك جون فون نيومن *John Von Neumann*، الذي كان الرياضي الرئيسي في الزمن الذي تمكن فيه الحاسوب من القيام بمليون عملية بسرعة فائقة. في الواقع أعطى تركيب طريقتي غاوس وفون نيومن لطريقة الحذف السهلة تاريخاً متميزاً رغم أن فون نيومن لم يتوصل إلا إلى تقدير معقد جداً لخطأ التدوير. لقد كان ويلكنسون *Wilkinson* هو الذي أوجد الطريق الصحيح لجواب هذه المسألة وأصبحت كتبه الآن كتب مدرسية.

هنالك مثالان بسيطان مقتبسان من نصوص لـ *Nobel* و *Forsythe and Moler*، سيوضحان ثلاثاً من أهم النقاط المتعلقة بأخطاء التدوير. المثالان هما:

$$A = \begin{bmatrix} 1. & 1. \\ 1. & 1.0001 \end{bmatrix} \text{ و } A' = \begin{bmatrix} .0001 & 1. \\ 1. & 1. \end{bmatrix}.$$

النقطة الأولى هي:

١ـ س بعض المصفوفات شديدة الحساسية للتغيرات الصغيرة وبعضها ليس كذلك. المصفوفة A سيئة الشروط (إي حساسة) أما A' فانها حسنة الشروط.

من حيث الكيفية المصفوفة A شاذة تقريباً بينما A' ليست كذلك. إذا جعلنا العنصر الأخير في A $a_{22}=1$، فانها تصبح شاذة إذ يصبح فيها عمودان متساويين. لننظر في

حالتين يكون فيهما الطرفان الأيمنان قريباً أحدهما من الآخر ، في النظام $Ax = b$:

$$\begin{aligned} u + \quad v &= 2 \\ u + 1.0001v &= 2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} u + \quad v &= 2 \\ u + 1.0001v &= 2.0001. \end{aligned}$$

حل النظام الأول $u = 2, v = 0$ ؛ حل النظام الثاني $u = v = 1$. **التغير الذي وقع في المرتبة الخامسة من b تضخم تأثيره بحيث غير المرتبة الأولى من الحل، ولاتوجد أي طريقة حسابية يمكنها تفادي هذه الحساسية تجاه التغيرات الصغيرة.** يمكن لسوء الشروط هذا أن ينتقل من مكان إلى آخر خلال الحسابات ولكن من غير الممكن حذفه . الحل الصحيح حساس جداً ولايمكن للحل المحسوب أن يكون أقل من ذلك .

النقطة الثانية هي :

١ ـ ع يمكن لمصفوفة جيدة الشروط أن تفسد بسبب طريقة رديئة .

من المؤسف أن نقول ، فيما يتعلق بالمصفوفة A' ، أن الحذف الغاوسي الصريح يمثل إحدى الطرق الرديئة . لنفرض أننا قبلنا 0001 . كمحور أول وأننا طرحنا 10.000 ضعف السطر الأول من الثاني ، ليصبح العنصر الأدنى الأيمن 9999- ولكن التدوير إلى ثلاث مراتب سيجعله 10.000 . لقد اختفى كل أثر للعنصر (١) الذي كان سابقاً هناك .

لننظر في المثال الخاص :

$$.0001u + v = 1$$

$$u + v = 2.$$

بعد الحذف تأخذ المعادلة الثانية الصورة :

$$-9999v = -9998, \quad \text{أو} \quad v = .99990$$

سيعطي التدوير ، عوضاً عن ذلك ، $-10.000v = -10.000$ أو $v = 1$. حتى الآن ، لم يعكس تخريب المعادلة الثانية حلاً رديئاً . v صحيحة فعلاً إلى ثلاث مراتب . ومع ذلك ، فإذا ماتابعنا التعويض التراجعي ، فان المعادلة الأولى تأخذ الشكل :

$$.0001u + .9999 = 1 \quad \text{أو} \quad u = 1$$

لو قبلنا قيمة لـ 1 = س خاطئة في المرتبة الرابعة فقط، فان هذه المعادلة تصبح :

$$.0001u + 1 = 1, \text{ أو } u = 0$$

قيمة u المحسوبة خاطئة تماماً رغم أن A' ذات شروط جيدة، فالحذف الصريح مضطرب بشدة. سواء كانت العوامل L,D,U صحيحة أو تقريبية، فانها خارجة عن مستوى المصفوفة الأصلية تماماً :

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 10,000 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .0001 & 0 \\ 0 & -9999 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 10,000 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

لقد أدى المحور الصغير 0001. إلى عدم استقرار وإن معالجة ذلك واضحة **وهي مبادلة بين الأسطر** . إليك نقطتنا الثالثة :

١ـ ف كما كان من الضروري، عند وجود صفر في موضع محور، تغير نظري في الحذف ، فان وجود محور صغير يضطرنا من الناحية العملية إلى تغييرفي طريقة الحذف . مالم يوجد تأكيد خاص مخالف، فان على الحاسوب أن يقارن كل محور مع بقية المحاور الممكنة الواقعة معه في العمود نفسه. يدعى اختيار أكبر المحاور والمبادلة الملائمة بين الأسطر بحيث تؤخذ القيمة الكبرى محوراً، المحوره الجزئية.

في المصفوفة A'، سوف يقارن المحور الممكن 0001. مع العنصر الواقع تحته (١). لذا يجب اجراء مبادلة بين السطرين مباشرة. بالتعبير المصفوفي، هذا الأمر يعني الضرب بمصفوفة مبادلة كما سبق. للمصفوفة الجديدة $A''=PA'$ التحليل التالي :

$$A'' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ .0001 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ .0001 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & .9999 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

لقد أصبح المحوران الآن 9999. و 1 وهما في مستوٍ واحد تقريباً. لقد كانا سابقاً 9999 - . و 0001.

تتميز المحوره الجزئية عن الطريقة الأكثر محافظة **للمحورة الكاملة** ، التي لانكتفي

فيها بالنظر في العمود k بل تنظر أيضاً في جميع الأعمدة التالية من أجل محور أكبر محتمل . في المحوره الكاملة لايكتفى بالمبادلة بين الأسطر بل قد يتطلب ذلك مبادلة بين الأعمدة لتحريك هذه القيمة الكبرى كي تقع في موضع المحور (بقول آخر تغيير ترقيم المجاهيل أو الضرب من اليمين بمصفوفة مبادلة) . تكمن صعوبة هذه الطريقة المحافظة في كونها ذات كلفة عالية ؛ البحث في بقية الأعمدة عن المحور الأكبر يستغرق وقتاً طويلاً لذا فإن المحورة الجزئية تكفي عادة بشكل ملائم . لقد وصلنا أخيراً إلى الطريقة الأساسية للجبر الخطي العددي : **الحذف بالمحورة الجزئية**. ومع ذلك فانه من الممكن اجراء بعض التهذيبات الاضافية مثل الانتباه فيما إذا كان من الضروري تغيير موضع سطر أو عمود بكامله . المهم الآن أن القارىء أصبح عارفاً بعمل الحاسوب بالنسبة لنظام معادلات خطية . بالمقارنة مع الوصف «النظري» ـ ايجاد A^{-1} والضرب $A^{-1}b$ـ فان وصفنا قد استهلك كثيراً من وقت القارىء (ومن صبره) . كنت أتمنى لو وجدت طريقة أكثر سهولة لتوضيح كيف نجد x فعلاً ، لكني لاأظن أن ذلك موجود .

تمـــاريـــن

١-٧-١ اجعل في مثال النص $a_{11}=1$ بدلاً من $a_{11}=2$ ثم أوجد التحليل LDU لهذه المصفوفة الجديدة ذات الأقطار الثلاثة .

١-٧-٢ اكتب مصفوفة الفرق المحدود ذات النوع 3×3 $(h=1/4)$ المتعلقة بالمعادلة

$$\frac{d^2u}{dx^2} + u = x, \qquad u(0) = u(1) = 0.$$

١-٧-٣ أوجد مصفوفة A من النوع 5×5 تقرب

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = f(x), \qquad \frac{du}{dx}(0) = \frac{du}{dx}(1) = 0.$$

وذلك بجعل شروط البدء $u_0=u_1, u_6=u_5$. تحقق من أنه إذا طبقت مصفوفتك على المتجه (1,1,1,1,1) فانها تعطي صفراً؛ A شاذة . بصورة مماثلة، برهن أنه إذا كانت $u(x)$ حلاً للمسألة المتصلة فان $u(x)+1$ كذلك . الشرطان الحديان لايغيران في عدم التعيين الموجود بسبب الحد $C+Dx$، لذا فالحل ليس وحيداً .

١-٧-٤ بفرض أن $h=1/4$ و $f(x)=4\pi^2 \sin 2\pi x$، تصبح المعادلة (٥)

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \frac{\pi^2}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

أوجد الحل من أجل u_1, u_2, u_3 وأوجد أخطاءها بالمقارنة مع الحل الصحيح $u=\sin 2\pi x$ عند $x=1/4$ و $x=1/2$ و $x=3/4$.

١-٧-٥ ماهو النظام ذو النوع 5×5 الذي يخلف (٦)، إذا غير الشرطان الحديان فأصبحا $u(1)=0$ و $u(0)=1$؟

١-٧-٦ (موصى به) احسب معكوس مصفوفة هيلبرت ذات النوع 3×3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

بطريقتين مستخدماًمتتالية غاوس-جوردان المعتادة : (١) بحساب صحيح (٢) بتدوير كل عدد إلى ثلاثة أرقام عشرية . ملاحظة : هذه حالة لاتساعد فيها المحورة؛ حيث A سيئة الشروط ولايمكن اصلاحها .

١-٧-٧ من أجل المصفوفة السابقة ذاتها، قارن الأطراف اليمنى للنظام $Ax=b$ المقابلة للحلين $x=(1,1,1)$, $x=(0,6,-3.6)$.

١-٧-٨ حل النظام $Ax=b=(1,0,....,0)$ حيث A مصفوفة هيلبرت من النوع 10×10 و $a_{ij}=1/(i+j-1)$ وذلك باستخدام أي نظام حاسوب لمعادلات خطية .

ثم غير قليلاً بأحد عناصر A أو b وقارن بين الحلين.

١-٧-٩ قارن المحاور في حذف مباشر مع تلك الناتجة عن محورة جزئية وذلك للمصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} .001 & 0 \\ 1 & 1000 \end{bmatrix}.$$

(هذا فعلاً مثال يحتاج إلى تغيير المقياس قبل الحذف)

١-٧-١٠ فسر لماذا، عند المحورة الجزئية، تحقق المضاريب l_{ij} في L العلاقة $|l_{ij}| \leq 1$. استنتج أنه إذا كانت العناصر الأصلية للمصفوفة A محققة $|a_{ij}| \leq 1$، فانه بعد ايجاد أصفار في العمود الأول، يصبح كل عنصر محدود بالعدد 2؛ بعد k خطوة تصبح العناصر محدودة بالعدد 2^k. هل يمكنك انشاء مثال من النوع 3×3 بعناصر $|a_{ij}|\leq 1$ و $|l_{ij}|\leq 1$ بحيث يكون المحور الأخير 4؟

تمـــاريـــن مراجعـــة

١-١ (أ) اكتب مصفوفة من النوع 3×3 بالعناصر

$$a_{ij} = i - j \quad \text{و} \quad b_{ij} = \frac{i}{j}.$$

(ب) احسب A^2, BA, AB

٢-١ من أجل المصفوفتين

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

احسب AB, BA, A^{-1}, $(AB)^{-1}$

٣-١ أوجد مثالاً من النوع 2×2 حيث $a_{12} = 1/2$ ويحقق :

$$\text{(a)}\, A^2 = 1 \quad \text{(b)}\, A^{-1} = A^T \quad \text{(c)}\, A^2 = A.$$

٤-١ حل بالحذف والتعويض ـ التراجعي :

$$\begin{aligned} u \quad + w &= 4 \\ u + v \quad &= 3 \\ u + v + w &= 6 \end{aligned} \qquad \text{و} \qquad \begin{aligned} v + w &= 0 \\ u \quad + w &= 0 \\ u + v \quad &= 6 \end{aligned}$$

٥-١ حلل المصفوفتين السابقتين بالصورة $A = LU$ أو $PA = LU$

٦-١ (أ) توجد ١٦ مصفوفة من النوع 2×2 عناصرها أصفار ووحدان . ماعددالقابل للعكس منها ؟

(ب) (أكثر صعوبة) إذا وضعت بصورة كيفية وحدان وأصفارفيمواقع عناصر مصفوفة من النوع10×10 ، هل الأكثر احتمالاً أن تكون قابلة للعكس أو أن تكون شاذة ؟

٧-١ توجد ١٦ مصفوقة من النوع 2×2 عناصرها (١) أو (-١) . ماعدد القابل للعكس منها ؟

١–٨ ماهي أسطر EA المرتبطة بأسطر A إذا كان :

$$E=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\4&0&1\end{bmatrix} \text{ أو } E=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&0\end{bmatrix} \text{ أو } E=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}?$$

١–٩ اكتب نظاماً من النوع2×2 ، ذا عدد غير منتهه من الحلول .

١–١٠ أوجد معكوساً، إذا وجد، بالمعاينة أو بطريقة غاوس – جوردان للمصفوفات :

$$A=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix} \text{ أو } A=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&1\\0&1&2\end{bmatrix} \text{ أو } A=\begin{bmatrix}1&1&-2\\1&-2&1\\-2&1&1\end{bmatrix}.$$

١–١١ إذاكا نت E من النوع 2×2 وهي تجمع المعادلة الأ ولى الى المعادلة الثانية، فما هي $E^2, E^8, 8E$

١–١٢ صائب أم خاطىء، مع التعليل إذا كان صائباً ومثال معاكس إذا كان خاطئاً :

(١) إذا كانت A قابلة للعكس و كانت أسطرها في ترتيب معاكس لأسطر B، فان B قابلة للعكس .

(٢) إذا كانت المصفوفتان A , B متناظرتين فان ABمتناظرة .

(٣) إذا كانت A,B قابلتين للعكس فإن BAقابلةللعكس .

(٤) يمكن تحليل أي مصفوفة غير شاذة بالصورة $A=LU$ كجداء مصفوفة مثلثية دنيا L بمصفوفة مثلثية عليا U .

١–١٣ حل النظام $Ax=b$ بحل النظامين المثلثيين $Lc=b$,$Ux=c$

$$A=LU=\begin{bmatrix}1&0&0\\4&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&2&4\\0&1&3\\0&0&1\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

ماهو جزء A^{-1} الذي وجدته بهذه القيمة الخاصة لـ b ؟

١-١٤ هل من الممكن ايجاد مصفوفة B من النوع 3×3 بحيث يتحقق

(أ) $BA = 2$لكل مصفوفة A.

(ب) $BA = 2$لكل مصفوفة A.

(جـ) في المصفوفة BA السطر الأول والأخير من A معكوسان.

(د) في المصفوفة BA العمود الأول والعمود الأخير من A معكوسان

١-١٥ أوجد قيمة c في المعكوس التالي ذي النوع $n\times n$

إذا كان $A = \begin{bmatrix} n & -1 & . & -1 \\ -1 & n & . & -1 \\ . & . & . & -1 \\ -1 & -1 & -1 & n \end{bmatrix}$ فإن $A^{-1} = \dfrac{1}{n+1}\begin{bmatrix} c & 1 & . & 1 \\ 1 & c & . & 1 \\ . & . & . & 1 \\ 1 & 1 & 1 & c \end{bmatrix}$

١-١٦ لأي قيمة لـ k ، متى يكون للنظام التالي حل، يكون له حل واحد، أو يكون له عدد غير منته من الحلول ؟

$$kx + y = 1$$

$$x + ky = 1$$

١-١٧ أوجد التحليل المتناظر $A = LDL^T$ لكل من :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 11 \end{bmatrix} \quad \text{إو} \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}.$$

١-١٨ تفرض A من النوع4×4 وهي تشبه مصفوفة الوحدة إلا في متجه العمودالثاني v :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & v_1 & 0 & 0 \\ 0 & v_2 & 0 & 0 \\ 0 & v_3 & 1 & 0 \\ 0 & v_4 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(أ) حلل A وفق LU، بفرض $v_2 \neq 0$.

(ب) أوجد A^{-1} الذي له شكل A نفسه .

١-١٩ حل بطريقة الحذف أو بين أنه ليس هناك حل للنظامين :

$$\begin{aligned} u + v + w &= 0 \\ u + v + 3w &= 0 \\ 3u + 5v + 7w &= 1. \end{aligned} \quad \text{و} \quad \begin{aligned} u + v + w &= 0 \\ u + 2v + 3w &= 0 \\ 3u + 5u + 7w &= 1 \end{aligned}$$

١-٢٠ تعد مجموعة مصفوفات المبادلة من النوع $n \times n$ مثالاً «للزمرة». إذا ضربت أي اثنتين منها فان الناتج من الزمرة؛ معكوس كل واحدة منها يقع في الزمرة؛ مصفوفة الوحدة ذات النوع ذاته واقعة في الزمرة؛ وأن القانون $p_1(p_2 p_3) = (p_1 p_2) p_3$ صحيح لأنه صحيح من أجل جميع المصفوفات.

(أ) ماهو عدد عناصر الزمرة ذات النوع 4×4 والنوع $n \times n$ ؟

(ب) أوجد أساً k بحيث تحقق كل مصفوفة مبادلة من النوع 3×3 $P^k = I$.

١-٢١ صف أسطر DA وأعمدة AD إذا كانت $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$.

١-٢٢ (أ) إذا كانت A قابلة للعكس فماهو معكوس A^T ؟

(ب) إذا كانت A متناظرة أيضاً فما هو منقول A^{-1} ؟

(جـ) وضح هاتين الصفتين عندما تكون $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

١-٢٣ بتجربة $n = 2, n = 3$ أوجد :

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^n , \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n , \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} .$$

١-٢٤ انطلق من مستو أول $u + 2v - w = 6$ وأوجد معادلة

(أ) المستوي الموازي المار من نقطة الأصل

(ب) مستوياً آخر يحوي، بالاضافة إلى المبدأ، النقطتين ,(6,0,0)
. (2,2,0)

(جـ) مستوياً ثالثاً يلاقي الأول والثاني في النقطة (4,1,0) .

١-٢٥ ماهو مضاعف السطر (٢) الذي يطرح من السطر (٣) في الحذف التقدمي لمايلي :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ ?$$

هل تعرف (دون اجراء ضرب هذين المضروبين) أن A *قابلة للعكس*، *متناظرة أو ذات أقطار ثلاثة* ؟ ماهي محاورها ؟

١-٢٦ (أ) ماهو المتجه الذي يجعل Ax مساوياً العمود الثالث + مثلي العمود الثالث لمصفوفة A من النوع 3×3 ؟

(ب) أنشىء مصفوفة فيها العمود الأول + مثلي العمود الثاني = 0 . تحقق من أن A شاذة (أقل من ثلاثة محاور) وفسر لماذا يجب أن يقع ذلك.

١-٢٧ صحيح أم خاطىء، مع التبرير إذا كان صحيحاً ومثال معاكس إذا كان خاطئاً:

(١) إذا كان $L_1U_1 = L_2U_2$ (حيث U تمثل مصفوفة مثلثية عليا بعناصر قطرية غير صفرية وتمثل L مصفوفة مثلثية دنيا عناصر قطرها وحدان)، فان $L_1=L_2, U_2=U_2$. التحليل LU وحيد.

(٢) إذا كان $A^2+A=I$ فان $A^{-1}=A+I$

(٣) إذا كان كل عنصر قطري من A صفراً فان A شاذة.

١-٢٨ بالتجربة أو بطريقة غاوس - جوردان، احسب :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 \end{bmatrix}^n , \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} , \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \end{bmatrix}^{-1} .$$

١-٢٩ اكتب مصفوفة من النوع 2×2 بحيث

(أ) تعكس اتجاه أي متجه ذي بعدين .

(ب) تسقط كل متجه ذي بعدين على محور x_2

(جـ) تدور كل متجه ذي بعدين باتجاه معاكس لدوران الساعة بمقدار ٩٠°.

(د) تعكس كل متجه ذي بعدين في منصف الربع الأول $x_1=x_2$.

الفصل الثاني

فضاءات المتجهات والمعادلات الخطية

٢-١ فضاءات المتجهات والفضاءات الجزئية

يمكن لطريقة الحذف تبسيط النظام الخطي $Ax=b$، وهذا التبسيط يشمل عنصراً واحداً كل مرة. لحسن الحظ، يبسط الحذف كذلك النظرية. السؤال الرئيسي يتعلق بوجود ووحدانية الحل ـ هل هناك حل وحيد، أو لا يوجد حل أو أن هناك عدداً لا نهائياً من الحلول؟ ـ تصبح الإجابة عليها أيسر بعد الحذف. نحتاج إلى تخصيص بند إضافي لمثل هذه الأسئلة، وبعدئذ تكون دائرة هذه الأفكار قد استكملت. إلا أن آلية الحذف تؤدي إلى اتجاه واحد في فهم النظام الخطي، وهدفنا الرئيسي هو التوصل إلى فهم مختلف وأعمق. هذا الفصل يمكن أن يكون أصعب من الفصل الأول. إنه يتوجه نحو جوهر الجبر الخطي.

أولاً نحتاج إلى مفهوم **فضاء المتجهات**. لادخال هذا المفهوم، ننطلق مباشرة من الفضاء ات ذوي الأهمية الكبرى التي نرمز لها بـ R^1, R^2, R^3، حيث يوجد فضاء لكل عدد صحيح موجب. يتكون الفضاء R^n من جميع متجهات الأعمدة التي لها n مركبة (المركبات هنا أعداد حقيقية). يمثل الفضاء R^2 بمستوي x-y المعتاد وتكون عندئذ موكبتا المتجه هما x و y إحداثيي النقطة المقابلة لهذا المتجه. R^3 معروف أيضاً، حيث تعين المركبات الثلاث نقطة في الفضاء ذي الأبعاد الثلاثة. الفضاء الوحيد

البعد R^1 يمثل مستقيماً. الأمر القيِّم في الجبر الخطي هو أن توسيع هذا المفهوم إلى n بعداً يجري بصورة مباشرة. من أجل متجه من فضاء ذي سبعة أبعاد R^7 مثلاً، نحتاج، فقط، إلى معرفة المركبات السبع رغم أنه من الصعب تصور ذلك هندسياً.

في هذه الفضاءات وفي جميع فضاءات المتجهات يمكن اجراء عمليتين :

يمكن جمع أي متجهين كما يمكن ضرب أي متجه بعدد.

من أجل كل فضاء من الشكل $\boldsymbol{R}^n$ تنفذ هاتان العمليتان على مركبة واحدة في كل مرة؛ إذا كان x متجهاً من $\boldsymbol{R}^4$ مركباته 1,0,0,3 فان $2x$ متجه مركباته 2,0,0,6. هناك سلسلة كاملة من الخواص يمكن تحقيقها مثل الخاصة التبديلية $x+y=y+x$ أو خاصة 'المتجه الصفري' الذي يحقق العلاقة $0+x=x$ أو خاصة المتجه $-x$ الذي يحقق العلاقة $x+-x=0$. من ضمن هذه الخواص، توجد ثماني خواص (منها الخواص الثلاث التي ذكرناها) أساسية لفضاء المتجهات ذكرت كاملة في التمرين (٢-١-٥). بصورة شكلية، ***فضاء متجهات حقيقي هو مجموعة من «المتجهات» تقبل قاعدة جمع المتجهات وضرب متجه بعدد حقيقي***؛ على الجمع والضرب إنتاج متجه واقع في الفضاء ذاته وأن يحققا الخواص الثمان المذكورة.

نظامياً تقع المتجهات التي نتعامل معها فيواحد من الفضاءات $\boldsymbol{R}^n$، تمثل عادة بمتجهات أعمدة. التعريف الشكلي لفضاء المتجهات يجعلنا نعتبر متجهات أشياء أخرى غير المتجهات المعتادة وذلك شريطة أن يكون الجمع والضرب بعدد معرّفين بصورة ملائمة. سنقدم من أجل ذلك أمثلة ثلاثة :

(١) الفضاء ذو السعة اللانهائية R^∞. لمتجهات هذا الفضاء عدد غير منته من المركبات مثل $x=(1,2,1,2....)$ ولكن قانوني الجمع والضرب لم يتغيرا.

(٢) *فضاء المصفوفات من النوع* 3×2. في هذه الحالة يعتبر المتجه مصفوفة، يمكننا أن نجمع مصفوفتين ويكون $A+B=B+A$ وهناك مصفوفة صفرية وهكذا. إن هذا الفضاء مشابه تقريباً لـ $\boldsymbol{R}^6$. (المركبات الست مرتبة في مستطيل عوضاً عن

عمود) . ويعطي أي اختيار آخر لـ n و m مثالاً مشابهاً ، فضاء مصفوفات من النوع $m \times n$.

(٣) *فضاء الدوال* $f(x)$. نفرض هنا أن جميع الدوال معرفة على فترة محدودة مثل $0 \le x \le 1$. يقع في هذا الفضاء مثلاً الدالتان $f(x) = x^2, g(x) = \sin x$ وكذلك مجموعهما $(f+g)(x) = x^2 + \sin x$ وجداء كل منهما بعدد مثل $-\sin x$ و $3x$. المتجهات هنا دوال وعدد أبعاد هذا الفضاء مالانهاية أيضاً . إنه ، في الواقع ، مالانهاية أوسع من R^∞ .

سنقدم أمثلة أخرى في التمارين ولكن فضاءات المتجهات التي نحتاجها أكثر من غيرها ، تقع ضمن الفضاءات المعتادة R^n. نريد أن نصفها ونبين سبب أهميتها . هندسياً ، تصور الفضاء ذا الأبعاد الثلاثة R^3 واختر أي مستو يمر من نقطة الأصل . يمثل هذا المستوي بنفسه فضاء متجهات . إذا ضربنا متجهاً من هذا المستوي بالعدد(3) أو بالعدد (3-) أو بأي عدد آخر فاننا نحصل على متجه واقع في المستوي ذاته . إذا جمعنا متجهين من هذا المستوي فان مجموعهما يقع في المستوي ذاته . إن هذا المستوي يمثل إحدى أهم أفكار الجبر الخطي . إنه فضاء جزئي من الفضاء الأصلي R^3 .

تعريف : *الفضاء الجزئي* من فضاء متجهات هو مجموعة جزئية من هذا الفضاء تحقق الشرطين :

(١) إذا جمعنا أي متجهين x, y من هذه المجموعة الجزئية فان مجموعهما $x+y$ يقع فيها أيضاً .

(٢) إذا ضربنا أي متجه x من هذه المجموعة الجزئية بعدد c فان الجداء يقع فيها أيضاً .

بقول آخر ، الفضاء الجزئي مجموعة جزئية "مغلقة" بالنسبة للجمع والضرب بعدد . تجرى هاتان العمليتان وفق قواعد الفضاء الكلي دون أن تأخذنا إلى خارجه . لسنا بحاجة إلى تحقيق الخواص الثمان الضرورية لأنها محققة في الفضاء الكامل ،

لذا، تكون محققة آلياً في كل فضاء جزئي. لنذكر بصورة خاصة أن *المتجه الصفري يجب أن يقع في كل فضاء جزئي* لأنه يمكننا أن نختار في الشرط (٢)، $c = 0$.

إن أدنى امكان لفضاء جزئي، هو أن يتكون من عنصر واحد وهو المتجه الصفري. إنه "فضاء بعده صفر" يحوي نقطة واحدة، فقط، هي نقطة الأصل. القاعدتان (١) و (٢) محققتان لأن الجمع والضرب بعدد ممكنان؛ فالمجموع $0 + 0$ من الفضاء ذي النقطة الواحدة وكذلك أي جداء من الشكل $c\,0$. *وهذا هو أصغر فضاء جزئي ممكن*: ليس هو المجموعة الخالية. هناك فضاء جزئي أقصى وهو أكبر فضاء جزئي ممكن، وهو الفضاء الكلي الأصلي. إذا كان الفضاء الأصلي هو $\boldsymbol{R}^3$ فانه من السهل وصف الفضاءات الجزئية مثل: $\boldsymbol{R}^3$ نفسه وكل مستوٍ مار من نقطة الأصل وكل مستقيم مار من هذه النقطة ونقطة الأصل ذاتها (المتجه الصفري).

الفرق بين مجموعة جزئية وفضاء جزئي يتوضح بالأمثلة. سنقدم هنا بعضاً منها ونقدم أمثلة أخرى فيما بعد. على كل حال سيكون السؤال الذي يجب الإجابة عنه هو ما إذا كان الشرطان (١) و (٢) محققين. هل يمكنك جمع متجهات وهل يمكنك الضرب بعدد، دون ترك الفضاء؟

مثال ١ـ لننظر في جميع المتجهات التي تكون مركباتها موجبة أو مساوية الصفر. إذا كان الفضاء الأصلي هو المستوي x-y أي $\boldsymbol{R}^2$، فان هذه المجموعة الجزئية تمثل الربع الأول من هذا المستوي، يحقق الإحداثيان العلاقتين: $x \geq 0 , y \geq 0$. إنها لاتمثل فضاءً جزئياً رغم أنها تحوي الصفر وأن ناتج الجمع يقع فيها. الشرط الثاني لم يتحقق إذ لو فرضنا أن العدد (1-) وإن المتجه هو $[\,1\ \ 1\,]$ فان $cx = [\,-1\ \ -1\,]$ هو متجه لايقع في الربع الأول بل يقع في الربع الثالث.

إذا أدخلنا الربع الثالث بالاضافة إلى الأول فانه يتحقق عندئذ شرط الضرب بعدد؛ كل جداء من الشكل cx يقع في هذه المجموعة الجزئية وبذلك يتحقق الشرط

الثاني. لكن الشرط الأول لم يعد محققاً الآن لأن جمع المتجهين [1- 2-] و [2 1]يعطي المتجه [1 1-] وهو متجه لايقع في أي واحد من هذين الربعين. إن أصغر فضاء جزءي يحوي الربع الأول هو $\boldsymbol{R}^2$ كله.

مثال ٢ـ إذا انطلقنا من فضاء المتجهات المكون من مصفوفات النوع 3×3 فان هناك فضاءاً جزئياً ممكناً هو مجموعة المصفوفات *المثلثية الدنيا*. هناك فضاءٌ آخر هو مجموعة المصفوفات المتناظرة. نجد في كل من الحالتين أن المجموع $A + B$ والجداء cA يرثان خواص A وB. هما مثلثيتان دنياوان إذا كانت A وB كذلك، وهما متناظرتان إذا كانت A و B متناظرتين. من الواضح ،أن المصفوفة الصفرية تنتمي إلى كل من هذين الفضائين الجزئيين.

نصل الآن إلى الأمثلة الأساسية للفضاءات الجزئية. إنها تتصل مباشرة بالمصفوفة A وإنها تعطي معلومات حول النظام $Ax=b$. في بعض الحالات، تحوي متجهات بـ m مركبة مثل أعمدة A؛ لذا، فانها فضاءات جزئية من $\boldsymbol{R}^m$. في حالات أخرى، يكون لهذه المتجهات n مركبة، مثل الأسطر (أو مثل x نفسه). إنها فضاءات جزئية من $\boldsymbol{R}^n$. نوضح ذلك بنظام ذي ثلاث معادلات في مجهولين:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}. \quad (١)$$

إذاكان عدد المجاهيل أكبر من عدد المعادلات، يمكننا أن نتوقع عدد اًغير منته من الحلول (مع أن الأمر ليس كذلك دائماً). في الحالة الحاضرة، عدد المعادلات أكبر من عدد المجاهيل ($m > n$) وعلينا أن نتوقع، *كالمعتاد، أن لا يكون هناك حل*. يمكن أن يكون هذا النظام قابلاً للحل من أجل بعض الأطراف اليمنى فقط، وفي الواقع من أجل مجموعة جزئية صغيرة من متجهات الأبعاد الثلاثة b. نريد أن نجد هذه المجموعة

الجزئية لـ b.

إن إحدى طرائق وصف هذه المجموعة الجزئية بسيطة جداً بحيث من السهل عدم الانتباه إليها.

٢ - أ يكون النظام $Ax = b$ قابلاً للحل إذا وإذا فقط أمكن التعبير عن المتجه b كتركيب في أعمدة A.

لايكشف هذا الوصف أي شيء جديد أكثر من إعادة كتابة النظام $Ax = b$ بالشكل التالي:

$$u \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}. \qquad (٢)$$

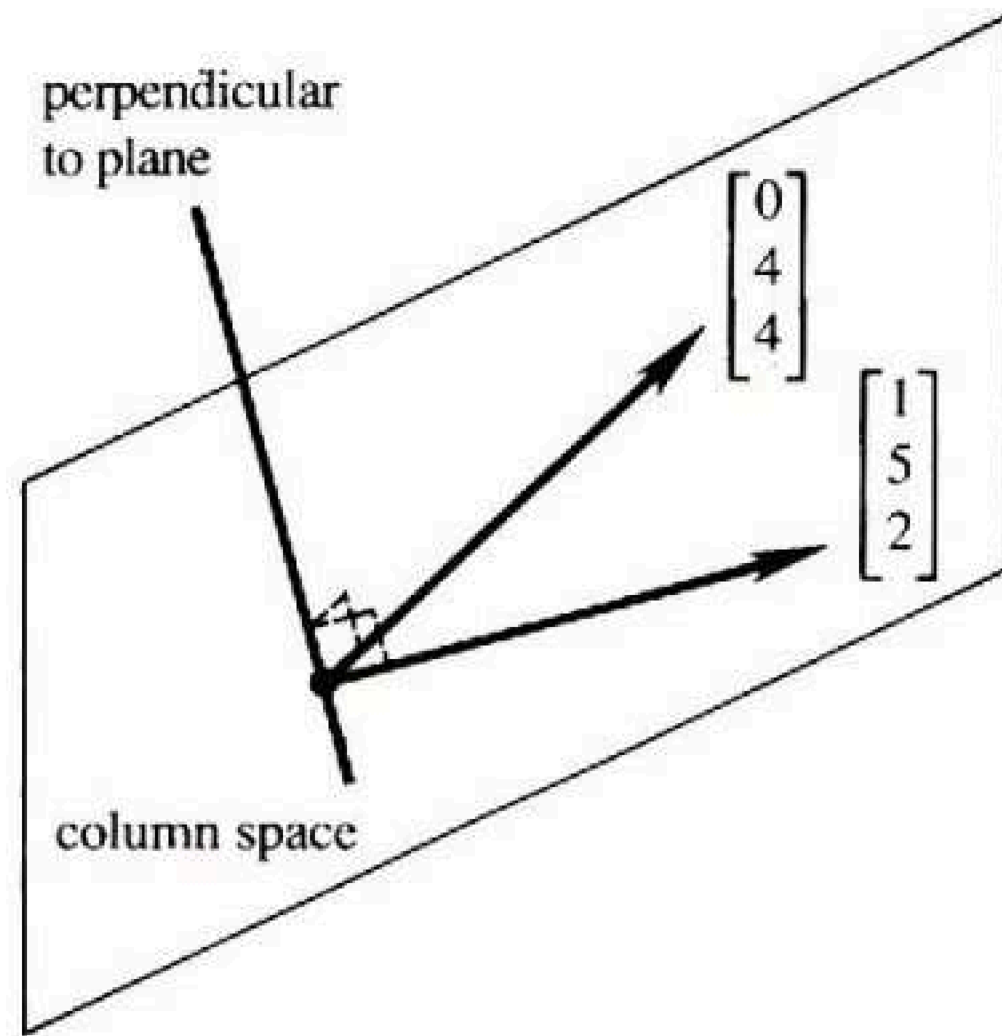
وهذه هي المعادلات الثلاث بمجهولين نفسها. لكن المسألة التي علينا أن ننظر فيها الآن هي: ايجاد العددين u و v اللذين إذا ضربا بالعمودين، الأول والثاني، أنتجا المتجه b. يكون النظام قابل للحل بصورة صحيحة إذا كان هذان المعاملان موجودين ويكون عندها (u,v) هو الحل.

لذا، *فإن* المجموعة الجزئية المكونة من الأطراف اليمنى b الموافقة هي مجموعة جميع *تراكيب أعمدة* A. إن أحد الأطراف المواتية هو العمود الأول نفسه ويكون عندها الحملان $v = 0$ و $u = 1$. إمكان آخر هو العمود الثاني $u = 0$ و $v = 1$. وثالث هو أن يكون الطرف الأيمن $b = 0$ والحملان عندئذ هما $u = 0$ و $v = 0$. (من أجل هذا الاختيار التافه، سيكون $b = 0$ ملائماً وذلك مهما كانت عناصر المصفوفة).

سننظر الآن في جميع تراكيب العمودين ونصف النتائج هندسياً: *يمكن حل النظام $Ax = b$ إذا وإذا، فقط، كان b واقعاً في المستوي المولد بمتجهي العمودين* (شكل ٢-١). هذه هي مجموعة المتجهات الملائمة b؛ إذا وقع b خارج هذا المستوي، فانه لن يكون تركيباً للعمودين. في هذه *الحالة* ليس للنظام حل.

الشيء المهم هو أن هذا المستوي ليس مجموعة جزئية فقط من $\boldsymbol{R}^3$ بل هو فضاء جزئي يدعى *فضاء أعمدة* المصفوفة A. يتكون فضاء الأعمدة من جميع *تراكيب أعمدة* $\boldsymbol{A}$. ويرمز له بـ $R(A)$. تكون المعادلة $Ax=b$ *قابلة للحل إذا وإذا فقط كان* b *واقعاً في فضاء أعمدة* A. من أجل مصفوفة من النوع $m\times n$ يكون هذا الفضاء فضاءً جزئياً من $\boldsymbol{R}^m$ وذلك لأن للأعمدة m مركبة ومن السهل التحقق من المتطلبين (١) و(٢) المتعلقين بالفضاء الجزئي.

(١) نفرض أن b و b' واقعان في فضاء الأعمدة بحيث تتحقق المعادلة $Ax = b$ من أجل x والمعادلة $Ax' = b'$ من أجل x'؛ x وx' يعينان تركيبين خاصين يعطيان b و b' لذا $A(x+x')=b+b'$؛ أي $b+b'$ هو أيضاً تركيب لهذه الأعمدة. إذا كان b حاصل طرح العمود الثاني من العمود الأول وكان b' مساوياً ضعفي العمود الثاني، فإن $b+b'$ هو العمود الأول + العمود الثاني. المتجهات المواتية مغلقة بالنسبة للجمع وهذا ما يحقق الشرط الأول من شرطي الفضاء الجزئي.



شكل (٢-١). فضاء الأعمدة هو مستوٍ من فضاء ذي أبعاد ثلاثة.

(٢) إذا وقع b في فضاء الأعمدة فإنه يقع فيه كذلك كل مضاعف cb. إذا أنتج تركيب للأعمدة متجهاً b (أي $Ax = b$)، فاذا ضربنا كل معامل في هذا التركيب بالعدد c فاننا نحصل على cb؛ بقول آخر $A(cx) = cb$.

هندسياً، الحالة العامة تشبه الشكل (٢-١) باستثناء عدد الأبعاد الذي يمكنه أن يكون مختلفاً جداً؛ ليس من الضروري أن نجد مستوياً ذا بعدين في فضاء ذي ثلاثة أبعاد. كما أنه ليس من الضروري أن يكون العمود على فضاء الأعمدة الذي رسمناه في الشكل (٢-١)، مستقيماً دوماً. من ناحية قصوى أولى، أصغر فضاء أعمدة ينتج عن المصفوفة الصفرية $A = 0$. المتجه الوحيد الذي يقع في فضاء الأعمدة هذا (التركيب الوحيد للأعمدة) هو $b = 0$، وليس هناك خيار آخر لـ b يجعل النظام $0x = b$ قابلاً للحل. في الوضع الأقصى الآخر، نفرض، مثلاً، أن A مصفوفة الوحدة من النوع 5×5 فيكون عندئذ فضاء الأعمدة $\boldsymbol{R}^5$ كاملاً؛ يمكن تركيب الأعمدة الخمسة لمصفوفة الوحدة للحصول علّى أي متجه. عدد أبعاده خمسة. هذا الأمر غير خاص بمصفوفة الوحدة. *كل مصفوفة غير شاذة من النوع 5×5 تقبل الفضاء $\boldsymbol{R}^5$ كاملاً كفضاء أعمدة*. يمكننا من أجل مثل هذه المصفوفة حل النظام $Ax = b$ بطريقة غاوس للحذف؛ يوجد خمسة محاور. لذا فان أي متجه b ينتمي إلى فضاء أعمدة مصفوفة غير شاذة.

يمكنك أن ترى، لماذا يحتوي هذا الفصل الفصل السابق. هناك درسنا الحالة الأكثر وضوحاً والأكثر شيوعاً لمصفوفة من النوع $n\times n$ والتي فضاء أعمدتها $\boldsymbol{R}^n$. سندخل هنا في دراستنا، أيضاً، المصفوفات الشاذة والمستطيلة من أي نوع كانت؛ يقع فضاء الأعمدة بين الفضاء الصفري والفضاء الكلي. كل ذلك، بالاضافة إلى الفضاءات المتعامدة معها، يعطي واحدة من طريقتينا لفهم النظام $Ax =b$.

الفضاء الصفري للمصفوفة A

الطريقة الثانية مزاوجة (ثنوية) للأولى. لانهتم فقط بالحصول على الأطراف اليمنى b الموافقة بل ينصب اهتمامنا أيضاً على مجموعة الحلول x التي تلائم ذلك. إذا كان الطرف الأيمن $b = 0$ فان ذلك يعطي دوماً الحل الخاص $x = 0$. لكن من الممكن أن يكون هناك عدد غير منته من الحلول الأخرى (يقع هذا دائماً عندما يكون عدد المجاهيل

أكثر من عدد المعادلات $n > m$) . مجموعة *حلول النظام* $\boldsymbol{Ax = 0}$ هو نفسه **فضاء متجهات ـ الفضاء الصفري لـ A .**

يتكون الفضاء الصفري لمصفوفة من جميع المتجهات x بحيث أن $Ax = 0$ ويرمز له بـ $N(A)$,. إنه فضاء جزئي من $\boldsymbol{R}^n$، تماماً كما كان فضاء الأعمدة فضاءً جزئياً من $\boldsymbol{R}^m$.

الشرط (١) محقق : إذا كان $Ax = 0$ و $Ax' = 0$ فان $A(x + x') = 0$. الشرط (٢) محقق : إذا كان $Ax = 0$ فان $A(cx) = 0$. كلا الشرطين لا يتحققان إذا كان الطرف الأيمن لايساوي الصفر . حلول المعادلة *المتجانسة* فقط $(b = 0)$ تكوّن فضاءً جزئياً . من السهل ايجاد الفضاء الصفري للمثال المذكور آنفاً :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

تعطي المعادلة الأولى $u = 0$ وتعطي الثانية حتماً $v = 0$. لذا فإن الفضاء الصفري لايحوي سوى المتجه الصفري والتركيب الوحيد الذي يعطي الصفر في الطرف الأيمن هو الذي يكون فيه $u = v = 0$.

سيتغير الوضع فيما لو أضفنا عموداً ثالثاً مكوناً من تركيب للعمودين الآخرين :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

إن فضاء الأعمدة للمصفوفة B هو فضاء أعمدة A نفسه وذلك لأن العمود الجديد يقع في المستوي الظاهر في الشكل (٢-١) ؛ ماهو إلا مجموع هذين العمودين اللذين انطلقنا منهما . لكن الفضاء الصفري لهذه المصفوفة B يحوي المتجه الذي مركباته 1,1,-1 أو أي مضاعف له :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ c \\ -c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

الفضاء الصفري للمصفوفة B هو المستقيم الذي يحوي جميع النقاط $x = c, y = c, z = -c$ حيث يمكن للعدد c أن يتحول من $-\infty$ إلى $+\infty$. (يمر هذا المستقيم من نقطة الأصل مثل كل فضاء جزئي) . إن لهذا الفضاء الصفري ذي البعد الواحد فضاءً متعامداً معه (مستوياً) يتعلق مباشرة بأسطر المصفوفة وهو ذو أهمية خاصة .

الخلاصة : نريد أن نكون قادرين ، في أي نظام $Ax = b$ على ايجاد كل الأطراف اليمنى المواتية b وكل حل للنظام $Ax = b$. يقع المتجه b في فضاء الأعمدة ويقع المتجه x في الفضاء الصفري . إن هذا يستدعي أن نحسب عدد أبعاد الفضاءات الجزئية التي ذكرناها سابقاً وأن نجد مجموعة متجهات مناسبة لتوليدها . ونأمل أن ينتهي بنا ذلك إلى فهم الفضاءات الجزئية الأربعة التي يرتبط بعضها ببعض بشكل صميمي كما ترتبط هي بالمصفوفة A؛ فضاء أعمدة A، الفضاء الصفري A ـ 1 ، والفضاءان المتعامدان معهما .

تمارين

٢-١-١ برهن أن شرطي فضاء المتجهات (١) و (٢) مستقلٌ أحدهما عن الآخر وذلك بانشاء :

(أ) مجموعة جزئية من فضاء ذي بعدين مغلقة بالنسبة لجمع المتجهات وكذلك بالنسبة للطرح ولكنها لا تحقق ذلك من أجل الضرب بعدد .

(ب) مجموعة جزئية من فضاء ذي بعدين (تختلف عن الربعين

المتعاكسين) مغلقة على الضرب بعدد ولكنها ليست كذلك بالنسبة لجمع المتجهات.

٢-١-٢ أي واحدة من المجموعات الجزئية التالية من R^3 تكون فضاءً جزئياً؟

(أ) مستوي المتجهات b حيث المركبة الأولى $b_1 = 0$.

(ب) مستوي المتجهات b حيث المركبة الأولى $b_1 = 1$.

(جـ) المتجهات b التي تحقق $b_1 b_2 = 0$ (إن ذلك اتحاد فضائين جزئيين، المستوي $b_1 = 0$ والمستوي $b_2 = 0$).

(د) المتجه الوحيد $b = (0,0,0)$.

(هـ) كل تراكيب المتجهين $(2,0,1) = y$ و $(1,1,0) = x$.

(و) المتجهات (b_1, b_2, b_3) التي تحقق العلاقة $b_3 - b_2 + 3b_1 = 0$.

٣-١-٢ صف فضاء الأعمدة والفضاء الصفري لكل من المصفوفتين:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad و \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

٤-١-٢ ماهو أصغر فضاء جزئي من فضاء المصفوفات من النوع 3×3 الذي يحوي جميع المصفوفات المتناظرة وجميع المصفوفات المثلثية الدنيا؟ ماهو أوسع فضاء جزئي محتوى في هذين الفضاءين الجزئيين معاً؟

٥-١-٢ في تعريف فضاء المتجهات يطلب من الجمع والضرب بعدد تحقيق الخواص التالية:

(١) $x + y = y + x$

(٢) $x + (y + z) = (x + y) + z$

(٣) يوجد متجه صفري وحيد يحقق $x + 0 = x$ لكل x.

(٤) لكل x يوجد متجه وحيد $-x$ بحيث يكون $x + (-x) = 0$.

(٥) $1x = x$

(٦) $(c_1 c_2)x = c_1(c_2 x)$

(٧) $c(x+y) = cx + cy$

(٨) $(c_1 + c_2)x = c_1 x + c_2 x.$

(أ) نفرض أن الجمع في R^2 يضيف واحداً إلى كل مركبة من ناتج الجمع العادي مثل $(9,2) = (5,0) + (3,1)$ عوضاً عن $(8,1)$ ، وأن الضرب بعدد لم يتغير . ماهي الخواص التي لم تتحقق من الخواص الثمانية أعلاه ؟

(ب) برهن أن مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة المزودة بالعمليتين $x+y$ و cx المعرفتين بحيث يساوي الناتجان على الترتيب المفهوم المعتاد من xy و x^c، تمثل فضاء متجهات . ماهو المتجه الصفري ؟

٢-١-٦ نفرض p مستوياً في الفضاء الثلاثي معادلته $x+2y+z=6$. ماهي معادلة المستوي p_0 المار من نقطة الأصل والموازي إلى p ؟

هل كل من p_0 و p فضاء جزئي من R^3 ؟ .

٢-١-٧ أي مجموعة ممايلي تمثل فضاءً جزئياً من R^∞ ؟

(أ) جميع المتتاليات من الشكل $(1,0,1,0,.....)$ التي تحوي عدداً غير منته من الأصفار .

(ب) جميع المتتاليات من الشكل $(x_1, x_2, ...)$ التي قيمها $x_j = 0$ من أجل قيمة معينة لـ j وحتى اللانهاية .

(جـ) جميع المتتاليات المتناقصة : $x_j + 1 \leq x_j$ لكل j.

(د) جميع المتتاليات المتقاربة : لـ x_j نهاية عندما $j \longrightarrow \infty$.

(هـ) جميع المتواليات الحسابية : $x_{j+1} - x_j$ يبقى نفسه لكل j .

(و) جميع المتواليات الهندسية : $(x_1, kx_1, k^2x_1, ...)$ لكل k و x_1 .

٢-١-٨ أي الأوصاف صحيحة ؟ تكوّن الحلول x للنظام :

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

مستوياً أومستقيماً أو نقطة أو فضاءً جزئياً أو فضاءً صفرياً لـ A أوفضاء أعمدة A.

٢-١-٩ بيّن أن مجموعة المصفوفات من النوع 2×2 غير الشاذة ليست فضاء متجهات . كذلك بيّن أن مجموعة المصفوفات الشاذة من النوع 2×2 ليست فضاء متجهات .

٢ ـ ٢ حل m معادلة في n مجهول

لقد أصبحت الآن طريقة الحذف مألوفة في حالة المصفوفات المربعة وإن مثالاً واحداً يكفي لتوضيح الامكانات الجديدة التي تظهر عندما تكون المصفوفة مستطيلة . يسير الحذف نفسه دون تغيير جوهري ولكن عندما نصل إلى مرحلة استخلاص الحل بوساطة التعويض التراجعي ، سوف يظهر بعض الاختلاف .

لعله من المفضل ، قبل عرض هذا المثال ، توضيح هذه الامكانات بالنظر في المعادلة العددية $ax = b$. إنها نظام مكون من معادلة واحدة بمجهول واحد . من الممكن أن تكون $3x = 4$ أو $0x = 0$ أو $0x = 4$ ، هذه الأمثلة الثلاثة تظهر أمامنا حالات ثلاث :

(١) إذا كان $a \neq 0$ فانه ، من أجل أي قيمة لـ b ، يوجد حل $x = b/a$ وهذا الحل وحيد . هذه الحالة ليست شاذة (هي حالة مصفوفة من النوع 1×1 قابلة للعكس) .

(٢) إذا كان $a = 0$ و$b = 0$ ، فإنه يوجد عدد غير منته من الحلول ؛ كل قيمة لـ x تحقق المعادلة $0x = 0$. إن هذه الحالة حالة عدم تعيين ؛ يوجد حل ولكنه غير وحيد .

(٣) إذا كان $a = 0$ و $b \neq 0$ فإنه لايوجد حل للمعادلة $0x = b$. إن هذه الحالة غير متسقة .

في حالة المصفوفات المربعة ، يمكن لهذه الحالات أن تظهر . سوف نستبدل "a $\neq 0$"

بـ "A" قابلة للعكس، لكن لايزال لـ A^{-1} معنى. في حالة المصفوفة المستطيلة، لايمكن للحالة الأولى أن تظهر؛ لايمكن أن نحصل على حل وأن يكون هذا الحل وحيداً، حل واحد x لكل b. يمكن أن يكون هناك عدد لانهائي من الحلول لكل b، أو عدد لانهائي لبعض قيم b وقد لايوجد حل من أجل قيم أخرى لـ b، أو حل وحيد لبعض قيم b وقد لايوجد أي حل لقيم أخرى.

نبدأ بمصفوفة من النوع 3×4، نتجاهل في البداية الطرف الأيمن b :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

المحور $a_{11}=1$ غير صفري، لذا، فان العمليات الأولية المعتادة تجعل العناصر الواقعة في العمود الأول وتحت هذا المحور أصفاراً :

$$A \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \end{bmatrix}.$$

لقد أصبح المرشح للمحور الثاني صفراً لذا ننظر فيما إذا كان أحد العناصر التي تقع تحته غير صفري وذلك لكي نجري مبادلة أسطر. في هذه الحالة، العنصر الذي يقع تحت المحور الصفري صفر أيضاً. لو كانت المصفوفة الأصلية مربعة لأشار ذلك إلى أن المصفوفة شاذة. بالنسبة لمصفوفة مستطيلة، علينا أن نتوقع مشكلات على كل حال، وليس هناك أي سبب يدعونا لانهاء عملية الحذف. كل مايمكننا عمله هو أن ننتقل إلى العمود التالي حيث المحور غير صفري. بطرح مثلي السطر الثاني من الثالث نجد :

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

بقول دقيق، نعمل بعدئذ على العمود الرابع. نجد صفراً آخر في موضع المحور لذا لايمكننا عمل أي شيء وتنتهي المرحلة التقدمية من الحذف.

إن الشكل النهائي هو المصفوفة U وهي أيضاً مثلثية عليا ولكن المحاور[١] ليست، بالضرورة، واقعة على القطر الرئيسي. الشيء المهم هنا أن العناصر غير الصفرية محجوزة بما يشبه "الدرج" أو شكل مدرج، كما توضح ذلك المصفوفة من النوع 5×9 الظاهرة في الشكل (٢-٢) حيث مثلت المحاور بصورة واضحة بينما يمكن لبقية العناصر الممثلة بنجوم أن تكون أو لاتكون أصفاراً.

$$U=\begin{bmatrix} \circledast & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & \circledast & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \circledast & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \circledast \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

شكل (٢-٢). العناصر غير الصفرية لنموذج مصفوفة مدرجة U.

يمكننا أن نلخص بالقول ماهو ظاهر في هذا الشكل:

(١) الأسطر غير الصفرية تأتي في المقدمة ـ وإلا يجب إجراء مبادلات أسطر ـ وستكون المحاور أول العناصر غير الصفرية في هذه الأسطر.

(٢) يقع تحت كل محور عمود من الأصفار ناتج عن عملية الحذف.

(٣) كل محور يقع عن يمين المحور المتعلق بالسطر الذي يسبقه وهذا ما يعطي الشكل المدرج.

---

(١) تذكر بأن ***المحاور ليست أصفاراً***. خلال عملية الحذف قد نصادف صفراً في موضع المحور وهو مؤقت؛ بمبادلة الأسطر أو بالتخلي عن عمود والانتقال إلى الذي يليه، تصل إلى صف من المحاور غير الصفرية تقع تحتها أصفار.

بما أننا انطلقنا من A وانتهينا بـ U، فان للقارىء المنتبه أن يسأل : هل لهذه المصفوفات علاقة بمصفوفة مثلثية دنيا L حيث $A = LU$ كما سبق ؟ لا يوجد أي سبب يمنع من ذلك لأن خطوات الحذف لم تتغير ؛ لاتزال كل خطوة تطرح مضاعفاً لسطر من آخر واقع تحته . علاوة على ذلك، عكس كل خطوة يجرى، أيضاً، كالسابق تماماً وذلك باضافة المضاعف الذي طرح، وإن هذه الخطوات العكسية تجرى بالترتيب الذي يسمح بتسجيل ناتجها مباشرة في L :

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

على القارىء أن يتحقق من أن $A = LU$ وأن يذكر أن L هنا ليست مستطيلة بل مربعة ومن الرتبة $m = 3$ حيث m عدد الأسطر في كل من U و A.

العملية الوحيدة التي لم تطلب في مثالنا، وقد نحتاج إليها بصورة عامة، هي مبادلة الأسطر . كما في الفصل الأول، يحتاج ذلك إلى تقديم مصفوفة مبادلة P يمكنها انجاز كل مبادلة أسطر ضرورية في A، قبل البدء بالحذف . في الحقيقة، بما أننا تعهدنا بالانتقال إلى العمود التالي، عندما لايكون في العمود المعني محور، فان ذلك لايحوجنا لأن نفرض أن المصفوفة غير شاذة. إليك النظرية الأساسية :

٢ ـ ب يقابل كل مصفوفة A من النوع $m \times n$ مصفوفة مبادلة P ومصفوفة مثلثية دنيا L، كل عنصر في قطرها يساوي الواحد ومصفوفة مدرجة U من النوع $m \times n$ بحيث يكون $PA = LU$.

هدفنا الآن هو حل (إذا كان هناك حل) المعادلة $Ax = b$.

لنفرض أننا انطلقنا بالحالة المتجانسة، $b = 0$. بما أن عمليات الأسطر لاتؤثر

على أصفار الطرف الأيمن للمعادلة $Ax = 0$، فمن السهل رد هذه المعادلة إلى الصورة $Ux = 0$:

$$Ux = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

تدخل المجاهيل u,v,w,y في فئتين، الفئة الأولى مكونة من *المجاهيل الأساسية* وهي التي تقابل *أعمدة المحاور*؛ الأول والثالث يحويان محورين، لذا، فان w و u هما المجهولان الأساسيان. أما الفئة الثانية فانها مكونة من المجاهيل الاختيارية وهي التي تقابل *الأعمدة التي لا تقع فيها محاور*، وهما العمودان الثاني والرابع لذا فان y و v هما المجهولان الاختياريان.

لايجاد الحل العام للمعادلة $Ux = 0$ (وهي المكافئة للمعادلة $Ax = 0$)، يمكننا أن نعطي قيماً اختيارية للمجاهيل الاختيارية. لنفرض أننا رمزنا لهاتين القيمتين بالحرفين y و v. يمكن، عندئذ، تعيين المجاهيل الأساسية بصورة تامة وحساب كل منها بدلالة المجاهيل الاختيارية، بتعويض تراجعي. لنعمل باتجاه الأعلى:

$3w + y = 0$ يؤدي إلى $w = -\frac{1}{3} y$

$u + 3v + 3w + 2y = 0$ يؤدي إلى $u = -3v - y$

يوجد هنا مالانهاية مزدوجة من حلول هذا النظام بوسيطين اختياريين ومستقلين y و v. الحل العام هو التركيب:

$$x = \begin{bmatrix} -3v - y \\ v \\ -\frac{1}{3} y \\ y \end{bmatrix} = v \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}. \qquad (١)$$

يرجى النظر، من جديد، في الشكل الأخير لحل المعادلة $Ax = 0$. يمثل المتجه $(-3,1,0,0)$ حلاً عندما يكون المجهولان الاختياريان $v = 1, y = 0$، و المتجه الأخير هو الحل عندما $v = 0, y = 1$. *إن كل حل هو تركيب خطي لهذين الحلين*. لذا، فان الطريقة الجيدة لايجاد جميع حلول النظام $Ax = 0$ هي :

١ـ بعد أن نصل بواسطة الحذف إلى $Ux = 0$، نعين المجاهيل الأساسية والمجاهيل الاختيارية.

٢ـ نعطي لأحد المجاهيل الاختيارية قيمة واحد وللمجاهيل الاختيارية الأخرى أصفاراً، ونحل النظام $Ux = 0$ بالنسبة للمتغيرات الأساسية.

٣ـ كل متغير اختياري يعطي الحل الخاص به بالخطوة الثانية، وتكوّن تراكيب هذه الحلول الفضاء الصفري ـ فضاء جميع حلول $Ax = 0$.

هندسياً، يمكن عرض الصورة التالية : في الفضاء ذي الأبعاد الأربعة، تكوّن حلول $Ax = 0$ فضاءً جزئياً ذا بعدين وهو الفضاء الصفري للمصفوفة A. في مثالنا، هذا الفضاء مستو مولد بالمتجهين $(-1,0,-1/3,1)$ و $(-3,1,0,0)$. مجموعة تراكيب هذين المتجهين تكونً مجموعة مغلقة بالنسبة للجمع والضرب بعدد. إن هاتين العمليتين تؤديان، فقط، إلى زيادة في حلول $Ax = 0$ وكل هذه التراكيب واقعة في الفضاء الصفري.

لقد وصلنا إلى المكان الذي يمكننا فيه أن نتعرف على نظرية ذات أهمية كبرى. لنفرض أننا انطلقنا بمصفوفة عدد أعمدتها يزيد على عدد أسطرها $n > m$. بما أنه من الممكن وجود مالايزيد عن m محوراً غير صفري (لايوجد قدر كاف من الأسطر يتسع لأكثر من ذلك)، سنجد *مالايقل عن* $n - m$ *من المتغيرات الاختياريةً*. قد يكون هناك، بالطبع، عدد أكبر من المتغيرات الاختيارية إذا أصبحت، كما في مثالنا، بعض الأسطر صفرية. لكن ذلك لايؤدي إلى أي مشكلة، على واحد على الأقل من المتغيرات أن يكون اختيارياً. يمكن إعطاء هذا المتغير قيمة اختيارية فيؤدي ذلك إلى النتيجة التالية :

٢ ـ جـ لكل نظام متجانس حل غير تافه، إذا كان عدد المجاهيل أكبر من عدد المعادلات ($n > m$) : يوجد حل x يختلف عن الحل التافه $x = 0$.

يجب أن يوجد، فعلاً، عدد غير منته من الحلول لأن كل مضاعف cx يحقق، أيضاً، المعادلة. أي $A\,(cx) = 0$. يحوي الفضاء الصفري المستقيم الحامل لـ x. إذا وجدت متغيرات اختيارية أخرى، فان الفضاء الصفري يصبح أكثر من مجرد مستقيم من فضاء ذي n بعداً. إن *الفضاء الصفري هو فضاء جزئي عدد أبعاده يساوي عدد المجاهيل الاختيارية*.

هذه الفكرة أساسية ـ عدد *أبعاد* فضاء جزئي ـ ستقدم بدقة في البند التالي. إنه عدد درجات الحرية.

تعدُّ الحالة غير المتجانسة $b \neq 0$ مختلفة تماماً. لنعد إلى مثالنا الأصلي $Ax = b$ ولنطبق على طرفي المعادلة العمليات التي نقلتنا من A إلى U. سيكون الناتج نظاماً مثلثياً علوياً $Ux = c$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 - 2b_1 \\ b_3 - 2b_2 + 5b_1 \end{bmatrix} \qquad (٢)$$

ليس المتجه c الظاهر في الطرف الأيمن، بعد خطوات الحذف، سوى $L^{-1}b$ كما هو معلوم من الباب السابق.

ليس من الواضح أن لهذا النظام من المعادلات حل. يظهر الشك بسبب المعادلة الثالثة : طرفها الأيسر صفر، وستكون *المعادلات* غير متسقة مالم يكن $b_3 - 2b_2 + 5b_1 = 0$. بقول آخر، *إن مجموعة المتجهات b المواتية ليست الفضاء الثلاثي الأبعاد كاملاً*. رغم أن عدد المجاهيل هنا يزيد على عدد المعادلات، فمن الممكن أن لايكون للنظام حل. لقد تعرفنا في البند (٢-١) على طريقة أخرى في النظر في هذه

المسألة نفسها : يمكن حل النظام $Ax = b$ إذا وإذا فقط كان b واقعاً في فضاء أعمدة A. هذا الفضاء الجزئي مولد بالأعمدة الأربعة للمصفوفة A (ليست U!) :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

بالرغم من أن هناك أربعة متجهات، إلا أن تراكيبها الخطية تملأ مستويا فقط في الفضاء ذي الأبعاد الثلاثة ؛ إلا أن العمود الثاني ماهو إلا ثلاثة أضعاف العمود الأول . أما العمود الرابع فإنه يساوي مجموع العمود الأول مع جزء من العمود الثالث . (لاحظ أن هذين العمودين غير المستقلين، الثاني والرابع، هما بالضبط العمودان اللذان ليس في أي منهما محور) . لقد أصبح الآن من الممكن وصف فضاء الأعمدة بشكلين مختلفين كلياً . من ناحية أولى، إنه المستوي المولد بالعمودين الأول والثالث ؛ العمودان الآخران واقعان في هذا المستوي وليس لهما أي تأثير جديد . من ناحية ثانية وبشكل مكافيء، إنه المستوي المكون من جميع النقاط (b_1, b_2, b_3) التي تحقق العلاقة $b_3 - 2b_2 + 5b_1 = 0$. هذا هو القيد الذي يجب فرضه على b لكي يكون النظام قابلاً للحل . كل عمود يحقق هذا القيد الذي فرض على b . هندسياً، سنرى أن المتجه $(5,-2,1)$ متعامد مع كل عمود .

إذا فرضنا أن المتجه b واقع في هذا المستوي وبالتالي ينتمي إلى فضاء الأعمدة، فانه من السهل ايجاد حل للنظام $Ax = b$. المعادلة الأخيرة من النظام تكافيء $0 = 0$. بالنسبة للمجهولين الاختياريين x و y، يمكن اعطاؤهما قيماً اختيارية كما سبق ذكره، وعندها، يمكن ايجاد المتغيرات الأساسية بتعويض تراجعي . لنأخذ مثالاً خاصاً تكون فيه مركبات b هي 1,5,5 (علينا أن ننتبه إلى العلاقة $b_3 - 2b_2 + 5b_1 = 0$) . يأخذ عندها النظام $Ax = b$ الصورة :

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

تحول عملية الحذف هذه العلاقة إلى الصورة :

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

المعادلة الأخيرة من الصورة $0 = 0$، كما يلاحظ، أما المعادلات الأخرى فتعطي :

$$w = 1 - \tfrac{1}{3} y \quad \text{أو} \quad 3w + y = 3$$

$$u = -2 - 3v - y \quad \text{أو} \quad u + 3v + 3w + 2y = 1$$

يلاحظ من جديد، أن هناك مالانهاية مزدوجة من الحلول. بالنظر إلى المركبات الأربعة معاً، يمكن كتابة الحل العام كما يلي :

$$x = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}. \qquad (٣)$$

إن ذلك يشبه حل $Ax = 0$ الظاهر في المعادلة (١)، باستثناء اختلاف واحد هو ادخال المتجه (-2,0,1,0) الذي هو *حل خاص* للنظام $Ax = b$. إنه يحل المعادلة، وكذلك الحدان الأخيران يؤديان إلى حلول أخرى (لأنهما يحققان $Ax = 0$). *كل حل للنظام* $Ax = b$ هو مجموع هذا الحل الخاص مع الحل العام للمعادلة $Ax = 0$.

$$x_{\text{عام}} = x_{\text{خاص}} + x_{\text{متجانس}}$$

يأتي الجزء المتجانس من الفضاء الصفري. ويأتي الحل الخاص الوارد في (٣) من حل المعادلة بعد جعل جميع المتحولات الإختيارية أصفاراً. هذا هو الجزء الجديد، فقط، لأن الفضاء الصفري قد حسب مسبقاً. عندما تضرب هذه المعادلة الواقعة ضمن الإطار بـ A، تحصل على $Ax_{\text{عام}} = b + 0$.

هندسياً ، يقع هذا الحل ، أيضاً ، في مستو من الفضاء الرباعي لكنه ليس فضاءً جزئياً منه وذلك لأن هذا المستوي لايمر من نقطة الأصل . يوازي هذا المستوي فعلاً الفضاء الصفري الذي رأيناه سابقاً ولكنه مزاح عنه بالحل الخاص . وهكذا أصبحت الحسابات تحوي خطوة جديدة :

١ ـ حول $A\,x = b$ إلى $U\,x = c$.

٢ ـ أجعل جميع المجاهيل الاختيارية أصفاراً وجد حلاً خاصاً .

٣ ـ اجعل الطرف الأيمن صفراً وأعط على التوالي لواحد من المجاهيل الاختيارية ، القيمة واحد واجعل المتغيرات الاختيارية الأخرى أصفاراً ، فتجد حلاً متجانساً (متجه x في الفضاء الصفري) .

لم يكن للخطوة الثانية ظهور سابقاً . عندما كانت المعادلة على الشكل $Ax = 0$ ، كان الحل الخاص هو المتجه الصفري . إنه يلائم النموذج ، إلا أن $x = 0$ خاص لم يكن مكتوباً في المعادلة (١) . والآن اضف إلى الحلول المتجانسة كما في (٣) .

تبرز طريقة الحذف عدد المحاور وكذلك عدد المجاهيل الاختيارية . إذا كان هناك r محوراً فهناك r مجهولاً أساسياً و $n - r$ مجهولاً اختيارياً . إن العدد r سوف يعطى إسماً ـ إنه رتبة المصفوفة ـ ويمكن تلخيص عملية الحذف بأكملها :

٢ د نفرض أن عملية الحذف قد أعادت $Ax = b$ إلى $Ux = c$. نفرض أن هناك r محوراً وأن الأسطر الـ $m - r$ الأخيرة في U صفرية . سيكون هناك حل إذا و إذا فقط كانت الـ $m - r$ مركبة الأخيرة من المتجه c أصفاراً . إذا كان $r = m$ فهناك دوماً حل . الحل العام هو مجموع حل خاص (حيث جميع المجاهيل الاختيارية أصفار) مع حل متجانس (حيث $n - r$ مجهولاً اختيارياً تعتبر وسطاء مستقلة) . إذا كان $r = n$ فليس هناك مجاهيل اختيارية والفضاء الصفري يحتوي فقط $x = 0$.

العدد r يدعى رتبة المصفوفة A .

لاحظ الحالتين المتطرفتين عندما تكون الرتبة أكبر ما يمكن :

(١) إذا كان $r = n$ فليس هناك أي مجهول اختياري في x.

(٢) إذا كان $r = m$ فليس هناك أسطر صفرية في U .

عندما يكون $r = n$ فان الفضاء الصفري يحتوي فقط $x = 0$ الحل الوحيد هو xخاص .

عندما يكون $r = m$ عندئذ لايوجد أي شرط على b، وفضاء الأعمدة هو كل R^m، ويمكن حل المعادلة مهما كان الطرف الأيمن .

ملاحظة اختيارية : في العديد من الكتب، لاتتوقف عملية الحذف عند U، ولكنها تستمر حتى تصبح المصفوفة على «شكل مدرج بأسطر مختصرة» . والاختلاف في ذلك هوأن جميع المحاور ترد إلى 1+، وذلك بقسمة كل سطر على عدد ثابت، كما أن أصفاراً تنشأ، ليس فقط تحت كل محور بل كذلك فوقه . بالنسبة للمصفوفة الموجودة في النص ، يكون هذا الشكل كمايلي :

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

إذا كانت A مصفوفة مربعة وغير شاذة فإننا نتوصل إلى مصفوفة الوحدة . إنها حالة من *طريقة غاوس - جوردان في الحذف*، بدلاً من طريقة غاوس العادية التي تجعل $A = LU$. تماماً ، كما هو الحال بالنسبة لطريقة غاوس - جوردان، إنها شديدة البطء في الحسابات العملية الخاصة بالمصفوفات المربعة وستفقد أية بنية حزامية في A^{-1} . يتطلب هذا الشكل المدرج الخاص عمليات عديدة كي يصبح الاختيار الأول في الحاسوب . ولكنه ، على كل حال، له أهمية نظرية «كشكل قانوني» لـ A : بصرف النظر عن اختيار العمليات الأولية، التي تتضمن مبادلة أسطر وقسمة أسطر ، فان الشكل المدرج ذي الأسطر المختصرة لـ A هو دوماً نفسه .

تمـاريـن

٢-٢-١ كم نموذجاً يمكنك أن تجد (مشابهاً لذلك الظاهر في الشكل ٢ـ ٢) من أجل مصفوفة مدرجة من النوع 3×2 . العناصر الواقعة عن يمين المحاور ليست بذات أهمية .

٢-٢-٢ كون أصغر نظام ممكن بعدد من المجاهيل يزيد على عدد المعادلات بحيث لن يكون لهذا النظام حل .

٢-٢-٣ أوجد تحليلاً LU للمصفوفة :

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

عين مجموعة متغيرات أساسية ومجموعة متغيرات اختيارية وأوجد الحل العام للنظام $Ax=0$. اكتبه على شكل العلاقة (١) . ماهي رتبة A؟

٢-٢-٤ عين من أجل المصفوفة :

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 4 & 0\\ 0 & 2 & 8 & 0\end{bmatrix},$$

الشكل المدرج U و المتغيرات الأساسيةو المتغيرات الاختيارية والحل العام للنظام $Ax=0$. ثم طبق الحذف على $Ax=b$ حيث b_1 و b_2 مركبتا الطرف الأيمن . أوجد شروط كون $Ax=b$ متسقاً (أي له حل) وأوجد الحل العام بالشكل الظاهر في المعادلة (٣) . ماهي رتبة A؟

٢-٢-٥ نفذ الخطوات ذاتها ، بفرض طرف أيمن b_1,b_2,b_3,b_4، على منقول المصفوفة .

$$A=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 2\\ 4 & 8\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

٢-٢-٦ اكتب الحل العام للنظام :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

كمجموع حل خاص للنظام $Ax = b$ مع الحل العام للنظام $Ax = 0$ كما في (٣).

٢-٢-٧ صف المجموعة المواتية للطرف الأيمن b في :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix},$$

وذلك بايجاد القيود التي يجب أن تفرض على b لكي تتحول المعادلة الثالثة إلى الشكل $0 = 0$ (بعد الحذف). ماهي الرتبة ؟ ماهو عدد المجاهيل الاختيارية وماهو عدد الحلول ؟

٢-٢-٨ أوجد قيمة c التي تجعل النظام التالي قابلاً للحل :

$$\begin{aligned} u + v + 2w &= 2 \\ 2u + 3v - w &= 5 \\ 3u + 4v + w &= c. \end{aligned}$$

٢-٢-٩ ماهي القيود التي تفرض على b_1 و b_2 (إن كانت ضرورية) كي يكون للنظام $Ax = b$ حل .

$$؟ \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

أوجد متجهين في الفضاء الصفري لـ A وكذلك الحل العام للنظام $Ax = b$

٢-٢-١٠ (أ) أوجد جميع حلول النظام :

$$Ux = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(ب) إذا تغير الطرف الأيمن من $(0,0,0)$ إلى $(a,b,0)$ فما هي الحلول عندئذ؟

٢-٢-١١ لنفترض أن الحل الوحيد لـ $Ax = 0$ (m معادلة و n مجهولاً) هو $x = 0$. ماهي رتبة A ؟

٢-٢-١٢ أوجد نظاماً $Ax = b$ من النوع 3×2 حله العام هو

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

٢-٢-١٣ أوجد نظاماً من النوع 3×3 حله العام كما سبق آنفاً، بحيث لن يكون له حل عندما $b_1 + b_2 \neq b_3$

٢-٢-١٤ أكتب نظاماً $Ax = b$ من النوع 2×2 بحيث يكون له حلول عديدة من الصنف x متجانس ولايكون له حل من الصنف x خاص. لذا فلن يكون للنظام أي حل.

٢-٣ الاستقلال الخطي، الأساس والسعة

لايعطي العددان n و m بذاتهما وصفاً كاملاً للحجم الحقيقي لنظام خطي. فلمصفوفة مثالنا الأخير ثلاثة أسطر و أربعة أعمدة، ولكن في الواقع، ليس السطر الأخير سوى تركيب من السطرين السابقين. بعد الحذف يصبح هذا السطر صفرياً وليس له أي تأثير حقيقي على المعادلات المتجانسة $Ax = 0$. الأعمدة الأربعة ليست أيضاً مستقلة وإن فضاء الأعمدة ينحط إلى مستو ذي بعدين، ذلك لأن العمود الثاني والعمود الرابع ماهما إلا تركيبان من الأول والثالث.

العدد المهم الذي بدأ بالظهور للعيان هو *الرتبة* r . لقد قدمت الرتبة سابقاً بطريقة حسابية محضة، كعدد *للمحاور* التي تظهر خلال الحذف ـ أو بشكل مكافىء لعدد الأسطر غير الصفرية في المصفوفة النهائية U . إن هذا التعريف آلي بحيث يمكن اعطاؤه إلى الحاسوب. لكن سيكون من الخطأ أن نكتفي بذلك التعريف لأن للرتبة معنى بسيطاً وحدسياً : *إنه عدد أسطر المصفوفة* A *المستقلة حقيقة*. نريد أن نعطي لهذا العدد وأعداد أخرى مشابهة تعاريف رياضية أكثر منها حسابية.

إن هدف هذا البند هو شرح واستخدام الأفكار الأربعة الآتية :

١ـ الاستقلال الخطي أو الارتباط

٢ـ توليد فضاء جزئي

٣ـ أساس فضاء جزئي

٤ـ سعة فضاء جزئي .

في الخطوة الأولى، سنعرف *الاستقلال الخطي*. إذا كانت لدينا المتجهات $v_1,....v_k$ فإننا نظر في تراكيبها الخطية $c_1v_1+c_2v_2+....+c_kv_k$. يؤدي التركيب التافه، حيث جميع الأحمال $c_i = 0$ ، كما هو واضح، إلى المتجه الصفري $0v_1 + 0v_2 +...+ 0v_k = 0$. السؤال الوارد هنا، هوما إذا كان هناك تركيب آخر يعطي الصفر أيضاً. إذا كان الأمر كذلك فالمتجهات *مرتبطة* وإلا فهي مستقلة.

٢ ـ هـ إذا كان كل تركيب غير تافه لهذه المتجهات غير صفري أي إن :

$c_1v_1+c_2v_2+....+c_nv_n = 0$ لايقع إلا إذا كان $c_1=c_2 =....=c_n = 0$ فان المتجهات المفروضة $v_1,....,v_n$ *مستقلة خطياً*. وإذا كان الأمر خلاف ذلك فان هذه المتجهات مرتبطة خطياً وإن واحداً منها تركيب خطي في المتجهات الباقية.

اكتشاف الارتباط الخطي سهل في حالة الفضاء ذي الأبعاد الثلاثة، إذا اعتبرنا المتجهات أسهماً منشأة من نقطة الأصل. يكون متجهان مرتبطين إذا وقعا على مستقيم

واحد وتكون ثلاثة متجهات مرتبطة إذا وقعت في مستو واحد. باختيار عشوائي، دون أي شرط خاص، يمكن الحصول على ثلاثة متجهات مستقلة خطياً. من ناحية أخرى، كل أربعة متجهات من R^3 مرتبطة خطياً دوماً.

مثال ١ إذا كان أحد المتجهات، ولنقل v_1، متجهاً صفرياً فان جملة المتجهات تكون مرتبطة خطياً حتماً، لأنه يمكننا أن نختار مثلاً $c_1 = 3$ و $c_i = 0$ لبقية المعاملات. إن هذا التركيب غير تافه ويعطي الصفر.

مثال ٢ أعمدة المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

مرتبطة خطياً لأن العمود الثاني يساوي ثلاثة أضعاف العمود الأول. إن تركيب الأعمدة بالأحمال 3,1,0,0- يعطي عموداً صفرياً.

الأسطر، كذلك، مرتبطة خطياً لأن السطر الثالث يساوي حاصل طرح خمسة أمثال السطر الأول من مثلي السطر الثاني. (الأمر ذاته يجب أن يقع من أجل تركيب b_1,b_2,b_3 ليصبح صفراً في الطرف الأيمن وذلك لكي يكون النظام متسقاً. مالم يكن $b_3 - 2b_2 + 5b_1 = 0$ فان المعادلة الثالثة لن تأخذ الصورة $0 = 0$).

مثال ٣ أعمدة المصفوفة المثلثية:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

مستقلة خطياً. يظهر ذلك بصورة آلية عندما تكون عناصر القطر غير صفرية. لنرى سبب ذلك، ننظر في تركيب للأعمدة يساوي الصفر:

$$c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

علينا أن نبين أن c_1, c_2, c_3 *جميعها يجب أن تكون أصفاراً*. المعادلة الأخيرة تعطي $c_3 = 0$ لذا، فالمعادلة التي قبلها تعطي $c_2 = 0$. وبالتعويض في المعادلة الأولى، نجد $c_1 = 0$. إن التركيب الوحيد الذي يساوي الصفر هو التركيب التافه، لذا، فان هذه المتجهات مستقلة خطياً.

إذا ماكتب ذلك بالشكل المصفوفي فانه يبدو كمايلي :

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

لقد بينا *أن الفضاء الصفري يحتوي فقط على المتجه الصفري* $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. هذا يعني تماماً قولنا إن الأعمدة مستقلة خطياً.

يمكن اجراء محاكمة مشابهة على أسطر A التي هي أيضاً مستقلة خطياً. لنفرض أن لدينا :

$$c_1\ (3, 4, 2) + c_2\ (0, 1, 5) + c_3\ (0, 0, 2) = (0, 0, 0)$$

من المركبة الأولى، نجد $3c_1 = 0$ أو $c_1 = 0$، ثم تعطي المركبة الثانية $c_2 = 0$ ونجد أخيراً $c_3 = $.

يمكن توسيع هذه الفكرة لتشمل أي مصفوفة مدرجة U ؛ يجب أن تكون الأسطر مستقلة خطياً. علاوة على ذلك، إذا نظرنا بامعان إلى الأعمدة التي تقع فيها محاور، نلاحظ أنها مستقلة خطياً. في مثالنا القريب حيث :

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

العمودان الأول والثالث مستقلان. لا توجد جملة مستقلة مكونة من ثلاثة من هذه الأعمدة، وبصورة أكيدة من أجل الأعمدة الأربعة كلها. صحيح أن العمودين الأول والرابع مستقلان، ولكن إذا جعلنا الواحد الأخير صفراً فانهما يصبحان

مرتبطين. *من المضمون أن الأعمدة التي تقع فيها المحاور مستقلة*. والقاعدة العامة هي :

٢ و إن الأسطر غير الصفرية التي عددها r في المصفوفة المدرجة U مستقلة خطياً وكذلك الأعمدة التي تحتوي محاور عددها r أيضاً.

مثال ٤ إن أعمدة مصفوفة الوحدة من النوع $n \times n$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & . & 0 \\ 0 & 1 & . & 0 \\ . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

هي جملة مستقلة خطياً. يعطى لهذه المتجهات الخاصة الرموز $e_1,...,e_n$؛ إنها تمثل متجهات الوحدة في الاتجاهات الإحداثية. في R^4، لدينا :

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

يوجد كثير من الجمل المكونة من أربعة متجهات من R^4 مستقلة خطياً ولكن استخدام هذه الجملة أسهل وأقوم.

للتحقق من كون جملة من المتجهات $v_1,...,v_n$ مستقلة خطياً، كوِّن المصفوفة A التي تقبل المتجهات المفروضة أعمدة لها ثم حل النظام $Ac=0$. تكون المتجهات مرتبطة خطياً إذا وإذا فقط وجد لهذه المعادلة حل يختلف عن $c=0$. إذا لم توجد متغيرات اختيارية (الرتبة تساوي n) فانه لايوجد فضاء صفري سوى $c=0$ وتكون هذه المتجهات مستقلة. إذا كانت الرتبة أقل من n فان أحد المجاهيل على الأقل، اختياري ويمكن اختياره غير مساوٍ للصفر وتكون الأعمدة عندئذ مرتبطة خطياً.

إن هناك حالة ذات أهمية خاصة . لنفرض أن لكل من هذه المتجهات m مركبة ، فتكون عندها A مصفوفة من النوع $m \times n$. إذا فرضنا $n > m$ سيكون من المتعذر أن تكون الأعمدة مستقلة . فلا يمكن أن يوجد n محوراً لأنه لاتوجد أسطر كافية لاستيعابها . لذا ، فان الرتبة ستكون أقل من n. لأي نظام متجانس $A\,c = 0$، يزيد فيه عدد المجاهيل عن عدد المعادلات ، حل $c \neq 0$.

٢-ز أي جملة مكونة من n متجهاً من R^m هي جملة مرتبطة خطياً إذاكان $n > m$.

على القارىء أن يدرك أن هذا النص شكل مموه للنص (٢ جـ) .

مثال ٥ لننظر في الأعمدة الثلاثة للمصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

لايمكن لهذه الأعمدة ، باعتبارها من R^2 أن تكون مستقلة ، ولكي نجد تركيباً لهذه الأعمدة مساوياً الصفر ، نحل النظام $A\,c = 0$:

$$A \longrightarrow U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

إذا أعطينا القيمة واحد للمتغير الاختياري c_3 فان التعويض التراجعي في $Uc = 0$ يعطي $c_1 = 1$ و $c_2 = -1$. بهذه الأحمال الثلاثة ، نجد أن العمود الأول ناقصاً العمود الثاني زائداً العمود الثالث يساوي الصفر .

توليد فضاء جزئي

الخطوة التالية في دراسة فضاء المتجهات هي تعريف ماذا يعني قولنا إن جملة متجهات *تولد فضاء* . لقد استخدمنا هذا المصطلح في بدء هذا الفصل عندما تكلمنا

عن المستوي المولّد بعمودي المصفوفة وسمينا هذا المستوي فضاء الأعمدة . نقدم فيمايلي التعريف العام :

٢ ح إذا تكوّن فضاء متجهات V من جميع التراكيب الخطية لجملة خاصة من المتجهات $w_1,....w_l$ ، فاننا نقول إن هذه الجملة تولد الفضاء . بقول آخر يمكن التعبير عن كل متجه v من V بتركيب خطي في المتجهات الـ w's
$v = c_1w_1 + ...+ c_lw_l$. من أجل معاملات c_i مناسبة .

من الممكن لأكثر من مجموعة من المعاملات c_i أن تعطي المتجه v ذاته ، ليس من الضروري أن تكون هذه المجموعة من المعاملات وحيدة لأنه يمكن للجملة المولدة أن تكون كبيرة بقدر مانريد حتى أنه من الممكن أن تحوي المتجه الصفري . (إلا إذا كانت الجملة المولدة مستقلة) .

مثال ٦ المتجهات الثلاثة $w_1= (1,0,0),w_2= (0.1.0),w_3= (-2,0,0)$ تولد المستوي x-y الواقع في الفضاء ذي الأبعاد الثلاثة . وكذلك المتجهان الأولان وحدهما ، بينما يولد المتجهان w_1 و w_3 مستقيماً ، فقط .

مثال ٧ فضاء الأعمدة لمصفوفة هو ، بالضبط ، *الفضاء المولد بهذه الأعمدة* . هذا التعريف صنع حسب الطلب . كما أن أخذ جميع تراكيب الأعمدة هو بالضبط كأخذ الفضاء الذي تولده . ضرب A في x يعطي تركيباً للأعمدة وهو متجه في فضاء الأعمدة .

إذا كانت الأعمدة هي المتجهات الاحداثية $e_1,...,e_n$ الصادرة عن مصفوفة الوحدة فإنها تولد $\boldsymbol{R}^n$. كل متجه $b = (b_1,....,b_n)$ هو تركيب خطي في تلك الأعمدة . في هذا المثال ، الأحمال هي المركبات b_i نفسها : $b = b_1e_1 + ...+ b_ne_n$. ولكن ليست أعمدة مصفوفة الوحدة ، فقط ، هي التي تولِّد $\boldsymbol{R}^n$!

لكي نقرر ما إذا كان b تركيباً خطياً في الأعمدة، علينا أن نحل المعادلة $Ax=b$. ولكي نبين ما إذا كانت الأعمدة مستقلة، علينا أن نحل المعادلة $Ax=0$. *إن التوليد يتضمن فضاء الأعمدة بينما الاستقلال يتضمن الفضاء الصفري*. الفضاء الأول يجب أن يكون كبيراً إلى حد كاف بينما الآخر ينبغي أن يحتوي على المتجه الصفري فقط. من أجل المتجهات الاحداثية $e_1,\ldots,e_n$، يمكن اجراء الاختبارين بسهولة: إنها تولد $\mathbf{R}^n$ وهي مستقلة خطياً. بكلام بسيط، لاتوجد متجهات في تلك الجملة زائدة عن اللزوم. يقودنا ذلك إلى مفهوم الأساس.

٢ ط *أساس* فضاء متجهات هو جملة من المتجهات تتمتع بالخاصتين التاليتين:

(١) إنها مستقلة خطياً.

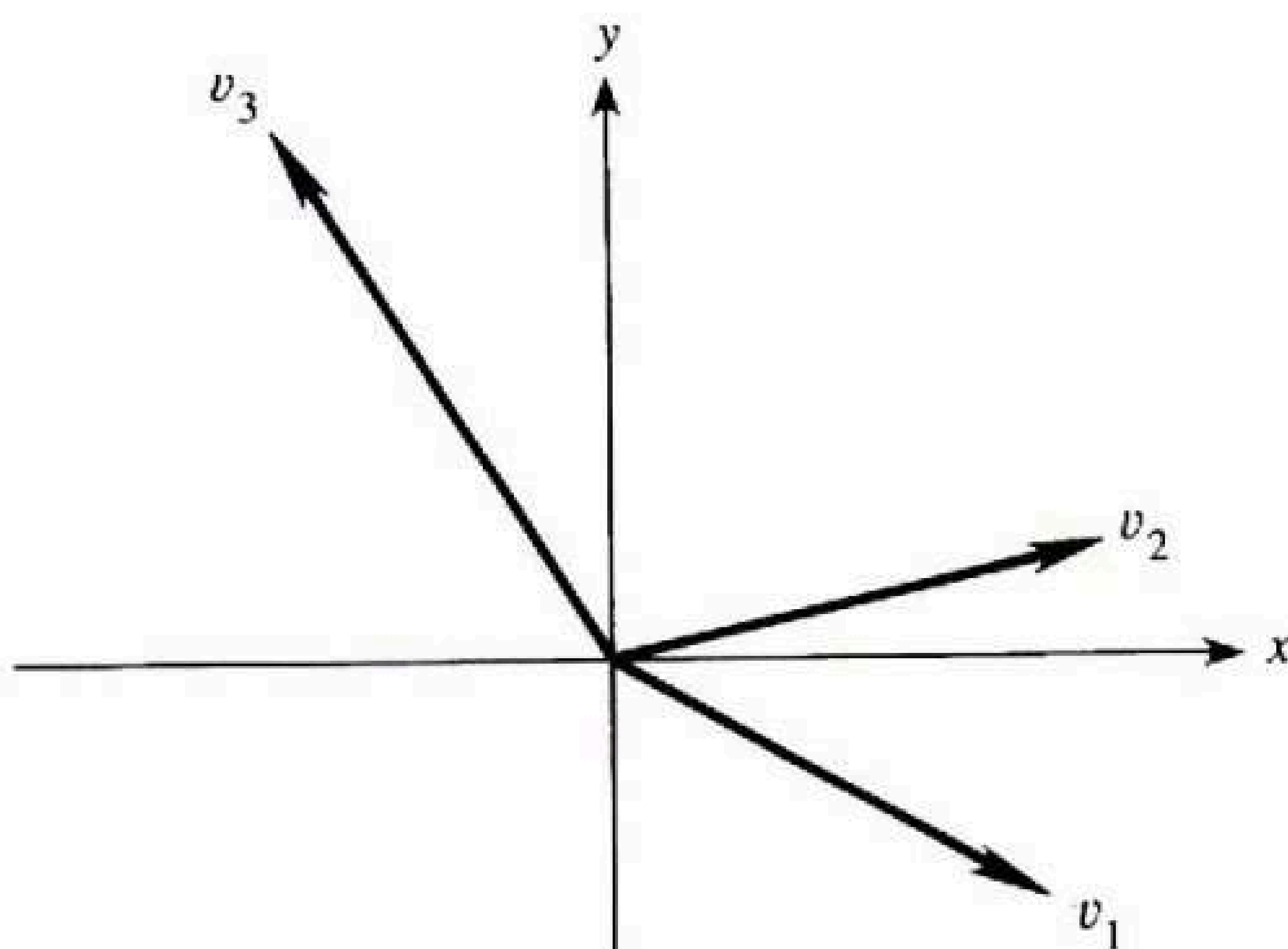
(٢) إنها تولِّد الفضاء.

يعدُّ اجتماع هاتين الخاصتين أمراً أساسياً في الجبر الخطي. إن ذلك يعني أن كل متجه في الفضاء هو تركيب من متجهات الأساس، لأنها تولده. فان ذلك يعني أن التركيب وحيد: إذا كان $v=a_1v_1+\ldots+a_kv_k$ وكذلك $v=b_1v_1+\ldots+b_kv_k$ فان الطرح يؤدي إلى $\Sigma(a_i-b_i)v_i=0$. والآن يلعب الاستقلال دوره، يجب أن يكون كل معامل a_i-b_i صفراً، لذا فإن $a_i=b_i$، *وهناك طريقة واحدة، فقط، لكتابة v كتركيب في متجهات الأساس*.

ولعله من الأفضل أن نقول هنا إن المتجهات الإحداثية $e_1,\ldots,e_n$ ليست الأساس الوحيد لـ $\mathbf{R}^n$. تعتبر بعض الأشياء في الجبر الخطي وحيدة ولكن ليست هذه منها. فلفضاء المتجهات عدد *لانهائي من الأسس المختلفة*. عندما تكون مصفوفة مربعة قابلة للعكس، تكون أعمدتها مستقلة ــ وهي تكوِّن أساساً لـ $\mathbf{R}^n$. إن عمودي أي مصفوفة غير شاذة مثل:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

يكوّنان أساساً لـ R^2. كل متجه ثنائي البعد هو تركيب من هذين العمودين، وهما مستقلان.



شكل (٢-٣). جملة مولدة وأساس في R^2.

مثال ٨ لننظر في المستوي x-y المعتاد (الشكل ٢-٣) الذي يمثل R^2. إن المتجه v_1 منفرداً، مستقل خطياً ولكن لايولد R^2. المتجهات الثلاثة v_1, v_2, v_3 تولد حتماً R^2 ولكنها غير مستقلة خطياً. *لكل إثنين* من هذه المتجهات مثل v_1, v_2 هاتان الخاصتان ـ إنهما يولدان وهما مستقلان، لذا، فانهما يكونان أساساً. لاحظ ثانية أنه *ليس لفضاء المتجهات أساس وحيد*.

مثال ٩ لننظر في المصفوفة المدرجة U ذات النوع 3×4:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

تولد أعمدتها الأربعة فضاء الأعمدة، كالمعتاد، ولكنها غير مستقلة. هناك عدد من الأسس المحتملة ولكننا سنقترح اختياراً خاصاً: *الأعمدة التي تحوي محاور* (في

هذه الحالة الأول والثالث، اللذان يقابلان المجهولين الأساسيين) هي *أساس لفضاء الأعمدة*. لقد ذكرنا في (٢ ـ و) أن هذين العمودين مستقلان ومن السهل أن نرى أنهما يولدان هذا الفضاء. في الواقع، إن فضاء أعمدة U هو المستوي x-y في $\boldsymbol{R}^3$. إنه ليس مطابقاً لفضاء أعمدة A.

وجملة القول: إن أعمدة مصفوفة تولد فضاء أعمدتها. إذا كانت مستقلة، فإنها أساس لفضاء الأعمدة ـ سواء كانت المصفوفة مربعة أم مستطيلة. إذا كنا نتكلم عن الفضاء $\boldsymbol{R}^n$ بأكمله وتطلبنا من الأعمدة أن تكون أساساً لذلك الفضاء، عندئذ، لابد أن تكون المصفوفة مربعة وقابلة للعكس.

سعة فضاء متجهات

رغم أن اختيار الأساس ليس وحيداً، بل هناك عدد غير منته من الاحتمالات الصالحة لذلك، فهناك شيء مشترك بين كل هذه الاختيارات هو خاصة ذاتية للفضاء نفسه:

٢ ي أي أساسين لفضاء متجهات يحويان العدد ذاته من المتجهات. إن هذا العدد المشترك بين كل الأسس والذي يعبر عن عدد "درجات الحرية" للفضاء يدعى *عدد أبعاد* (سعة) الفضاء V (١).

طبعاً، علينا أن نبرهن هذه الحقيقة: وهي أن كل أساس ممكن يحوي العدد نفسه من المتجهات. نطلب أولاً من القارىء النظر إلى الخلف في مجموعة الأمثلة وأن يذكر عدد أبعاد كل منها.

---

(١) عليك أن تتذكر أن التعبير «عدد أبعاد» قد استخدم بطريقتين مختلفتين. نقول عن متجه إن عدد أبعاده أربعة ونعني بذلك أن له أربع مركبات أو إنه عنصر في $\boldsymbol{R}^4$. لقد عرفنا الآن فضاءً جزئياً عدد أبعاده أربعة، مثال ذلك مجموعة من متجهات $\boldsymbol{R}^6$ فيها المركبتان الأولى والأخيرة تساويان الصفر. إن عناصر هذا الفضاء الجزئي الرباعي البعد هي متجهات عدد أبعادها ستة مثل $(0,5,1,3,4,0)$.

إن للمستوي x-y، (الشكل ٢-٣)، متجهين في كل أساس، وإن عدد أبعاده اثنان. في الفضاء ثلاثي البعد، نحتاج إلى ثلاثة متجهات إما باتجاه المحاور x-y-z أو باتجاهات ثلاثة أخرى (مستقلة خطياً). *إن سعة الفضاء* R^n هو n. لفضاء أعمدة U في المثال (٩) بُعْدان؛ لقد كان فضاءً ثنائي البعد في R^3. للمصفوفة الصفرية وضع استثنائي: جميع أعمدتها وأسطرها متجهات صفرية. من المتفق عليه أن نعتبر المجموعة الخالية أساساً لمثل هذا الفضاء وأن عدد أبعاده يساوي الصفر.

النظرية ٢ ـ ي تكافىء، ضمن هذا المفهوم لعدد الأبعاد، النظرية التالية:

٢ ك إذا فرضنا أن كلاً من المجموعتين $v_1,....,v_m$ و $w_1,....,w_n$ أساس لفضاء متجهات V فإن $m = n$.

البرهان: لنفرض أن إحدى المجموعتين أصغر من الأخرى ولنقل مثلاً، إن $n> m$. نريد أن نبرهن أن هذا الفرض يوصلنا إلى التناقض. بماأن المتجهات v أساس فإنها تولد الفضاء وإنه يمكن كتابة كل w_j كتركيب خطي في v:

$$w_j = a_{1j} v_1 + ... + a_{mj} v_m = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} v_i .$$

يمكن كتابة ماسبق بالرمز المصفرفي $W = VA$، حيث المتجهات w تشغل أعمدة المصفوفة W وتشغل المتجهات v أسطر المصفوفة V. ليس هناك طريقة لمعرفة المعاملات a_{ij}، لكن علينا أن نعرف الأمر المهم: A مصفوفة من النوع $m\times n$ حيث $n> m$. استنادا إلى (٢ جـ) هناك حل غير الحل التافه للنظام $Ac = 0$، بالضرب بـ V نجد أن $VAc = 0$ أو $Wc = 0$. وهذا يعني أن مجموع المتجهات w_i المحملة بالمعاملات c_j يساوي الصفر، أي أن المتجهات w_j ليست مستقلة خطياً. بماأن هذا يناقض الفرض، وهو كون هذه الجملة أساساً، لذا، فان علينا أن نرفض كون $n> m$.

هذا البرهان هو نفسه الذي بينا فيه أن كل جملة مكونة من $m+1$ متجهاً من $\boldsymbol{R}^m$ مرتبطة خطياً. إن برهاناً مشابهاً يمكن تعميمه على أية فضاءات متجهات ليست بالضرورة فضاءات متجهات الأعمدة. بالفعل، يمكننا أن نرى هذه النتيجة العامة كمايلي: *في فضاء جزئي عدد أبعاده* k *، لاتوجد جملة مستقلة خطياً مكونة من أكثر من* k *متجهاً كما أنه لاتوجد جملة مكوَّنة من أقل من* k *متجهاً قادرة على توليد هذا الفضاء.*

توجد نظريات «ثنوية» نذكر منها واحدة؛ إنها تسمح بالإنطلاق من مجموعة قد تكون أقل أو أكثر من اللازم والإنتهاء من أن نجعل منها أساساً.

٢ ـ ل يمكن توسيع أي مجموعة مستقلة خطياً من V لتصبح أساساً له وذلك باضافة متجهات أخرى إذا كان ذلك ضرورياً.

يمكن اختصار أي مجموعة مولدة للفضاء V بحيث تصبح أساساً وذلك بحذف بعض متجهاتها عند الضرورة.

إن هذه النقطة تعني أن الأساس مجموعة *مستقلة عظمى* لايمكنها أن تكون أوسع من ذلك دون أن تخسر استقلالها كما أنه لايمكنها أن تكون أصغر من ذلك وتبقى *مولدة للفضاء.*

هناك ملاحظة أخيرة حول لغة البرمجة الخطية. إننا لانستخدم أبداً التعابير الآتية: "أساس مصفوفة" أو "رتبة فضاء" أو "سعة الأساس" فليس لها أي معنى. إنها سعة *فضاء الأعمدة* المساوي لرتبة المصفوفة كما سنبرهن ذلك في البند التالي.

تمـاريـن

٢-٣-١ قرر ماإذا كانت المتجهات التالية مستقلة خطياً أم لا وذلك بحل :

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + c_4 v_4 = o$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

قرر كذلك فيمـا إذا كانت تولـد R^4 وذلك بحل

$$c_1 v_1 + \dots + c_4 v_4 = (0,0,0,1)$$

٢-٣-٢ قرر الارتباط أو الاستقلال لمايلي :

أ) $(1,1,2)$, $(1,2,1)$, $(3,1,1)$ ؛

ب) $v_1 - v_2$, $v_2 - v_3$, $v_3 - v_4$, $v_4 - v_1$ ، لأي متجهات v_1, v_2, v_3, v_4 ؛

جـ) $(1,1,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,1)$, (x, y, z) ، لأي قيم لـ x, y, z .

٢-٣-٣ برهن أنه إذا كان أي عنصر قطري من المصفوفة التالية مساوياً الصفر فان أسطر هذه المصفوفة مرتبطة خطياً .

$$T = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$$

٢-٣-٤ هل صحيح أنه إذا كانت المتجهات v_1, v_2, v_3 مستقلة خطياً فان الجملة $w_1 = v_1 + v_2$, $w_2 = v_1 + v_3$, $w_3 = v_2 + v_3$ مستقلة خطياً ، أيضاً؟ (ارشاد : افرض تركيباً $c_1 w_1 + c_2 w_2 + c_3 w_3 = 0$ ثم أوجد القيم الممكنة لـ c_i) .

٢-٣-٥ افرض أنه يراد دراسة استقلال مجموعة متجهات موضوعة في أسطر مصفوفة A عوضاً عن أعمدتها ، فهل يمكن ، بطريقة الحذف ، أن نقرر الاستقلال أو عدمه ؟ طبق ذلك على متجهات التمرين (٢-٣-١) .

٢-٣-٦ حدد ، هندسياً ، الفضاء الجزئي من R^3 المولد بـ :

أ) $(0,2,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,0)$ ؛

ب) $(0,2,1)$, $(0,1,1)$, $(0,0,1)$ ؛

جـ) جميع هذه المتجهات الستة . أي اثنين منها يكوّنان أساساً؟

د) جميع المتجهات التي مركباتها موجبة .

٢-٣-٧ قرر فيما إذا كان المتجه b واقعاً في الفضاء الجزئي المولد بالمتجهات $w_1,\ldots,w_l$ ، اجعل المتجهات w أعمدة مصفوفة A ثم حاول حل النظام $Ax=b$. ماهي النتيجة من أجل :

(أ) $w_1=(1,1,0),\ w_2=(2,2,1),\ w_3=(0,0,2),\ b=(3,4,5)$

(ب) $w_1=(1,2,0),\ w_2=(2,5,0),\ w_3=(0,0,2),\ w_4=(0,0,0)$ ولأي b ؟

٢-٣-٨ صف بالقول أو برسم في المستوي x-y فضاء الأعمدة وفضاء الأسطر للمصفوفة $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&0\end{bmatrix}$ وكذلك للمصفوفة A^2. اعط أساساً لفضاء الأعمدة .

٢-٣-٩ بتعيين مواقع المحاور ، أوجد أساساً لفضاء أعمدة المصفوفة :

$$U=\begin{bmatrix}0&1&4&3\\0&0&2&2\\0&0&0&0\\0&0&0&6\end{bmatrix}.$$

عبر عن كل عمود ليس من الأساس بتركيب خطي في أعمدة الأساس . أوجد كذلك مصفوفة A لها الشكل المدرج المعطى ولكن بفضاء أعمدة مختلف .

٢-٣-١٠ نفرض أننا اعتبرنا كل مصفوفة من النوع 2×2 متجهاً ، رغم أنها ليست متجهاً بالمعنى المستعمل . لقد قدمنا قواعد لجمع المصفوفات وضربها بعدد وبينا أن هذه المجموعة من المصفوفات مغلقة بالنسبة لهاتين العمليتين . أوجد أساساً لفضاء المتجهات هذا . ماهو الفضاء الجزئي المولد بمجموعة جميع المصفوفات المدرجة U ؟

٢-٣-١١ أوجد اساسين مختلفين للفضاء الجزئي من R^3 الذي فيه المركبتان الأوليان متساويتان.

٢-٣-١٢ أوجد مثالاً معاكساً للقضية التالية : إذا كان $v_1,\ldots,v_4$ أساساً لفضاء المتجهات R^4 وكان W فضاءً جزئياً منه، فان مجموعة جزئية من هذا الأساس تكوّن أساساً لـ W.

٢-٣-١٣ أوجد عدد أبعاد كل من :

أ) فضاء جميع متجهات R^4 التي مجموع مركباتها يساوي الصفر.

ب) الفضاء الصفري لمصفوفة الوحدة من النوع 4×4.

جـ) فضاء جميع المصفوفات التي من النوع 4×4.

٢-٣-١٤ وسع مجموعة متجهي سطري المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ لتصبح أساساً لـ R^3.
خفض عدد متجهات أعمدة هذه المصفوفة لتصبح أساساً لـ R^2.

٢-٣-١٥ لنفرض أن k هو عدد أبعاد V، برهن أن :

١) أي مجموعة مستقلة مكونة من k متجهاً تصلح أساساً له،

٢) أي مجموعة مكونة من k متجهاً تولد V تصلح أساساً له.

بقول آخر إذا علم أن عدد المتجهات ملائم، فان هاتين الخاصتين تؤدي إحداهما إلى الأخرى.

٢-٣-١٦ أوجد عدد أبعاد فضاء المصفوفات المتناظرة من النوع 3×3 وأوجد أساساً لهذا الفضاء.

٢-٣-١٧ برهن أنه إذا كان كل من W و V فضاءً جزئياً ثلاثي الأبعاد من R^5، فإن هناك متجهاً غير صفري مشتركاً بينهما. ارشاد : انطلق من أساسين لهذين الفضائين الجزئيين، يبلغ عدد متجهاتهما معاً ستة متجهات.

٢-٢-١٨ *صح أم خطأ* :

أ) إذا كانت أعمدة A مستقلة خطياً، عندئذ يكون للنظام $Ax = b$ حل وحيد لكل b.

ب) ليس لمصفوفة من النوع 7×5 أعمدة مستقلة خطية .

٢-٣-١٩ لنفرض أن n متجهاً من $\boldsymbol{R}^m$ دخلت كأعمدة في A. إذا كانت مستقلة خطياً، فما هي رتبة A ؟ إذا ولّدت $\boldsymbol{R}^m$ فما هي الرتبة في هذه الحالة ؟ إذا كونت أساساً لـ $\boldsymbol{R}^m$ فماذا يكون حينئذ ؟

٢-٣-٢٠ في فضاء المصفوفات التي من النوع 2×2، أوجد أساساً للفضاء الجزئي المكون من المصفوفات التي مجاميع أسطرها ومجاميع الأعمدة فيها كلها متساوية . (بالإضافة إلى ذلك : أوجد خمس مصفوفات من النوع 3×3 مستقلة خطياً تحقق الخاصة المذكورة)

٢-٣-٢١ إذا كانت A مصفوفة من النوع 17×64 ورتبتها 11 ، فكم عدد المتجهات المستقلة التي تحقق $Ax = 0$؟ وكم عدد المتجهات المستقلة التي تحقق $A^T y = 0$

٢-٣-٢٢ لنفترض أن V فضاء متجهات سعته (7) و W فضاء جزئي سعته (4) فما هو الصح وماهو الخطأ فيما يلي :

(١) كل أساس لـ W يمكن توسعته لأساس لـ V وذلك بإضافة ثلاثة متجهات أخرى .

(٢) كل أساس لـ V يمكن تخفيضه لأساس لـ W وذلك بحذف ثلاثة متجهات .

٢-٣-٢٣ لنفترض أن $v_1, \ldots, v_9$ هي تسعة متجهات في $\boldsymbol{R}^7$.

(أ) هذه المتجهات (هي) (ليست) (يجوز أن تكون) مستقلة خطياً .

(ب) هذه المتجهات (تولد) (لاتولد) (يجوز أن تولد) $\boldsymbol{R}^7$.

(جـ) إذا كانت هذه المتجهات أعمدة في A فإن النظام $Ax = b$ (له حل) ، (ليس له حل) ، (يمكن أن يكون له حل) .

٢-٤ الفضاءات الجزئية الأربعة الأساسية

لقد عالج البند السابق التعاريف ولم يهتم بالبناء. فنحن نعرف ماهو الأساس ولكننا لانعرف كيف نحصل عليه. سننطلق الآن من وصف واضح للفضاء الجزئي راغبين في ايجاد أساس واضح له.

يعرف الفضاء الجزئي باحدى طريقتين: بالطريقة الأولى نعطي مجموعة من المتجهات تولد الفضاء؛ إن ذلك هو حال فضاء الأعمدة حيث تكون الأعمدة معروفة. بالطريقة الثانية، نعطي قائمة القيود المفروضة على الفضاء الجزئي، فلا تكشف هذه الطريقة عن المتجهات الواقعة في الفضاء بل عن الشروط التي عليها تحقيقها. الفضاء الصفري مثلاً، يتكون من جميع المتجهات التي تحقق $Ax=0$ وكل معادلة في هذا النظام تمثل قيداً. في الصورة الأولى للتعريف، يمكن وجود أعمدة غير مفيدة، في الصورة الثانية، يمكن وجود قيود مكررة. في كل من الحالتين لايمكن إظهار أساس بمجرد النظر بل هناك ضرورة لطريقة نظامية.

يمكن للقارىء أن يخمن كيف يمكن أن تكون هذه الطريقة. سنبين، انطلاقاً من المصفوفات، P,L,U التي حصلنا عليها بالحذف، كيف نجد أساساً لكل فضاء جزئي مرتبط بـ A. لذا، حتى لو أضحى هذا البند أطول من غيره، فانه لابد أن ننظر إلى الحالة القصوى:

عندما تكون الرتبة كبيرة بقدر الإمكان، $r=n$ *أو* $r=m$ *أو* $r=m=n$ *، فان للمصفوفة في هذه الحالة معكوساً من اليسار* B *أو معكوساً من اليمين* C *أو معكوساً من الطرفين* A^{-1}.

للإحاطة بالمناقشة كاملة سننظر في كل من الفضاءات الجزئية الأساسية الأربعة على حدة. اثنان منها مألوفان واثنان جديدان.

١ - ***فضاء أعمدة*** A ، ويرمز له بـ $\mathscr{R}(A)$.

٢ - ***الفضاء الصفري*** لـ A، ويرمز له بـ $\mathscr{N}(A)$.

٣ ـ ***فضاء أسطر*** A ، والذي هو فضاء أعمدة A^T، إنه $\mathscr{R}(A^T)$ وتولده أسطر A.

٤ ـ ***الفضاء الصفري الأيسر*** لـ A الذي هو الفضاء الصفري لـ A^T، إنه يحوي جميع المتجهات y التي تحقق $A^Ty = 0$ ويرمز له بـ $\mathscr{N}(A^T)$.

مما يلفت النظر بالنسبة للفضائين الأخيرين، أنهما *يصدران عن* A^T. إذا كانت A مصفوفة من النوع $m \times n$ فانك تستطيع أن ترى أي فضاءات "مضيفة" تحوي الفضاءات الجزئية الأربعة وذلك بالنظر إلى عدد المركبات :

الفضاء الصفري $\mathscr{N}(A)$ وفضاء الأسطر $\mathscr{R}(A^T)$ هما فضاءان جزئيان في $\boldsymbol{R}^n$.

الفضاء الصفري الأيسر $\mathscr{N}(A^T)$ وفضاء الأعمدة $\mathscr{R}(A)$ هما فضاءان جزئيان من $\boldsymbol{R}^m$.

للأسطر n مركبة وللأعمدة m. بالنسبة للمصفوفة البسيطة :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

فضاء الأعمدة هو المستقيم الحامل لـ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. أما فضاء الأسطر فهو المستقيم الحامل لـ $[\,1\ 0\ 0\,]^T$. إنه في $\boldsymbol{R}^3$. الفضاء الصفري هو مستوٍ في $\boldsymbol{R}^3$ والفضاء الصفري الأيسر هو مستقيم في $\boldsymbol{R}^2$:

$\mathscr{N}(A)$ يحوي $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ، $\mathscr{N}(A^T)$ يحوي $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

لاحظ أن جميع المتجهات هي متجهات أعمدة. حتى الأسطر تم نقلها، وفضاء أسطر A هو فضاء *أعمدة* A^T. عادة، المصفوفة البسيطة هي U بعد الحذف. ومسألتنا هي ربط الفضاءات الخاصة بـ U مع الفضاءات الخاصة بـ A. لذا، فإننا نلاحظ المصفوفة المدرجة U وفي الوقت نفسه، المصفوفة الأصلية :

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

رغبة في التجديد، سنعالج الفضاءات الجزئية الأربعة مرتبة حسب الأهمية.

٣ ـ فضاء أسطر A. بالنسبة لمصفوفة مدرجة مثل U، سيكون فضاء الأسطر سهلاً. إنه يحوي جميع تراكيب الأسطر كما هو شأن أي فضاء أسطر ـ إلا أن السطر الثالث هنا لايشارك بأي شيء. السطران الأولان هما أساس فضاء الأسطر. هناك قاعدة مشابهة تسري على أي مصفوفة مدرجة لها r محور و r سطر غير صفري: *أسطرها غير الصفرية مستقلة وعدد أبعاد فضاء أسطرها* r. لحسن الحظ، يتم التعامل مع المصفوفة الأصلية A بالسهولة نفسها. فسطرها الثالث لايؤدي إلى شيء أيضاً.

٢ م: لفضاء أسطر A أبعاد عددها r وهو يساوي عدد أبعاد فضاء أسطر U، وله كذلك الأسس ذاتها، لأن *فضاءي الأسطر متطابقان*.

سبب ذلك أنه ليس لأي عملية أولية تأثير على فضاء الأسطر بل تتركه كما هو. إن أسطر U هي تراكيب من أسطر المصفوفة الأصلية A. لذا. فإن فضاء أسطر U لايحتوي على جديد. بالوقت ذاته، بما أن كل خطوة يمكن عكسها، فليس من شيء ضائع، يمكن استرجاع أسطر A من U. ينتج السطر الثاني من U عن السطرين الأول والثاني من A. تنتج أسطر A عن السطرين الأول والثاني من U. صحيح أن A و U لهما أسطر مختلفة إلا أن *تراكيب* الأسطر متطابقة. إن هذه التراكيب هي التي تصنع فضاء الأسطر.

لاحظ أننا لم ننطلق من أسطر A (عددها m) التي تولد فضاء الأسطر ونحذف $m - r$ سطراً منها لنحصل بذلك على أساس. استناداً إلى ٢ ل، يمكننا أن نفعل ذلك. ولكن سيكون من الصعب أن نقرر مانبقي من الأسطر ومانحذف. لذا، كان من الأسهل أن نأخذ الأسطر غير الصفرية في U.

٢ – الفضاء الصفري للمصفوفة A: لنذكر أن الغرض الأساسي للحذف كان تبسيط نظام معادلات خطية دون أي تغيير في حلها. لقد رد النظام $Ax = 0$ إلى النظام

$Ux = 0$ ، وهذه العملية قابلة للعكس . ***لذا ، فالفضاء الصفري للمصفوفة A هو نفسه الفضاء الصفري للمصفوفة U*** . من بين القيود المفروضة بالمعادلات الـ m وهي $Ax = 0$، يوجد r قيداً ، فقط مستقلة ، . وهي معينة بأي r من الأسطر المستقلة خطياً من A، أو (أكثر وضوحاً) بالأسطر غير الصفرية من U التي عددها r . إذا اخترنا التعبير الأخير فإن ذلك يكشف عن طريقة محددة لايجاد أساس للفضاء الصفري .

٢ ن للفضاء الصفري $\mathcal{N}(A)$ أبعاد عددها $n - r$. يمكن تكوين أساس له برده إلى النظام $Ux = 0$ الذي له $n - r$ من المتغيرات الاختيارية ـ تقابل أعمدة U التي لاتحوي محاور . لذا نعطي على التوالي ، القيمة (1) لمتغير اختياري ونعطي لبقية المتغيرات الاختيارية القيمة صفر ثم نحل النظام $Ux = 0$ بالتعويض التراجعي بالنسبة للمتغيرات الباقية (الأساسية) . المتجهات الناتجة عن ذلك والتي عددها $n - r$ تكون أساساً لـ $\mathcal{N}(A)$.

هذه هي ، تماماً ، الطريقة التي اتبعناها في حل $Ux = 0$ بالمتغيرات الأساسية والاختيارية . لقد احتوى المثال على محورين في العمودين (١) و (٣) . لذا ، فإن متغيراتها الاختيارية هما الثاني والرابع v,y وأساس الفضاء الصفري هو :

$$\begin{matrix} v = 1 \\ y = 0 \end{matrix} \quad x_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \qquad \begin{matrix} v = 0 \\ y = 1 \end{matrix} \quad x_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

من السهل أن نرى ، سواء من أجل هذا المثال أو بصورة عامة ، أن هذين المتجهين مستقلان . في كل تركيب من الشكل $c_1x_1+c_2x_2$ يكون c_1 هو المركبة v ويكون c_2 هو المركبة y، لذا ، فإن السبيل الوحيد ليكون $c_1x_1+c_2x_2 = 0$ هو أن يكون : $c_1 = c_2 = 0$. هذان المتجهان يولدان ، أيضاً ، الفضاء الصفري ؛ والحل العام هو التركيب vx_1+yx_2 وعلى هذا فان المتجهات x_i التي عددها $n - r = 4-2$ تكوّن أساساً .

يسمى الفضاء الصفري *نواة* A ويدعى عدد أبعاده $n-r$ *صفرية* A.

١ ـ فضاء أعمدة A: أولاً، هناك نقطة أخرى تتعلق بالرمز. كثيراً مايدعى فضاء الأعمدة بمدى A (يخصص له الحرف $\mathscr{R}$) يتعلق هذا المصطلح مع المعنى المعتاد لمدى دالة f كمجموعة جميع قيم $f(x)$ الممكنة. إن x واقع في مجال f. أما القيمة $f(x)$ فتقع في مدى هذه الدالة. في الحالة التي نحن بصددها، الدالة هي $f(x)=Ax$. يتكون مجالها من كل x ينتمي إلى R^n. أما مداها فمكون من كل متجه ممكن Ax. (بقول آخر، من كل b الذي من أجله، يكون $Ax=b$ قابلاً للحل). نحن نعلم أن ذلك يمثل جميع تراكيب الأعمدة أي أن المدى هو فضاء الأعمدة. إننا نعتزم استخدام المصطلح المعتاد وهو *فضاء الأعمدة*، كما أننا سنتبنى الرمز المختصر $\mathscr{R}(A)$ (١)

مسألتنا الحالية هي ايجاد أساس لفضاء الأعمدة $\mathscr{R}(U)$ وكذلك لفضاء الأعمدة $\mathscr{R}(A)$. ***هذان الفضاءان مختلفان*** (يكفي النظر إلى المصفوفتين) إلا أن عدد أبعادهما واحد. هذه هي النقطة الرئيسية.

العمودان الأول والثالث من U هما أساس فضاء أعمدتها، وهما العمودان اللذان **يحويان محاور**. كل عمود آخر هو تركيب فيهما. بالاضافة إلى ذلك، فان الشيء ذاته صحيح بالنسبة للمصفوفة الأصلية ـ بالرغم من أن المحاور غير ظاهرة والأعمدة مختلفة. العمودان الأول والثالث من A هما أساس لفضاء أعمدتها. بالتأكيد، العمود الثاني ليس مستقلاً. إنه ثلاثة أضعاف العمود الأول. أما العمود الرابع فيساوي العمود الأول + ثلث العمود الثالث. إذا شكلت أعمدة معينة من U أساساً لفضاء أعمدة U فإن الأعمدة المقابلة لها من A تشكل أيضاً أساساً لفضاء أعمدة A.

---

(١) الأمر المحزن هو أن فضاء الأسطر يبدأ، أيضاً، بالحرف ذاته. سنخصص في هذا الكتاب الحرف r للرتبة والحرف R لفضاء الأعمدة.

سبب ذلك أن $Ax = 0$ إذا وإذا فقط ، كان $Ux = 0$. إن هذين النظامين متكافئان ولهما الحلول ذاتها . العمود الرابع من U كان أيضاً مساوياً العمود الأول + ثلث العمود الثالث . إذا مانظرنا إلى الجداء المصفوفي $Ax = 0$ فاننا نجد أنه يمثل ارتباطاً خطياً لأعمدة A بمعاملات هي احداثيات x . هذا الارتباط يقابل بارتباط بين أعمدة U وبالمعاملات ذاتها . *إذا كانت مجموعة من أعمدة A مستقلة فان الأمر ذاته يكون من أجل أعمدة U المقابلة لذلك والعكس بالعكس*(١) .

والآن ، لايجاد أساس لـ $\mathscr{R}(A)$ نستخدم ماسبق أن فعلناه بالنسبة لـ U . إن الأعمدة التي عددها r والتي تحوي محاور هي أساس فضاء أعمدة U ، نختار هذه الأعمدة نفسها من A كما يلي :

٢س عدد أبعاد فضاء الأعمدة $\mathscr{R}(A)$ يساوي الرتبة r ويساوي عدد أبعاد فضاء الأسطر : *عدد الأعمدة المستقلة خطياً يساوي عدد الأسطر المستقلة خطياً* . يمكن تكوين أساس للفضاء $\mathscr{R}(A)$ بتلك الأعمدة من A التي عددها r والتي تقابل في U الأعمدة التي تحوي محاور .

هذه الحقيقة التي مفادها أن لفضاء الأعمدة وفضاء الأسطر عدد الأبعاد ذاته تمثل نظرية من أهم نظريات الجبر الخطي . نختزل ذلك غالباً بالقول "رتبة الأسطر = رتبة الأعمدة" . إنها تعبر عن نتيجة غير واضحة تماماً من أجل مصفوفة عشوائية من النوع 10×12 مثلاً . يقال شيء مشابه لذلك بالنسبة للمصفوفات المربعة : إذا كانت أسطر مصفوفة مربعة مستقلة خطياً فان الأمر كذلك أيضاً بالنسبة للأعمدة (والعكس بالعكس) . هنا أيضاً لايظهر هذا الأمر بدهياً ، على الأقل ليس بدهياً للمؤلف .

---

(١) الأمر المحزن هو أن فضاء الأسطر يبدأ ، أيضاً ، بالحرف ذاته . سنخصص في هذا الكتاب الحرف r للرتبة والحرف R لفضاء الأعمدة .

لكي نرى مرة أخرى أن عدد أبعاد كل من فضاء الأسطر وفضاء الأعمدة للمصفوفة U يساوي r ، ننظر في وضع نموذجي ذي رتبة $r = 3$. إن للمصفوفة U ، حتماً ، ثلاثة أسطر مستقلة :

$$U = \begin{bmatrix} d_1 & * & * & * & * & * \\ & & & d_2 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

ندعي هنا ، أيضاً ، أنه توجد ثلاثة أعمدة ، فقط ، مستقلة . للأعمدة ثلاث مركبات غير صفرية فقط . فإذا تمكنا من أن نبرهن أن الأعمدة الثلاثة الأساسية ـ الأول والرابع والسادس ـ مستقلة خطياً فانها تصلح أساساً (لفضاء أعمدة U وليس لـ A !) . لنفرض أن تركيباً خطياً لهذه الأعمدة يساوي الصفر :

$$c_1 \begin{bmatrix} d_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} * \\ d_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} * \\ * \\ d_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

لنعمل بالاتجاه نحو الأعلى كالمعتاد فنجد أن على c_3 أن يساوي الصفر وذلك لأن المحور $d_3 = 0$. لذا ، سيكون c_2 مساوياً الصفر أيضاً لأن $d_2 = 0$ ونجد أخيراً $c_1 = 0$. هذا ما يحقق الاستقلال الخطي وينهي البرهان . بما أن $Ax = 0$ إذا وإذا فقط كان $Ux = 0$ فانه يمكننا أن نستنتج أن الأعمدة : الأول والرابع والسادس من A تكوّن أساساً لـ $\mathscr{R}(A)$ وذلك مهما كانت المصفوفة الأصلية A ، حتى إننا في ، هذا المثال لانعرفها .

نؤكد أن فضاء الأسطر وفضاء الأعمدة كليهما يصبح واضحاً بعد عمليات الحذف على A . ليس من الضروري أن نتعامل مع A^T . بالتأكيد ، كان من الممكن ، إيجاد منقول A بمبادلة أعمدتها مع أسطرها (وفضاء أعمدتها بفضاء أسطرها) . ومن ثم يمكن رد A^T إلى شكله المدرج (وهو مختلف عن U^T) . يقودنا هذا إلى الفضاءات

الصحيحة ولكنها ليست فكرة مناسبة. هناك استعمالات عديدة للمنقول إلا أن هذه ليست منها. الفكرة هي أن لـ $\mathcal{R}(A)$ و $\mathcal{R}(A^T)$ العدد نفسه من الأبعاد وأنه يمكن إيجاد ذلك في وقت معاً من U.

نصل الآن إلى الفضاء الجزئي الأساسي الرابع الذي بقي حتى الآن بعيداً عن الأنظار. بما أن الفضاءات الثلاثة الأوائل كانت $\mathcal{R}(A^T)$, $\mathcal{N}(A)$, $\mathcal{R}(A)$. لذا، فإن الرابع لابد أن يكون $\mathcal{N}(A^T)$. إنه الفضاء الصفري للمنقول أو ***الفضاء الصفري اليساري*** لـ A إذ إن $A^T y = 0$ تعني $y^T A = 0$ ويظهر المتجه على يسار A.

٤ ـ *الفضاء الصفري اليساري لـ* A ***(يساوي الفضاء الصفري لـ*** A^T**)**. إذا كانت A من النوع $m \times n$ فان A^T من النوع $n \times m$. فضاؤها الصفري هو فضاء جزئي من R^m؛ المتجه y له m مركبة. إذا ماكتبنا على النحو $y^T A = 0$ فان هذه المركبات سوف تضرب أسطر A لينتج السطر الصفري:

$$y^T A = \begin{bmatrix} y_1 & \dots & y_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & A & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

يدعى المتجه y^T متجهاً صفرياً يسارياً للمصفوفة A.

من السهل ايجاد عدد أبعاد هذا الفضاء الصفري $\mathcal{N}(A^T)$. في كل مصفوفة، عدد المتغيرات الأساسية زائداً عدد المتغيرات الاختيارية يساوي عدد الأعمدة الكلي. هذا يعني من أجل A أن: $r + (n - r) = n$. بقول آخر:

عدد أبعاد فضاء الأعمدة + عدد أبعاد الفضاء الصفري = عدد الأعمدة.

تصلح هذه القاعدة كذلك لـ A^T التي لها m عموداً وهي كمصفوفة لها جودة A

نفسها. إلا أن عدد أبعاد فضاء أعمدتها يساوي، أيضاً r ولذا:

$$r + \dim \mathcal{N}(A^T) = m \qquad (١)$$

٢ـع عدد أبعاد الفضاء الصفري اليساري $\mathcal{N}(A^T)$ يساوي $m-r$.

تختفي المتجهات y في مكان ما أثناء الحذف، عندما تركب أسطر A لتنشأ عنها *الأسطر الصفرية* في U والتي عددها $m-r$. لايجاد y، نبدأ من $PA=LU$ أو $L^{-1}PA=U$. الأسطر الأخيرة من $L^{-1}P$ والتي عددها $m-r$ تكون أساساً للفضاء الصفري اليساري ـ لأنها تضرب A لتعطي الأسطر الصفرية لـ U . نعيد : يحتوي الفضاء الصفري على الأحمال التي تتركب بواسطتها أسطر A لنحصل على الصفر .
في مثالنا 3×4 ، كان السطر الصفري هو السطر الثالث – ٢ (السطر الثاني)+ ٥ (السطر الأول) . إن ذلك هو التركيب نفسه $b_3-2b_2+5b_1$ الذي ظهر في الطرف الأيمن وقد أدى ذلك إلى $0=0$ كمعادلة أخيرة . لذا ، فإن مركبات y هي $5,-2,1$. هذا المتجه هو أساس للفضاء الصفري اليساري الذي عدد أبعاده $m-r=3-2=1$.
إنه السطر الأخير من $L^{-1}P$ وينتج عنه السطر الصفري في U ـ وبامكاننا ملاحظته دون حساب L^{-1} .

إنني أدرك أن الكتاب لم يعط ، حتى الآن ، سبباً للاهتمام بالفضاء $\mathcal{N}(A^T)$. إذا كتبت بالحروف المائلة : *الفضاء الصفري اليساري مهم أيضاً* ، فان ذلك صحيح ولكنه غير مقنع ، سيكون البند التالي أفضل عندما يعطي معنى فيزيائياً لـ y .

لقد عرفنا الآن سعات الفضاءات الأربعة ويمكننا أن نلخص ذلك في جدول ، ويظهر أنه من المواتي أن نعرض ذلك كنظرية .

النظرية الأساسية في الجبر الخطي، جزء ١

١ ـ $\mathcal{R}(A)$ = فضاء أعمدة A؛ عدد أبعاده r

٢ ـ $\mathcal{N}(A)$ = الفضاء الصفري لـ A؛ عدد أبعاده $n-r$

٣ ـ $\mathcal{R}(A^T)$ = فضاء أسطر A؛ عدد أبعاده r .

٤ ـ $\mathcal{N}(A^T)$ = الفضاء الصفري اليساري لـ A، عدد أبعاده $m-r$

مثال : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ $m = n = 2, r =$

١ ***فضاء الأعمدة*** يحتوي على مضاعفات $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$. العمود الثاني هو في الاتجاه نفسه ولايؤدي إلى شيء جديد .

٢ ***الفضاء الصفري*** يحتوي على مضاعفات $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. هذا المتجه يحقق $Ax = 0$ وكذلك تفعل مضاعفاته .

٣ ***فضاء الأسطر*** يحتوي على مضاعفات $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. إنني أكتبه كمتجه عمود لأنه في فضاء أعمدة A^T .

٤ ***الفضاء الصفري اليساري*** يحتوي على مضاعفات $\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$. هذا المتجه يحقق $A^Ty = 0$. وأسطر A بالأحمال 3,1- يؤدي مجموعها إلى الصفر .

في هذا المثال ، جميع *الفضاءات الجزئية الأربعة* هي مستقيمات! هذه صدفة مصدرها $r = 1$ و $n - r = 1$ و $m - r = 1$. ستكون التمارين أكثر تنويعاً . لاحظ أنك إذا غيرت العدد الأخير في A من 6 إلى 7 فسيتغير عدد الأبعاد . لفضاء الأعمدة وفضاء الأسطر العدد $r = 2$. الفضاء الصفري والفضاء الصفري اليساري يحويان فقط المتجهين $x = 0$ و $y = 0$. *المصفوفة قابلة للعكس* .

وجود المعكوس

نحن نعلم أنه إذا كان للمصفوفة A معكوس يساري ($BA = I$) ومعكوس يميني ($AC = I$) فان هذين المعكوسين متساويان : $B = B(AC) = (BA)C = C$. يمكننا الآن انطلاقاً من مفهوم رتبة مصفوفة ، أن نقرر بسهولة أي المصفوفات لها هذان المعكوسان . نقول بشكل مجمل ، ***يوجد معكوس فقط عندما تكون الرتبة أكبر مايمكن .***

تحقق الرتبة ، دائماً ، مايلي $r \le m$ و $r \le n$ وذلك لأنه لن تكون لمصفوفة من

النـوع $m\times n$ أكثر من m سطراً مستقلة ولا أكثر من n عموداً مستقلة . ليس هناك مكان لمحاور أكثر من m أو أكثر من n. نريد أن نبرهن أنه إذا كان $r = m$ فان لهذه المصفوفة معكوساً عن اليمين ، وإذا كان $r = n$ فان للمصفوفة معكوساً عن اليسار . في الحالة الأولى ، يوجد للنظام $Ax = b$ ، دوماً ، حل ، وفي الحالة الثانية ، يكون الحل (إن وجد) وحيداً . المصفوفة المربعة هي المصفوفة الوحيدة التي قد تحقق $r = n$ و $r = m$ ، لذلك لاتوجد سوى المصفوفة المربعة التي قد تحقق الوجود والوحدانية . فالمصفوفة المربعة ، فقط ، قد يكون لها المعكوسان .

٢ ـ ف الوجود : للنظام $Ax = b$ حل واحد x **على الأقل** من أجل كل قيمة لـ b إذا وإذا فقط كان فضاء الأعمدة هو $\boldsymbol{R}^m$؛ أي إذا كان $r = m$. في هذه الحالة ، يوجد معكوس عن اليمين C من النوع $n \times m$ يحقق $AC = I_m$ حيث I_m مصفوفة الوحدة من النوع m ، وهذا ممكن ، فقط ، إذا كان $m \leq n$.

الوحدانية : يكون للنظام $Ax = b$ حل واحد x **على الأكثر** إذا وإذا فقط كانت الأعمدة مستقلة خطياً ، وحينئذ $r = n$. يوجد في هذه الحالة معكوس عن اليسار B من النوع $n \times m$ بحيث يكون $BA = I_n$ ، I_n مصفوفة الوحدة من النوع n . هذا ممكن ، فقط ، إذا كان $m \geq n$.

في الحالة الأولى ، أحد الحلول الممكنة هو $x = Cb$ إذ إن $Ax = ACb = b$. لكن توجد حلول أخرى إذا وجدت معكوسات يمينية أخرى .

في الحالة الثانية ، إذا وجد للمعادلة $Ax = b$ حل فلابد أن يكون كمايلي :
$x = BAx = Bb$ ولكن من الممكن ألا يوجد حل(١) .

هناك صيغ بسيطة للمعكوس اليساري وللمعكوس اليميني إن وجد :

$$B = (A^T A)^{-1} A^T \quad \text{و} \quad C = A^T (AA^T)^{-1} .$$

---

(١) عدد الحلول في حالة الوحدانية صفر أو واحد بينما هو في حالة الوجود واحد أو مالانهاية .

بالتأكيد $AC = I$ و $BA = I$. الأمر الذي ليس مؤكداً، هو ما إذا كانت $A\,A^T$ و $A^T A$ قابلتين للعكس فعلاً. سنبين في الفصل الثالث أن للمصفوفة A^TA معكوساً إذا كانت الرتبة تساوي n وأن للمصفوفة $A\,A^T$ معكوساً إذا كانت الرتبة تساوي m. وهكذا، فإن للصيغ معنى حتماً عندما تكون الرتبة أكبر مايمكن والمعكوسات من جانب واحد ممكنة الوجود.

هناك طريقة تعتبر أساسية أكثر مماسبق. يمكن النظر إلى عمود واحد في كل مرة، من أجل مصفوفة C فنجد:

$$A\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_m \end{bmatrix} \quad \text{أو} \quad AC = I$$

كل عمود من C، عندما يضرب بـ A، سوف يعطي عموداً في مصفوفة الوحدة. لإيجاد حل للنظام $Ax_i = e_i$، نحتاج إلى أن تكون المتجهات الإحداثية e_i في فضاء الأعمدة. إذا احتوى جميع هذه المتجهات، فإن فضاء الأعمدة يجب أن يكون $\boldsymbol{R}^m$! يجب أن يكون عدد أبعاده (الرتبة) $r = m$. هذه هي "حالة الوجود"، عندما تولد الأعمدة $\boldsymbol{R}^m$.

مثال لننظر في المصفوفة السهلة ذات النوع 2×3 والتي رتبتها تساوي 2:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

بماأن $r = m = 2$ فان النظرية تضمن وجود معكوس عن اليمين C:

$$AC = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

بالفعل، يوجد العديد من المعكوسات عن اليمين لأن السطر الأخير في C اختياري تماماً. وهذه حالة وجود وليست حالة وحدانية. ليس للمصفوفة A معكوس

يساري إذ إن العمود الأخير من BA وهو بالتأكيد صفري، ولا يمكنها أن تتطابق مع مصفوفة الوحدة ذات النوع 3×3 .

بالنسبة لهذا المثال، الصيغة $C = A^T (A A^T)^{-1}$ تؤدي إلى الاختيار المحدد:

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{16} & 0 \\ 0 & \frac{1}{25} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

تختار الصيغة أصفاراً للرموز الاختيارية c_{31} , c_{32} . هذه حالة "المعكوس الكاذب" وهي طريقة نقرر فيها معكوساً خاصاً عندما لاتتوفر طريقة نظامية لتقرير ذلك. لقد شرحت في الملحق الأول.

إن منقول A يؤدي إلى مثال في اتجاه معاكس بعدد لانهائي من المعكوسات اليسرى:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & b_{13} \\ 0 & \frac{1}{5} & b_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

الآن، العمود الأخير من B اختياري تماماً. هذا نموذج لـ "حالة الوحدانية" عندما تكون أعمدة A، التي عددها n، مستقلة خطياً. الرتبة $r = n$. ليس هناك متغيرات اختيارية إذ إن $n - r = 0$، وهكذا، إذا كان هناك حل فانه الحل الوحيد. بامكانك أن ترى متى يكون لهذا المثال حل:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$ قابلة للحل إذا كان $b_3 = 0$

عندما يكون $b_3 = 0$ فان الحل (وحيد !) هو $x_1 = 1/4\ b_1$, $x_2 = 1/5\ b_2$.

بالنسبة لمصفوفة مستطيلة، ليس من الممكن أن نحصل على الوجود والوحدانية معاً. إذا كانت m مختلفة عن n فانه لايمكن أن يكون $r = n$ و $r = m$. بالنسبة لمصفوفة

مربعة فالأمر على العكس . إذا كان $m = n$ فانه لاتتحقق إحدى الخاصتين دون الأخرى . للمصفوفة المربعة معكوس يساري إذا و إذا فقط كان لها معكوس يميني . هناك معكوس واحد فقط $B = C = A^{-1}$. *الوجود يؤدي للوحدانية والوحدانية تؤدي للوجود في حالة المصفوفة المربعة* . إن شرط قابلية العكس هو أن تكون الرتبة أكبر مايمكن : $r = m = n$. يمكننا أن نعبر عن ذلك بطريقة أخرى : كل واحد من الشرطين التاليين لازم وكافٍ لتكون مصفوفة مربعة A، من النوع n، غير شاذة .

(١) الأعمدة تولد R^n، يعني أن للنظام $Ax = b$ حل واحد على الأقل لكل قيمة لـ b .

(٢) الأعمدة مستقلة خطياً، يعني أن للنظام $Ax = 0$ الحل الوحيد $x = 0$.

يمكن لهذه القائمة أن تزداد طولاً ، بصورة خاصة إذا أخذنا بعين الاعتبار الفصول التي ستأتي فيما بعد . كل شرط في القائمة التالية مكافىء لأي واحد آخر منها ويؤكد أن A غير شاذة .

(٣) الأسطر تولد الفضاء $\boldsymbol{R}^n$.

(٤) الأسطر مستقلة خطياً .

(٥) يمكن للحذف أن يكتمل : $PA = LDU$ حيث كل $d_i \neq 0$.

(٦) توجد مصفوفة A^{-1} بحيث يكون $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

(٧) محددة المصفوفة A لاتساوي الصفر .

(٨) ليس الصفر قيمة ذاتية للمصفوفة A .

(٩) A^TA معرفة إيجابياً .

إليك تطبيقاً نموذجياً . لتكن $P(t)$ كثيرات الحدود من الدرجة $n - 1$. كثيرة الحدود الوحيدة من هذا النوع التي تنعدم في n نقطة معروفة : $t_1, \ldots\ldots, t_n$ هي $P(t) \equiv 0$. لاتوجد كثيرة حدود أخرى من الدرجة $n - 1$ يمكن أن يكون لها n جذراً . هذه قضية وحدانية تؤدي إلى قضية وجود . إذا أعطينا القيم $b_1, \ldots\ldots, b_n$ فانه توجد كثيرة حدود من الدرجة $n - 1$ تأخذ هذه القيم : $P(t_i) = b_i$ ، $i = 1, \ldots, n$. الغرض من هذا المثال هو

التعامل مع مصفوفة مربعة ؛ إن عدد معاملات $P(t)$ الذي هو n يساوي عدد المعادلات . بالفعل، إن نظام المعادلات $P(t_i) = b_i$ مطابق للشكل المصفوفي :

$$\begin{bmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \dots & t_1^{n-1} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \dots & t_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \dots & t_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

تعرف مصفوفة المعاملات هذه A ذات النوع $n \times n$ تحت اسم مصفوفة *فاندرمونز* *Vandermonde* . نكرر التبرير : بما أن لـ $Ax = 0$ الحل الوحيد $x = 0$ (بقول آخر لايمكن أن تكون $P(t_i) = 0$ إلا إذا كان $P \equiv 0$)، فان ذلك يؤدي إلى أن المصفوفة A غير شاذة . لذا، سيكون للنظام $Ax = b$ حل دوماً ـ يمكن لكثيرة حدود أن تأخذ أي مجموعة مكونة من n قيمة b_i عند النقاط المختلفة t_i. سنجد، فعلاً ، فيما بعد محددة A. إنها لن تكون مساوية للصفر .

المصفوفات ذوات الرتبة المساوية للواحد

أخيراً ، نأتي إلى الحالة الأسهل عندما تكون الرتبة أصغر مايمكن (ماعدا المصفوفة الصفرية التي رتبتها صفر) . من أهم المواضيع الأساسية في الرياضيات معرفة كيف يمكن صياغة شيء مركب من قطع بسيطة . بالنسبة للجبر الخطي فإن القطع البسيطة هي المصفوفات من ***الرتبة واحد*** $r = 1$. المثال الآتي نموذجي :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 8 & 4 & 4 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

كل سطر في المصفوفة مضاعف للسطر الأول ، لذا ، فإن عدد أبعاد فضاء الأسطر يساوي الواحد . بالفعل ، يمكننا كتابة هذه المصفوفة كاملة بالطريقة الخاصة التالية ، كجداء متجه عمود بمتجه سطر :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 8 & 4 & 4 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

جداء مصفوفة من النوع 4×1 بأخرى من النوع 1×3 هو مصفوفة من النوع 4×3. عدد أبعاد هذا الجداء يساوي الواحد. نلاحظ أن الأعمدة أيضاً مضاعفات لواحد منها ـ يشترك فضاء الأعمدة بعدد الأبعاد $r = 1$ ويرد إلى مستقيم.

يقع هذا الأمر ذاته لكل مصفوفة تساوي رتبتها الواحد :

كل مصفوفة تساوي رتبتها الواحد، لها الشكل البسيط $A = uv^T$.

الأسطر جميعها مضاعفات للمتجه v^T، والأعمدة جميعها مضاعفات للمتجه u. فضاء الأسطر وفضاء الأعمدة مستقيمان.

تمـاريـن

٢-٤-١ صائب أم خاطىء : إذا كان $m = n$ فان فضاء الأسطر لـ A يساوي فضاء الأعمدة.

٢-٤-٢ أوجد عدد الأبعاد وكون أساساً للفضاءات الجزئية الأساسية الأربعة المرافقة لكل من المصفوفتين :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \end{bmatrix} \text{ و } U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

٢-٤-٣ أوجد عدد الأبعاد وكون أساساً للفضاءات الجزئية الأساسية الأربعة للمصفوفتين :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

٢-٤-٤ صف الفضاءات الجزئيةالأساسية الأربعة في الفضاء الثلاثي الأبعاد المرافقة للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

٢-٤-٥ برهن أنه إذا كان جداء مصفوفتين هو المصفوفة الصفرية $AB = 0$، فان فضاء أعمدة B محتوى في الفضاء الصفري للمصفوفة A. (كذلك فان فضاء أسطر A محتوى في الفضاء الصفري اليساري للمصفوفة B، لأن كل سطر من A يضرب بـ B ليعطي سطراً صفرياً).

٢-٤-٦ فسر لماذا يكون النظام $Ax = b$ قابلاً للحل إذا وإذا فقط كانت رتبة A = رتبة A' حيث "A^{n}" مكونة من A مضافاً إليها b كعمود إضافي.

إرشاد: الرتبة هي سعة فضاء الأعمدة؛ متى لاتغير، إضافة عمود آخر هذه السعة ؟

٢-٤-٧ لنفرض أن A مصفوفة من النوع $m \times n$ ورتبتها r. ماهي الشروط التي تفرض على هذه الأعداد كي يكون :

(أ) للمصفوفة A معكوس $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ ؟

(ب) للنظام $Ax = b$ عدد لانهائي من الحلول لكل b؟

٢-٤-٨ لماذا لاتوجد مصفوفةيحوي فضاء أسطرها وفضاؤها الصفري المتجه $[\,1\ \ 1\ \ 1\,]^T$؟

٢-٤-٩ لنفرض أن الحل الوحيد للنظام $Ax = 0$ (m معادلة في n مجهولاً) هو $x = 0$. ماهي الرتبة ولماذا ؟

٢-٤-١٠ أوجد مصفوفة من النوع 1×3 فضاؤها الصفري يتكون من جميع متجهات R^3 التي تحقق $x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0$. أوجد مصفوفة من النوع 3×3 لها الفضاء الصفري نفسه.

٢-٤-١١ إذا كان للنظام $Ax = b$ دائماً ، حل واحد على الأقل ، فاثبت أن الحل الوحيد لـ $A^{T}y = 0$ هو $y = 0$. *ارشاد* : ماهي الرتبة ؟

٢-٤-١٢ إذا كان للنظام $Ax = 0$ حل غير صفري ، فاثبت أن النظام $A^{T}y = f$ لايكون له حل من أجل بعض قيم f. كون مثالاً لـ A و f.

٢-٤-١٣ أوجد رتبة A واكتب هذه المصفوفة على شكل $A = uv^{T}$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

٢-٤-١٤ a,b,c أعداد معلومة حيث $a \neq 0$. كيف يجب اختيار d لتكون رتبة المصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

مساوية الواحد؟ بعد هذا الاختيار لـ d، حلل المصفوفة وفق الصورة uv^{T}.

٢-٤-١٥ أوجد المعكوس اليساري و / أو المعكوس اليميني (في حالة وجودهما) لكل من :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad T = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}.$$

٢-٤-١٦ إذا كانت أعمدة A مستقلة خطياً (A من النوع $m \times n$) عندئذ ، تكون الرتبة ـــــ والفضاء الصفري ـــــ وفضاء الأسطر ـــــ ويوجد معكوس ـــــ .

٢-٤-١٧ (*مغالطة*) لنفترض أننا نبحث عن المعكوس اليميني للمصفوفة A. عندئذ $AB = I$ تؤدي إلى $A^{T}AB = A^{T}$ أو $B = (A^{T}A)^{-1}A^{T}$. لكن هذا يحقق $BA = I$ ؛ إنه معكوس يساري . أي خطوة لايمكن تبريرها ؟

٢-٤-١٨ إذا كان V فضاءً جزئياً مولداً من :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

أوجد مصفوفة A بحيث يكون V فضاء أسطرها وأوجدمصفوفة B بحيث يكون V فضاءها الصفري.

٢-٤-١٩ أوجد أساساً لكل من الفضاءات الجزئية الأربعة لـ:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

٢-٤-٢٠ أوجد مصفوفة محققة للخاصة المطلوبة فيمايلي أو وضح لماذا لاتوجد مثل هذه المصفوفة :

(أ) فضاء الأعمدة يحوي $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ و فضاء الأسطر يحوي $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

(ب) أساس فضاء الأعمدة هو $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ، وأساس الفضاء الصفري هو $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

(جـ) فضاء الأعمدة $\boldsymbol{R}^4 =$ ، وفضاء الأسطر $\boldsymbol{R}^3 =$.

٢-٤-٢١ إذا كان للمصفوفتين A و B الفضاءات الجزئية الأساسية الأربعة نفسها، فهل يكون $A = B$ ؟

٢-٥ الشبكات ومصفوفات الدروود

لم أكن سعيداً تماماً بمصفوفة البند السابق التي كانت من النوع 3×4 . من الناحية النظرية ، كانت المصفوفة مقبولة تماماً ، الفضاءات الجزئية الأربعة قابلة للحساب وليست تافهة ، أبعادها r, $n - r$, r, $m - r$ لم تكن أصفاراً . لكنها كونت بشكل مصطنع بدلاً

من أن تصدر عن تطبيق جوهري ولذا ، لم يتبين من خلالها أهمية تلك الفضاءات الجزئية .

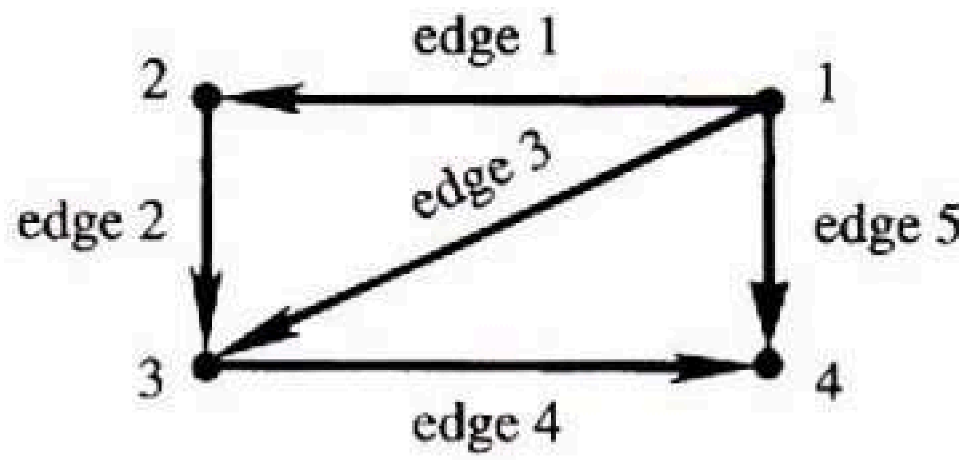
في هذا البند ، سنقدم ، *صنفاً* من مصفوفات مستطيلة تتميز بميزتين . فهي بسيطة ومهمة . إنها تعرف باسم ***مصفوفة الورود***، كل عنصر فيها هو 0 أو 1- أو 1 . والذي تجدر ملاحظته هو أن الشيء نفسه صحيح بالنسبة لـ L و U وبالنسبة لمتجهات أساس الفضاءات الجزئية الأربعة . لهذه الفضاءات الجزئية دور رئيسي في نظرية الشبكات ونظرية البيانات . تصدر مصفوفة الورود مباشرة عن بيان وسوف نبدأ بمثال محدد، مع التأكيد على أن كلمة "بيان" لاتعني بيان دالة (مثل القطع المكافىء $y = x^2$) . هناك معنى آخر مختلف تماماً، هو أقرب لعلوم الحاسوب منه إلى التفاضل، ومن السهل توضيحه . *هذا البند اختياري* إلا أنه يعطي الفرصة لرؤية المصفوفات المستطيلة في التطبيق، وللملاحظة كيف تبرز المصفوفة المربعة المتناظرة A^TA في النهاية .

يتكون ***البيان*** من عنصرين رئيسيين : مجموعة " *العقد*" ومجموعة "*الأضلاع*" التي تصل بين هذه العقد. لبيان الشكل (٢ ـ ٤) أربع عقد وخمسة أضلاع . ليس من الضروري وجود ضلع بين كل عقدتين، فليس هذا مطلوباً (الضلع من رأس إلى نفسه ممنوع) . إنه يشبه مخطط الطريق حيث المدن هي العقد والطرق هي الأضلاع . إن البيان المذكور آنفاً هو *بيان موجه* بمعنى أن لكل ضلع سهماً يبين اتجاهه .

تعدُّ ***مصفوفة الورود ضلع ـ عقدة*** من النوع 4×5، نرمز لها بـ A. يوجد سطر لكل ضلع ، ذلك للدلالة على أن العقدتين متصلتين بذلك الضلع . ***إذا انطلق ضلع من العقدة j إلى العقدة k فإن السطر المقابل يحتوي على 1- في العمود j و 1+ في العمود k***. مصفوفة الورود مكتوبة إلى جانب البيان .

يبين السطر الأول الضلع الواصل بين العقدة ١ والعقدة ٢ . يقابل السطر الخامس الضلع الخامس الذي يصل العقدة ١ بالعقدة ٤ .

لاحظ ماذا حصل للأعمدة. العمود الثالث يعطي معلومات عن العقدة ٣، إنه



$$A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

شكل (٢-٤). بيان موجه ومصفوفة ورود ضلع ـ عقدة.

يبين أي الأضلاع داخلة وأي الأضلاع خارجة. الضلعان ٢ و ٣ يدخلان أما الضلع ٤ فيخرج. تدعى المصفوفة A، أحياناً، بمصفوفة *الاتصال* أو المصفوفة *التبولوجية*. يزيد فيها، عادة، عدد الأسطر على عدد الأعمدة. إذا احتوى البيان على m ضلعاً و n عقدة فان المصفوفة A تكون من النوع $m \times n$. ومنقولها هو مصفوفة الورود "عقدة ـ ضلع".

نبدأ بالفضاء الصفري للمصفوفة A. هل هناك تركيب للأعمدة يعطي صفراً؟ يأتي الجواب، عادة، من الحذف، لكنه هنا يأتي بلمحة. *مجموع الأعمدة يساوي عموداً صفرياً*. لذا فان الفضاء الصفري يحتوي المتجه المكون من وحدان؛ إذا كان $x = (1,1,1,1)$ لذا، فان $Ax = 0$. حل المعادلة $Ax = b$ ليس وحيداً (هذا إذا كان لها حل أصلاً). يمكن أن يجمع أي "متجه ثابت" $x = (c,c,c,c)$ لأي حل للنظام $Ax = b$ فنحصل بذلك على حل جديد.

يكون لهذا معنى لو أننا نظرنا للمركبات x_1, x_2, x_3, x_4 على أنها ***طاقات كامنة عند العقد***. المتجه Ax يمثل، حينئذ، **فروق** الطاقة. هناك خمس مركبات لـ Ax (الأولى هي $x_2 - x_1$، من ± 1 في السطر الأول من A) وهي تعطي فروق الطاقة خلال الأضلاع الخمسة. لذا، تسأل المعادلة $Ax = b$: إذا اعطيت الفروق $b_1, \ldots, b_5$ فأوجد الطاقات الفعلية $x_1, \ldots, x_4$. إلا أن هذا مستحيل عمله! إذ إنه بالإمكان زيادة أو تقليل الطاقات

بمقدار ثابت c دون أن تتغير الفروق، وهذا مايؤكد أن $x = (c,c,c,c)$ ينتمي إلى الفضاء الصفري لـ A. في الحقيقة، هذه المتجهات هي الوحيدة في الفضاء الصفري لأن $Ax = 0$ تعني طاقات كامنة متساوية خلال كل ضلع. إن الفضاء الصفري لمصفوفة الورود هذه ذو بعد واحد. لنعين الآن الفضاءات الجزئية الثلاثة الأخرى :

فضاء الأعمدة : من أجل أي فروق $b_1,...,b_5$، يمكننا أن نحل $Ax = b$ ؟ للإجابة المباشرة على ذلك، نعيد النظر في المصفوفة. إن حاصل جمع السطرين الأول والثاني هو السطر الثالث. لذا، نحتاج في الطرف الأيمن أن يكون $b_1 + b_2 = b_3$ وإلا فليس هناك حل. إن حاصل جمع السطرين الثالث والرابع هو السطر الخامس. لذا، فالطرف الأيمن يجب أن يحقق $b_3+b_4 = b_5$ لكي نحصل بالحذف على $0 = 0$. وهكذا، إذا كان b ينتمي إلى فضاء الأعمدة فيلزم أن يتحقق :

$$b_1 + b_2 - b_3 = 0 \quad و \quad b_3 + b_4 - b_5 = 0 . \qquad (١)$$

بمتابعة البحث، نجد أن مجموع الأسطر الأول والثاني والرابع يساوي السطر الخامس. إلا أن ذلك ليس بجديد؛ فجمع المعادلات في (١) يؤدي إلى أن $b_1+b_2+b_4=b_5$. هناك شرطان مفروضان على المركبات الخمس حيث إن عدد أبعاد فضاء الأعمدة هو $3 = 2 - 5$. هذان الشرطان نجدهما بمنهجية أفضل من خلال الحذف، ولكن، هنا ينبغي أن يكون لهما معنى على البيان.

القاعدة هي *أن مجموع فروق الطاقة حول عروة يساوي الصفر*. الفروق حول العروة العليا هي $b_1, b_2, -b_3$ (إشارة الناقص مطلوبة من اتجاه السهم). للدوران على العروة والعودة إلى الطاقة ذاتها، نحتاج إلى $b_1 + b_2 - b_3 = 0$. بصورة مكافئة، يجب أن تحقق فروق الجهد العلاقة : $(x_2 - x_1) + (x_1 - x_3) = (x_2 - x_3)$. بصورة مشابهة يصدر الشرط $b_3 + b_4 - b_5 = 0$ عند العروة السفلى. لاحظ أن أعمدة A تحقق هذين الشرطين – يجب ذلك لإن $Ax = b$ قابل للحل تماماً عندما يكون b في فضاء الأعمدة. توجد ثلاثة أعمدة مستقلة، لذا، فالرتبة $r = 3$.

الفضاء الصفري اليساري : ماهي تراكيب الأسطر التي تعطي صفراً ؟ يجاب عن ذلك أيضاً بواسطة العرى . المتجهان اللذان يحققان $y^TA = 0$ هما :

$$y_1^T = [1 \quad 1 \quad -1 \quad 0 \quad 0] \quad و \quad y_2^T = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad -1].$$

كل عروة تنتج متجهاً y في الفضاء الصفري اليساري . المركبة +١ أو -١ تعين متى يكون لسهم الضلع اتجاه سهم العروة . تركيب y_1 و y_2 هو ، أيضاً ، في الفضاء الصفري . في الواقع ، $y_1 + y_2 = (1,1,0,1,-1)$ يعطي العروة حول الجزء الخارجي من البيان .

إنك تعلم أن فضاء الأعمدة والفضاء الصفري اليساري مرتبطان بإحكام . عندما يحوي الفضاء الصفري اليساري المتجه $y_1 = (1,1,-1,0,0)$ فان متجهات فضاء الأعمدة تحقق $b_1 + b_2 - b_3 = 0$. إن ذلك يوضح العلاقة $y^Tb = 0$ ، وستصبح ، قريباً ، الجزء الثاني من "النظرية الأساسية للجبر الخطي" . نهمل الحالة العامة ونعتبر هذه الحالة المحددة قانوناً لنظرية الشبكات المعروفة باسم قانون الطاقة لكيرتشوف *Kirchhoff* .

٣ ص متجهات الفضاء الصفري اليساري تقابل عرى البيان . اختبار وجودها في فضاء الأعمدة هو ***قانون الطاقة لكيرتشوف :***

مجموع فروق الطاقات الكامنة حول عروة يجب أن يساوي الصفر .

فضاء الأسطر : يحتاج إلى معنى بلغة البيانات . يحوي فضاء الأسطر متجهات من فضاء ذي أبعاد أربعة ولكنها ليست كل متجهات هذا الفضاء ؛ فعدد أبعاده ثلاثة فقط . يمكننا العمل بالحذف لإيجاد ثلاثة أسطر مستقلة و يمكننا النظر في البيان . الأسطر الثلاثة الأوائل مرتبطة (لأن السطر ١ + السطر ٢ = السطر ٣) لكن الأسطر ١ , ٢ , ٤ مستقلة : الأسطر تقابل الأضلاع ، وتكون الأسطر مستقلة شرط أن لاتحوي الأضلاع عرى .

الأسطر ١ , ٢ , ٤ أساس، لكن كيف تظهر تركيباتها ؟ مجموع عناصر كل سطر يساوي الصفر لذا، فإن لكل تركيب هذه الخاصة ذاتها. إذا كان $f = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ تركيباً خطياً للأسطر فان :

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 0 . \quad (٢)$$

هذا هو اختبار كون f واقعاً في فضاء الأسطر. إذا نظرنا إلى الوراء، نجد ارتباطاً مع المتجه $x = (1,1,1,1)$ الواقع في الفضاء الصفري. هذه الوحدان الأربعة الظاهرة في المعادلة(٢) ليست مجرد صدفة :

إذا كان f في فضاء الأسطر و x في الفضاء الصفري فان $f^T x = 0$.

هذا يوضح من جديد النظرية الأساسية في الجبر الخطي (الجزء ٢). وهي تصدر عن القانون الأساسي لنظرية الشبكات - إنها هنا قانون التيارات لكيرتشوف. *الجريان الكلي في كل عقدة يساوي الصفر*. الأعداد f_1, f_2, f_3, f_4 هي "مصادر التيار" في العقد. على المنبع f_1 أن يوازن $-y_1 - y_3 - y_5$، وهو التدفق الذي يغادر العقدة (1) ويجري في الأضلاع 1,3,5 . إن ذلك هو المعادلة الأولى من النظام $A^T y = f$. يقع بصورة مشابهة في العقد الثلاث الأخرى - حفظ الحمل يتطلب أن يكون التدفق الداخل = التدفق الخارج. الشيء الجميل هنا هو أن ***منقول A هو تماماً المصفوفة الصحيحة لقانون الجريان.***

يكون النظام $A^T y$ قابلاً للحل عندما يقع f في فضاء أعمدة A^T الذي هو فضاء أسطر .

٢ ق المعادلات الأربع في للنظام $A^T y = f$ الناتجة عن العقد الأربع للبيان تعبر عن ***قانون كيرتشوف في الجريان.***

الجريان الصافي في كل عقدة يساوي الصفر .

يمكن أن يكون هذا القانون محققاً لو كان التيار الكلي الداخل في العقد من الخارج هو $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 0$.

إذا كان $f = 0$ فان قانون كيرتشوف في الجريان هو $A^T y = 0$. إنه محقق بأي تيار يدور حول العروة. وهكذا تضع العرى المتجهات y في الفضاء الصفري لـ A^T.

الشجرة الممتدة والأسطر المستقلة

من الملاحظ أن كل عنصر في متجهات الفراغ الصفري يساوي أحد الأعداد 1,-1,0. الأمر ذاته صحيح من أجل عوامل $PA = LDU$ الناتجة عن الحذف. لايبدو ذلك مدهشاً لأنه صحيح من أجل مصفوفة الورود التي انطلقنا بها. إلا أنه يجب ألا ينظر إلى العددين ±1 على أنهما وجدا بصورة آلية. لايمكنهما أن يكونا وراثة عن L و U. إذا بدأنا بـ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$، فان الحذف سينتج 2 كمحور ثانٍ (وكذلك أيضاً، في المحددة). المصفوفة A ليست مصفوفة ورود.

من أجل مصفوفات الورود، لكل خطوة حذف معنى في البيان ـ وسننفذ هذه الخطوات في مثال:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

الخطوة الأولى تجمع السطر ١ إلى السطر ٤ لتجعل صفراً في القرنة الدنيا اليسارية. ينتج ذلك 0,1,0,1 كسطر رابع. لقد بقي هذا السطر متضمناً العددين ±1 وبقيت المصفوفة مصفوفة ورود. السطر الجديد يقابل الضلع المنقط في البيان، من 4 إلى 2. كان الضلع القديم من 4 إلى 1 وقد حذف لصالح هذا الضلع الجديد.

الخطوة التالية من الحذف التي تستخدم السطر ٢ كسطر محور، ستكون مشابهة لما قبلها. إضافة السطر ٢ إلى السطر الجديد ٤ تنتج 0,0,1,-1 الذي هو ضلع جديد من 4 إلى 3. الضلع المنقط سيحذف ويستعاض عنه بهذا الضلع الجديد (في الأعلى). لقد ظهر اتجاه معاكس للضلع الموجودمن ٣ إلى ٤ لأن السهمين 2 - 4 و 3 - 2 قد ركبا ليعطيا 3 - 4.

الخطوة الأخيرة من الحذف تبتلع هذا الضلع الجديد وتترك صفراً في السطر 4. لذا فان المصفوفة U تشابه A، إلا فيما يتعلق بالأصفار الأخيرة. الأسطر الأوائل من A كانت مستقلة خطياً.

يعيدنا ذلك إلى السؤال العام: ماهي الأسطر المستقلة في مصفوفة ورود؟ الجواب هو:

تكون الأسطر مستقلة إذا لم يكن في الأضلاع المقابلة عرى.

يوجد في نظرية البيانات اسم لمجموعة أضلاع لاتحوي عرى. إنها تدعى شجرة. الأضلاع الأربعة في بياننا المربع لا تكوّن شجرة، والأسطر الأربعة من A غير مستقلة. الأضلاع الثلاثة الأوائل (في الواقع *أي* ثلاثة أضلاع) في البيان الأصلي تكوّن شجرة وكذلك كل ضلعين وكل ضلع بمفرده؛ يمكن للشجرة أن تكون صغيرة. لكن من الطبيعي أن ننظر في الشجرة الكبيرة، أيضاً.

تدعى الشجرة التي تصل إلى كل عقدة في البيان شجرة ***ممتدة***. تولد أضلاعها البيان وتولد أسطرها فضاء الأسطر. في الحقيقة، هذه الأسطر هي أساس فضاء A. إضافة سطر آخر (ضلع آخر) سيغلق عروة. الشجرة الممتدة هي أكبر شجرة ممكنة. إذا كان لبيان n من العقد، ***فإنه يكون لأية شجرة ممتدة*** $n - 1$ ***من الأضلاع***. إن ذلك هو عدد الأسطر المستقلة في A وهو، أيضاً، رتبة المصفوفة.

يجب أن يكون هناك $n - 1$ عموداً مستقلة: يوجد n عموداً مجموعها هو العمود الصفري. فضاء A الصفري مستقيم يحمل المتجه $x= (1,1,...,1)$. عدد الأبعاد $n=1+(n - 1)$ وهو ماتتطلبه النظرية الأساسية للجبر الخطي.

تعطي هذه النظرية، أيضاً، عدد العرى المستقلة ـ الذي هو عدد أبعاد الفضاء الصفري اليساري. إنه $m - r$ أو $m - n + 1$[1]. إذا كان البيان واقعاً في مستوٍ، يمكننا

---

(١) هذا هو قانون أويلر الذي أصبح له اليوم برهان من الجبر الخطي: $m - n + 1$ عروة ⟸ (عدد العرى) + (عدد الأضلاع) + (عدد العقد)= ١

أن ننظر مباشرة إلى عيون العروة. يوجد اثنتان من هذه العرى الصغيرة في الشكل (٢ ـ ٤)، العروة الكبيرة حول المنطقة الخارجية غير مستقلة؛ كذلك إذا امتد البيان إلى خارج المستوي ـ مادام مرتبطاً ـ فإنه يبقى فيه $m - n + 1$ عروة مستقلة. يمكن لكل عقدة في بيان مترابط، أن تمتد إلى عقدة أخرى ـ يوجد طريق مكون من الأضلاع الواقعة بينها. ولنلخص خواص مصفوفة الورود:

الفضاء الصفري: عدد أبعاده 1، يحوي $x = (1,....,1)$.

فضاء الأعمدة: عدد أبعاده $n - 1$، كل $n - 1$ عموداً تكون جملة مستقلة.

فضاء الأسطر: عدد أبعاده $m - n$، تصدر الأسطر المستقلة عن أي شجرة ممتدة.

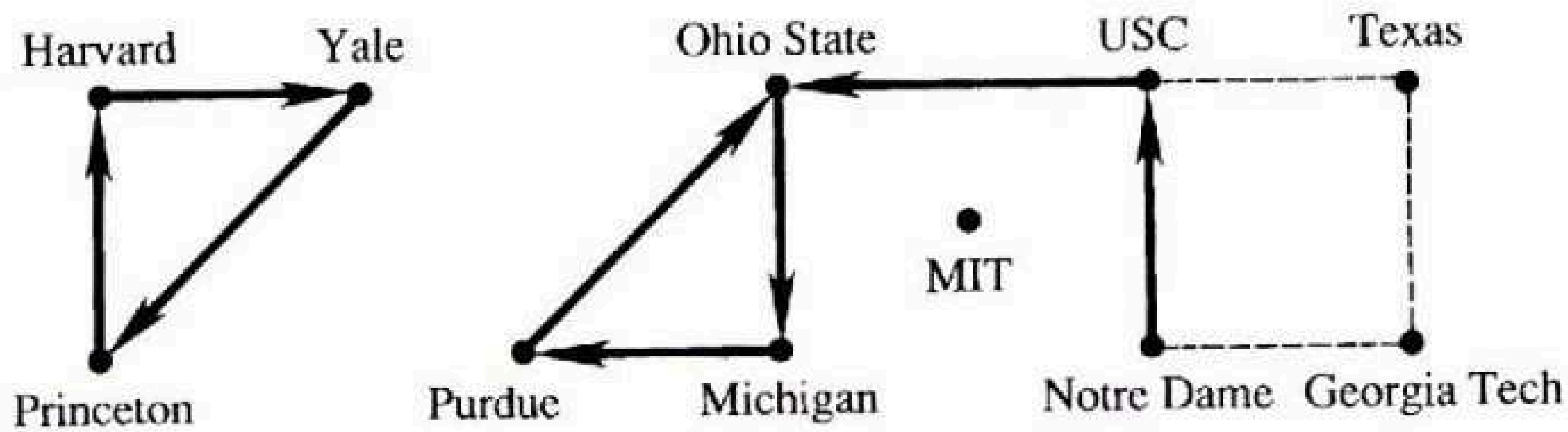
الفضاء الصفري اليساري: عدد أبعاده $m - n + 1$ يحوي المتجهات y الصادرة عن العرى. كل متجه f من فضاء الأسطر يحقق $x^T f = f_1 + ... + f_n = 0$ ـ مجموع التيارات الواردة من الخارج يساوي الصفر. كل متجه b من فضاء الأعمدة يحقق $y^T b = 0$ ـ مجموع فروق الطاقة v_i حول كل العرى يساوي الصفر. ينتج ذلك عن قانون كيرتشوف. وبعد قليل، سنقدم قانوناً ثالثاً هو (*قانون أوم ohm*). لهذا القانون خواص المادة وليس خواص مصفوفة الورود وهو يربط x بـ y. أولاً ستبقى مع المصفوفة A من أجل تطبيق يظهر أنه تافه لكنه ليس كذلك.

تصنيف فرق كرة القدم

في نهاية الفصل، يصنف الاستفتاء فرق كرة القدم في الكليات، يمثل ذلك محاكمة شخصية وهو، على الأغلب معدل عدد من الآراء ويصبح، إلى حد ما، غير واضح في أثر اثنتي عشرة كلية. نريد تصنيف جميع الفرق على قاعدة رياضية.

المرحلة الأولى هي التعرف على البيان. إذا نازل الفريق j الفريق k، فإننا نضع ضلعاً بينهما. تقع *الفرق* في العقد وتمثل *المباريات بالأضلاع*. لذا سيكون هنا بضع مئات من العقد ويضعه آلاف من الأضلاع التي ستعطي اتجاهاً ممثلاً بسهم موجه من

الفريق الزائر إلى الفريق المضيف . يبين الشكل جزءاً من البيان الذي يحوي بعض الكليات الجدية وكلية غير جيدة في كرة القدم لمدة طويلة . لحسن الحظ لم يتصل البيان بالكلية (التي كتبت هذه الكلمات من أجلها) . بقول رياضي ، فإنه لايمكننا أن نثبت أن MIT متميزة من النوع الأول (مالم تلعب مباراة مع إحدى الفرق) .



شكل(٢-٥) . بيان كرة القدم .

إذا كانت كرة القدم منسقة جيداً ، فإنه يمكننا أن نعين قدرة X_i لكل فريق . لذا إذا لعب الفريق vمع الفريق h ، فإن الأعلى قدرة منهما سيظفر بالمباراة . سيكون ، في الحالة المثالية ، الفرق b بين مجموع النقاط المحرزة (الفريق المضيف ناقصاً الفريق الزائر) ، مساوياً تماماً الفرق $x_h - x_v$ بين القدرتين . ليس عليهما أن يلعبا أيضاً المباراة! . سيحدث في هذه الحالة تسوية كاملة على أن الفريق ذا القدرة الأعلى كان هو الأفضل .

لهذه الطريقة صعوبتان (على الأقل) . لقد حاولنا ايجاد عدد x لكل فرقة بحيث يكون $x_h - x_v = b_c$ لكل مباراة . يعني ذلك وجود بضعة ألوف من المعادلات وبضع مئات من المجاهيل . توضع المعادلات $x_h - x_v = b_c$ في نظام $Ax = b$ حيث A هي ***مصفوفة الوقوع*** . فلكل مباراة سطر ، بالعدد +١ في العمود h و -١ في العمود v وذلك لتعيين أي فريقين لعبا هذه المباراة .

الصعوبة الأولى : إذا كان b غير واقع في فضاء الأعمدة فإنه لايوجد حل . على النقاط أن تكون منسقة تماماً وإلا فلا يمكن تعيين القدرات .

الصعوبة الثانية : إذا لم يكن لـ A متجهات صفرية في فضائها الصفري ، فإن

القدرات لن تتعين بشكل جيد . في الحالة الأولى المتجه x غير موجود ، وفي الحالة الثانية هذا المتجه غير وحيد . و من الممكن أن تقع الصعوبتان معاً .

الفضاء الصفري سهل ، ولكنه يظهر نقطة مهمة . يحوي دائماً متجه وحدان لأن A تشير ، فقط ، إلى *الفروق* $x_h - x_v$. لإيجاد القدرات ، يمكننا أن نخصص بصورة اعتباطية صفر القدرة لها فارد Harvard . الأمر الذي يمكن تبريره بصورة مطلقة (لقد تكلمت بصورة رياضية) . لكن إذا لم يكن البيان مفصلاً أي أنه غير كاف ، فإن حل قطعة منفصلة من البيان يسهم بمتجه من الفضاء الصفري . يوجد ، أيضاً ، متجه يمثل بـ $x_{MIT}=1$ وتمثل البقية بـ $x_j = 0$. لذلك ، فإن علينا أن لانسقط هارفارد وحدها بل فريقاً واحداً في كل قطعة . (لا يوجد أي ظلم باعطاء قدره صفرية ؛ إذا وقعت جميع القدرات الأخرى تحت الصفر فإن الفرق الساقطة ترتب أولاً) . إن عدد ابعاد الفضاء الصفري هو عدد *قطع البيان* – إنه يساوي عدد درجات الحرية في x . تنقل هذه الحرية بتثبيت واحدة من القدرات في كل قطعة ولن يوجد عندئذ وسيلة لترتيب قطعة مقابل أخرى .

يظهر أنه من الصعب وصف فضاء الأعمدة . أي مجموعة من النقاط تلائم مجموعة من القدرات؟ من المؤكد أن النظام $Ax = b$ غير قابل للحل ، إذا هزم فريق هارفارد Harvardفريق ييلYale ، وهزم فريق ييل فريق برينكتن Prinectonوهزم فريق برينكتن فريق هارفارد . لكن ، فوق ذلك ، ***سيكون مجموع فروق النقاط حول عروه يساوي الصفر .***

$$b_{Hy} + b_{yp} + b_{PH} = 0$$

إن ذلك هو قانون الطاقة لكيرتشوفKirchhoff : – مجموع فروق الطاقة حول عروة يساوي الصفر . إنه كذلك قانون من الجبر الخطي – يمكن حل المعادلة بصورة صحيحة عندما يحقق المتجه b الارتباطات الخطية نفسها التي تحققها اسطر الطرف الأيسر . لذا يؤدي الحذف إلى $0 = 0$ ويمكن عندئذ إيجاد الحل .

في الحقيقة، من المؤكد أن b لايقع غالباً في فضاء الأعمدة وتكون مجموعة نقاط لعبة كرة القدم غير متسقة. أفضل طريق للحصول على ترتيب واقعي هو طريق ***المربعات الأصغرية***. اجعل Ax قريباً، بقدر الامكان، من b . لقدظهر ذلك في الفصل الثالث ولنذكر هنا تسوية أخرى فقط. يحصل الغالب على مكافأة قدرها خمسون نقطة. أو مئة نقطة. أيضاً. مقابل اعلى فروق النقاط. بطريقة اخرى، كسب نقطة واحدة قريب جداً من خسارة نقطة واحدة. إن ذلك يجعل الترتيبات المحسوبة قريبة جداً من نتائج الاقتراع.

ملاحظة إضافية على البرهان

بعد كتابة هذا المقطع وجدت مايلي في نيويورك *تايمس*.

لقد وضع الحاسوب، في نهاية ترتيب عام ١٩٨٥، ميامي Miami (١٠-٢) في الموضع السابع فوق تينيسي Tennessee (٩-١-٢). بعد بضع أيام من هذا النشر بدأت تصل طرود تحوي برتقالاً ورسائل ساخطة من المعجبين من تينيسي إلى القسم الرياضي في جريدة *التايمس*. لقد كان هذا الغضب نتيجة لانتصار تينيسي على ميامي بـ ٣٥ - ٧ في لعبة السكرية Sugar Bowl . لقد صنف تصويتا AP و UPI تينيسي في الموضع الرابع وصنف ميامي في موضع أخفض من ذلك بصورة بينة.

وصل في اليوم السابق صباحاً تسعة طرود من البرتقال إلى حوض السفن الرئيسي مرسلة إلى مستشفى بيلفيو Bellevue تحمل رقعة تحذير من أن نوع البرتقال ومحتوياته مشكوك فيها.

هذا كثير لمثل هذا التطبيق للجبر الخطي.

الشبكات والرياضيات التطبيقية المتقطعة

ينقلب بيان إلى شبكة عندما تمثل الأعداد $c_1,\ldots,c_m$ الأضلاع. يمكن أن يمثل c_i طول ضلع i أو سعته أو مرونته (إذا حوى نابضاً) أو ناقليته (إذا حوى مقاومة). تنتقل

هذه الأعداد إلى مصفوفة قطرية C من النوع $m \times m$. إنها تعكس "خواص مادية" على عكس مصفوفة الورود A ـ التي تعطي معلومات حول الارتباطات . بتركيب هاتين المصفوفتين A و C ، تدخلان في المعادلة الأساسية للشبكات ، ونريد شرح هذه المعادلة .

سيكون تفسيرنا بلغة الكهرباء . الناقلية على الضلع i هي c_i والمقاومة $1/c_i$.

يقول ***قانون أوم*** : إن التيار المار من هذه المقاومة هو :

$y_i = c_i e_i$ أو شدة التيار = (الناقلية) (هبوط الطاقة الكامنة)

يكتب ذلك أيضاً بالصورة $E = IR$. يساوي هبوط الطاقة شدة التيار مضروباً بالمقاومة . يصبح ***قانون أوم***، معادلة متجهة تتعلق بجميع الأضلاع دفعة واحدة ، $y = Ce$.

نحتاج إلى قانون كيرتشوف للتوتر وإلى قانون الشدة لاتمام هذه البنية :

هبوط التوتر حول عروة يساوي الصفر **KVL** :

مجموع شدات التيارات في عقدة يساوي الصفر **KCL** :

يسمح لنا قانون التوتر أن تخصص الطاقات $x_1, \ldots, x_n$ بالعقد . لذا، فان الفروق حول عروة تعطي مجموعاً مثل $(x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + (x_1 - x_3) = 0$ حيث كل الأشياء تختصر . يطلب منا قانون التيار أن نجمع التيارات في العقدة J التي تمثل في A العمود J . إنها تساوي +١ من أجل الأضلاع الداخلة بالعقدة و -١ من أجل الأضلاع الخارجة . يجمع الضرب A^Ty التيارات باشاراتها الصحيحة (الظاهرة بالأسهم المحمولة على الأضلاع) . هذا المتجه A^Ty الذي يمثل جميع التيارات في العقدة يساوي الصفر ، إذا لم يكن هناك منابع خارجية للتيار . في هذه الحالة بالذات ، يكون *قانون كيرتشوف للتيار* هو $A^Ty = 0$.

بصورة عامة ، نخصص حداً يتعلق بالمنبع . إذا أرسلت التيارات الخارجية $f_1, \ldots, f_n$ في العقد فان القانون يصبح $A^Ty = f$.

المعادلة الأخرى هي قانون أوم ، لكننا نحتاج إلى تعيين e - الذي يمثل انخفاض

التوتر *باجتياز المقاومة*. يعطي الجداء Ax فرق الطاقة بين العقد. بعكس الإشارة، $-Ax$ يعطي *انخفاض* الطاقة. جزء من هذا الانخفاض تؤديه المدخرة الواقعة في الضلع وهي ذات الشدة b_i. بقية الانخفاض لاجتياز المقاومة ويعطى بالفرق e. $b - Ax =$ لذا، يأخذ قانون أوم $y = Ce$ الصورة :

$$C^{-1}y + Ax = b \quad \text{أو} \quad y = C(b - Ax) \qquad (٣)$$

إنه يربط x بـ y. لم يعد بإمكاننا أن نجرب حل $Ax = b$ (الأمر الذي يصعب اجراؤه الآن لأنه يوجد عدد من المعادلات يزيد عن عدد المجاهيل). يوجد حد جديد $C^{-1}y$. في الحقيقة، الحالة الخاصة التي كان لها بالصدفة حل، هي، أيضاً، الحالة الخاصة التي لا يمر *فيها تيار*. في هذه الحالة يكون مجموع المدخرات حول العرى مساوياً الصفر – وليس هناك حاجة للتيار.

نؤكد على ***المعادلات الأساسية للتوازن*** التي تركب قانون أوم مع قانوني كيرتشوف :

$$\boxed{\begin{aligned} C^{-1}y + Ax &= b \\ A^{T}y \qquad &= f \end{aligned}} \qquad (٤)$$

إن ذلك نظام متناظر اختفى فيه e. المجاهيل هي التيارات y والجهود x. إنه نظام خطي ويمكنك كتابته على «صورة كتل»، مثل :

$$\begin{bmatrix} C^{-1} & A \\ A^{T} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ f \end{bmatrix}.$$

يمكنك، أيضاً، أن تجري حذفاً على صورة الكتل هذه. المحور هو C^{-1} والمضروب هو، $A^{T}C$، ويزيل الطرح A^{T} من تحت المحور. النتيجة هي :

$$\begin{bmatrix} C^{-1} & A \\ 0 & -A^{T}CA \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ f - A^{T}Cb \end{bmatrix} \qquad (٥)$$

نحل المعادلة بالنسبة لـ x الواقع في السطر الأدنى :

$$A^T CAx = A^T Cb - f \qquad (٦)$$

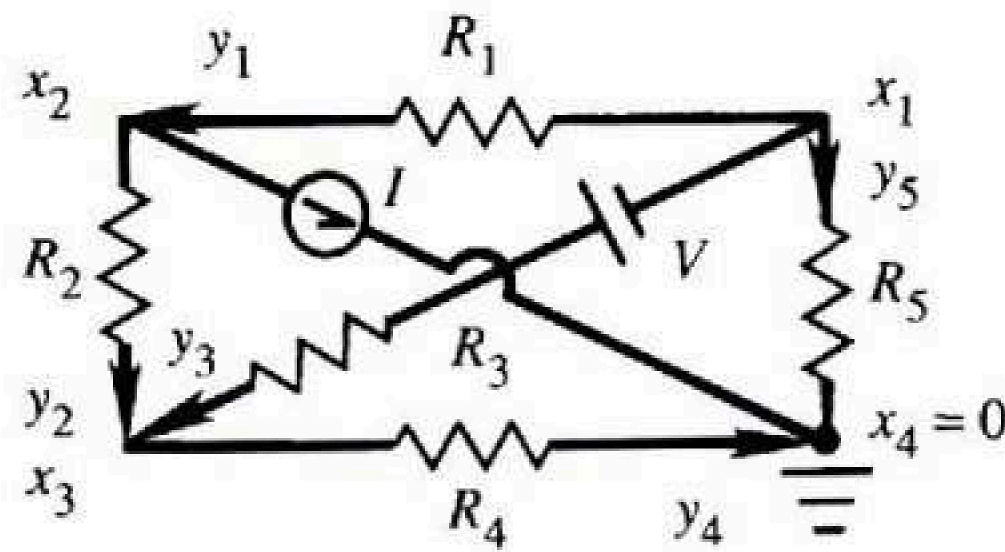
لذا، يعطي تعويض تراجعي في المعادلة الأولى المجهول y.

لا يوجد أي شيء غامض في (٦). إذا عوضنا $y = C(b - Ax)$ في $A^Ty = f$، نصل إلى تلك المعادلة. لقد حذفت التيارات y وخلفت معادلة في x.

ملاحظة مهمة: في كل هذه المعادلات، من المهم أن تكون إحدى الجهود ثابتة مسبقاً : $x_n = 0$. يجب أن تربط العقدة n بالأرض ويحذف العمود n من مصفوفة الورود. المصفوفة الناتجة هي التي عنينا بها A؛ إنها من النوع $m \times (n - 1)$ وأعمدتها مستقلة. المصفوفة المربعة A^TCA التي هي مفتاح حل المعادلة (٦) من أجل x، هي مصفوفة قابلة للعكس وهي من المرتبة $n - 1$:

$$\underset{(n-1)\times m}{\left[\;A^T\;\right]}\;\underset{m\times m}{\left[\;C\;\right]}\;\underset{m\times(n-1)}{\left[\;A\;\right]} = \underset{(n-1)\times(n-1)}{\left[A^TCA\right]}$$

مثال لنفرض أن مدخرة ومنبع تيار كهربائي (وخمس مقاومات) قد أضيفت إلى الشبكة التي ناقشناها من قريب :



الشيء الذي يجب تحقيقه هو قانون التيار $A^Ty = f$ في العقد 1,2,3 :

$$\begin{matrix} -y_1 - y_3 - y_5 = -I \\ y_1 - y_2 \qquad = 0 \\ y_2 + y_3 - y_4 = I \end{matrix} \quad \text{للمصفوفة} \quad A^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad f = \begin{bmatrix} -I \\ 0 \\ I \end{bmatrix}$$

لم تكتب معادلة من أجل العقدة 4 . في هذه العقدة، يتطلب قانون التيـــار أن يكون $-y_4+y_5 = 0$. ينتج ذلك عن المعادلات الثلاث الأخر التي مجموعها $-y_4-y_5 = 0$

المعادلة الأخرى هي $C^{-1}y + Ax = b$. يرتبط الجهد x بالتيار y بواسطة قانون أوم. تحوي المصفوفة القطرية C الناقليات الخمس $F=1/R_i$. الطرف الأيمن مكون من شدة المدخرة $b_3=V$ والكتلة $C^{-1}y + Ax = b$ فوق $A^Ty = f$:

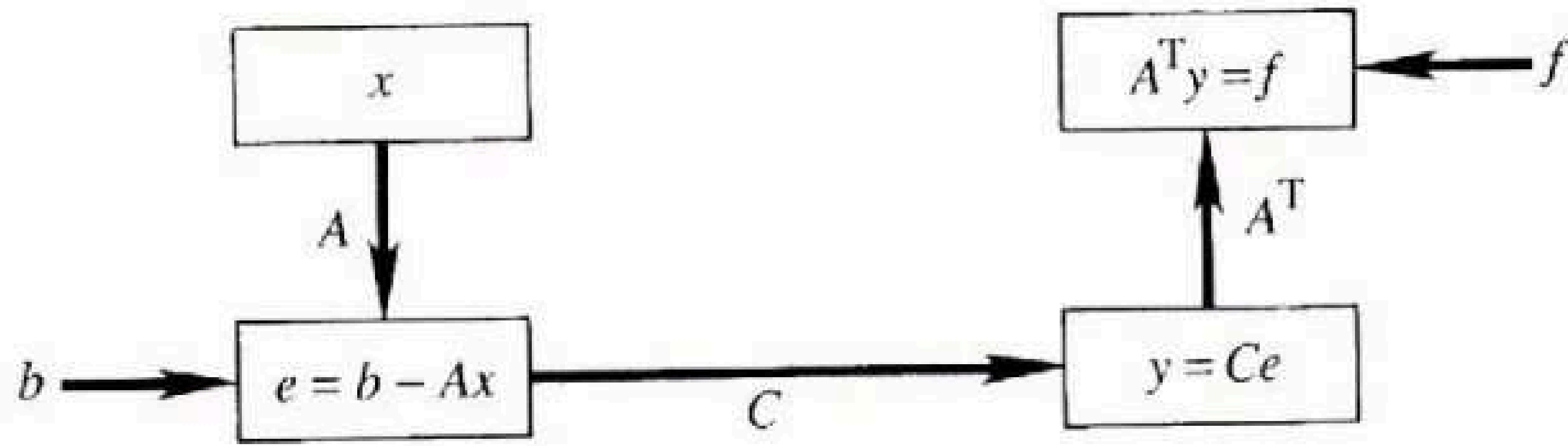
$$\begin{bmatrix} C^{-1} & A \\ A^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 & & & & & -1 & 1 & 0 \\ & R_2 & & & & 0 & -1 & 1 \\ & & R_3 & & & -1 & 0 & 1 \\ & & & R_4 & & 0 & 0 & -1 \\ & & & & R_5 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & & & \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ V \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix}$$

النظام من النوع 8×8 ، بخمسة تيارات وثلاثة جهود . يرجعه الحذف إلى نظام من النوع 3×3 ، $A^TCAx = A^TCb - f$. تحوي مصفوفة هذا النظام المقلوبات $c_i=1/R_i$ (لأنك في الحذف تقسم على المحور) . هذه المصفوفة هي A^TCA وهي تستحق النظر ـ بسبب السطر الرابع والعمود الرابع الصادرين عن العقدة المتصلة بالأرض ، إنها تحوي أيضاً :

$$A^{\mathrm{T}}CA = \begin{bmatrix} c_1+c_3+c_5 & -c_1 & -c_3 \\ -c_1 & c_1+c_2 & -c_2 \\ -c_3 & -c_2 & c_2+c_3+c_4 \end{bmatrix} \begin{matrix} -c_5 & \text{(node 1)} \\ 0 & \text{(node 2)} \\ -c_4 & \text{(node 3)} \end{matrix}$$
$$\begin{matrix} -c_5 & 0 & -c_4 & c_4+c_5 & \text{(node 4)} \end{matrix}$$

يمكنك ، تقريباً ، أن تدرك هذه المصفوفة بضرب A^T في A ـ القرنة اليسرى والسفلى والقرنة العليا واليمنى من المصفوفة ذات النوع 8×8 أعلاه . العنصر الأول هو 1+1+1 ، أو $c_1+c_3+c_5$ عندما تكون C محتواة ؛ الأضلاع 1,3,5 تصل إلى العقدة 1 .

العنصر القطري التالي هو 1+1 أو c_1+c_2، يأتي من الأضلاع التي تصل إلى العقدة 2. بصورة مشابهة، $c_2+c_3+c_4$ تصدر عن العقدة 3. خارج هذا القطر، تظهر الأعداد c باشارة ناقص *ولكن ذلك ليس لأضلاع العقدة 4 الموصولة بالأرض*. يقع ذلك في السطر *الرابع* والعمود الرابع الذي حذف عند حذف العمود 4 من A. بوصل العقدة الأخيرة بالأرض، يختصر النظام إلى المرتبة $n - 1$، والشيء الأهم من ذلك يتعلق بالمصفوفة A^TCA التي أصبحت قابلة للعكس. تتصف المصفوفة ذات النوع 4×4 بأن مجموع أي سطر من أسطرها أو عمود يساوي الصفر، وأن المتجه (1,1,1,1) يقع في فضائها الصفري. لاحظ أن A^TCA متناظرة. ومنقولها $(A^TCA)^T = A^TC^TA^{TT}$، التي هي من جديد A^TCA و لها محاور موجبة، إلا أنها نقلت إلى الفصل السادس. لقد أتت من البنية الأساسية للرياضيات التطبيقية وهي موضحة بالشكل :



شكل (٢-٦) . البنية الأساسية للتوازن : المنبعان : b و f والمصفوفة A^TCA

من أجل الشبكات الكهربائية، x يحوي جهداً و y يحوي تياراً. في المكانيك x و y يصبحان انتقالاً واجهاداً. في السوائل هما الضغط ومعدل التدفق[١]. في الاحصاء c هو الخطأ وتعطي المعادلة أفضل مربعات أصغرية ملائمة للمعطيات. الجداء الثلاثي لـ A^T, C, A يركب الخطوات الثلاث للبنية في مصفوفة فريدة تتحكم بالتوازن.

---

(١) هذه المعادلة المصفوفية والمعادلات التفاضلية المقابلة لها، قد درست في كتابي، IntroductionTo Applied Mathematics Wellesly _ Cambridg Press, Box 157 Wellesly Ma 02181

نتهي هذاالفصل بالنقطة المهمة ـ ***تقنين*** المسألة الأساسية في الرياضيات التطبيقية . كثيراً مايتطلب ذلك تبصراً أكثر من مجرد حل المسألة . لقد حللنا المعادلات الخطية في الفصل الأول كخطوة أولى في الجبر الخطي ، لكن تشييد ذلك قد احتاج إلى تفكير أكثر عمقاً في الفصل الثاني . إنَّ مشاركة الرياضيين والأفراد ليست بالحساب بل بالتفكير .

نظرة إلى الأمام

لقد قدمنا فضاء الأعمدة كمجموعة متجهات Ax ، والفضاء الصفري اليساري كحل للنظام $A^Ty = 0$ ، لأننا سنحتاج لهذه التجريدات الرياضية في التطبيقات . من أجل الشبكات ، Ax تعطي فروق الجهد محققة قانون الطاقة الكامنة ؛ y يحقق قانون التيار . بمقاومة واحدة $(C = I)$ ، تكون معادلة التوازن (4) هي :

$$y + Ax = b$$

$$A^Ty \quad = 0$$

يؤدي الجبر الخطي (أو بالأحرى التعويض المباشر) إلى $A^T(b - Ax) = 0$ ، ويحل الحاسوب المعادلة $A^TAx = A^Tb$. إلا أن هناك مصدراً آخر للتفكير لايزال من الضروري السماع إليه .

المصدر الأخير هو الهندسة . إنها تسير جنباً إلى جنب مع الجبر ولكنها تختلف عن الجبر . كما أن توجيه المتجهات حاسم رغم أن الجبر يعمل على مركباتها منفصلة . في هذه المسألة ، ليس التوجيه شيئاً أقل إثارة : Ax ***متعامد*** مع y . فروق الجهد عمودية على التيارات ! مجموعها b ، لذا ، فان المتجه b هذا يتجزأ إلى قطعتين متعامدتين ـ مسقطه Ax على فضاء الأعمدة ومسقطه y على الفضاء الصفري اليساري .

سيكون ذلك مشاركة الفصل الثالث . إنه يضيف هندسة إلى جبر الأسس والفضاءات الجزئية ، بهدف الوصول إلى الأسس المتعامدة النظامية وإلى الفضاءات

الجزئية القائمة . إنه يبين لماذا لايمكن للجبر أن يكون غير مساعد ـ إنه يعطي حلاً للنظام $Ax = b$ ***عندما يكون b غير واقع في فضاء الأعمدة*** . المعادلة ، كما تظهر ، مستحيلة الحل . لحلها ، نحذف جزء b الذي يقع خارج فضاء الأعمدة وهو الذي يجعل الحل مستحيلاً . مايبقى هو المعادلة (٧) أو $A^TAx = A^Tb$ التي تؤدي ، من خلال الهندسة ، إلى أفضل x ممكن .

تمـاريـن

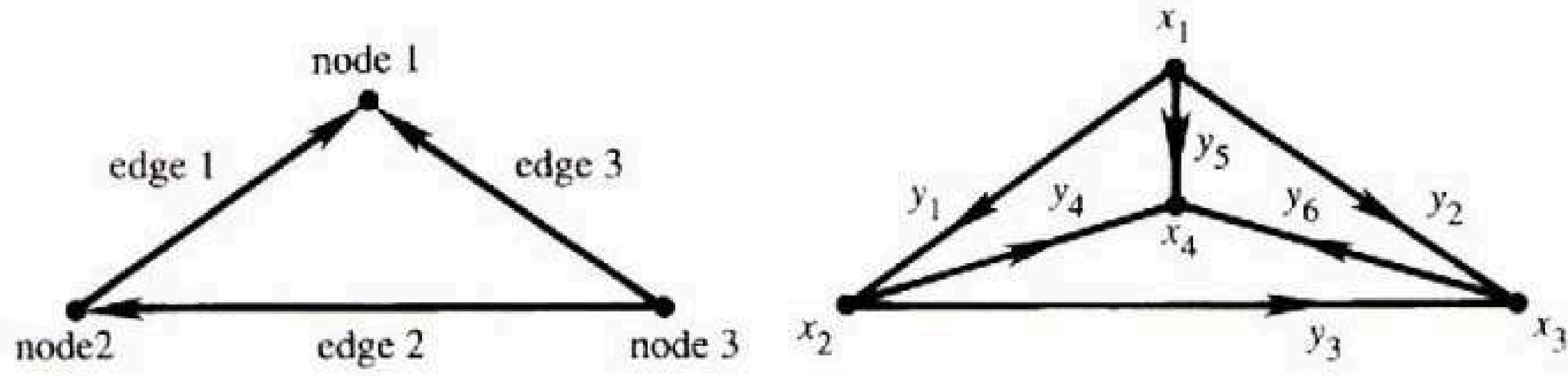
٢-٥-١ من أجل العقد الثلاث في البيان المثلثي الظاهر في الشكل أدناه ، اكتب مصفوفة ورود A من النوع 3×3 . أوجد حلاً للنظام $Ax = 0$ وصف بقيـة متجهـات الفضـاء الصـفري للمصفوفـة A . أوجد حلاً للنظام $A^Ty = 0$ وصف بقية متجهات الفضاء الصفري اليساري .

٢-٥-٢ من أجل المصفوفة ذات النوع 3×3 نفسها ، بين مباشرة من الأعمدة أن على كل متجه b من فضاء الأعمدة أن يحقق العلاقة $b_1 + b_2 - b_3 = 0$. استنتج الشيء ذاته من الأسطر الثلاثة ـ معادلات النظام $Ax = b$. ماذا يعني ذلك بالنسبة لفروق الجهد حول العروة ؟

٢-٥-٣ برهن مباشرة ، انطلاقاً من الأسطر ، أن أي متجه f من فضاء الأسطر يحقق $f_1 + f_2 + f_3 = o$. افعل الأمر ذاته انطلاقاً من المعادلات الثلاث $A^Ty = f$. ماذا يعني ذلك إذا كان f يمثل تيارات في العقد ؟

٢-٥-٤ احسب المصفوفة A^TA ذات النوع 3×3 وبرهن أنها متناظرة لكنها شاذة ـ ماهي متجهات فضائها الصفري ؟ بحذف العمود الأخير من A (وكذلك السطر الأخير من A^T) ، تبقى مصفوفة من النوع 2×2 في القرنة العليا اليسرى ؛ برهن أنها غير شاذة .

٢-٥-٥ ضع المصفوفة القطرية C التي عناصرها c_1,c_2,c_3 في الوسط واحسب A^TCA. برهن، من جديد، أن المصفوفة ذات النوع 2×2 والواقعة في القرنة العليا اليسرى قابلة للعكس.



٢-٥-٦ اكتب مصفوفة الورود A ذات النوع 4×6 المتعلقة بالبيان الثاني الوارد في الشكل أعلاه. المتجه $(1,1,1,1)$ يقع في الفضاء الصفري لـ A، لكن، سيكون هناك $m - n + 1 = 3$ من المتجهات المستقلة التي تحقق $A^Ty = 0$. أوجد ثلاثة متجهات y واربطها بالدارة الواقعة في البيان.

٢-٥-٧ إذا كان البيان الظاهر في التمرين (٢-٥-٦) يمثل ست مباريات بين أربع فرق وإن فروق النقاط هي $b_1, \ldots, b_6$، فمتى يكون من الممكن تعيين قدرات للفرق بحيث تتفق فروق القدرات تماماً مع الفروق المفروضة؟ بقول آخر أوجد (من قانون كربتشوف والحذف) الشرط الذي يجب فرضه على b ليجعل النظام $Ax = b$ قابلاً للحل.

٢-٥-٨ عين عدد أبعاد كل من المصفوفات الجزئية الأساسية لمصفوفة الورود هذه، ذات النوع 4×6 وعين أساساً لكل فضاء جزئي.

٢-٥-٩ احسب A^TA و A^TCA حيث عناصر المصفوفة القطرية C ذات النوع 6×6 هي $c_1, \ldots, c_6$. ماهو شكل القطر الرئيسي للمصفوفة A^TCA. مايمكنك القول عن البيان إذا كانت الأعداد c تظهر في السطر j؟

٢-٥-١٠ ارسم بياناً بأضلاع موجهة ومرقمة (وعقد مرقمة) يقبل مايلي مصفوفة

ورود :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

هل هذا البيان شجرة ؟ (هل أسطر A مستقلة ؟) برهن أن هذا البيان يمثل شجرة ممتدة بعد حذف الضلع الأخير . ثم تصبح الأسطر الباقية أساساً لـ؟

٢-٥-١١ بحذف العمود الأخير من المصفوفة A السابقة وبفرض أن قطر C مكون من الأعداد 1,2,2,1 اكتب النظام ذي النوع 7×7 :

$$C^{-1}y + Ax = 0$$
$$A^{T}y \qquad = f.$$

بحذف y_1, y_2, y_3, y_4 تبقى ثلاث معادلات $A^TCAx = -f$ في x_1, x_2, x_3 . حل هذه المعادلات إذا كان $f = (1,1,6)$. بهذه التيارات الداخلة في عقد الشبكة 1,2,3 ماهي الجهود في العقد والتيارات في الأضلاع ؟

٢-٥-١٢ إذا كانت A ذات النوع 12×7 مصفوفة ورود لبيان مترابط ، فما هي رتبتها؟ ماهو عدد المجاهيل الحرة في حل النظام $Ax = b$ ؟ وماهو عدد المجاهيل الحرة في حل $A^Ty = f$ ؟ ماهو عدد الأضلاع التي يجب حذفها لتبقى شجرة ممتدة ؟

٢-٥-١٣ في بيان ذي 4 عقد و6 أضلاع ، أوجد الشجرات الممتدة الست عشرة .

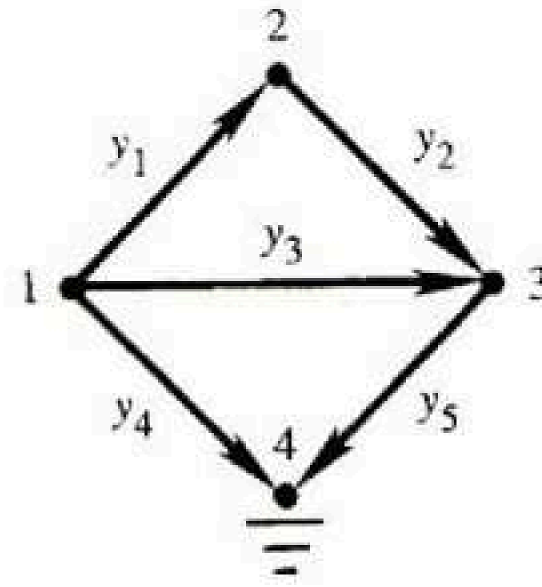
٢-٥-١٤ إذا كانت المصفوفتان E و H مربعتين ، فماهو جداء مصفوفات الكتل :

$$\begin{matrix} m_1 \text{ سطر} \\ m_2 \text{ سطر} \end{matrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix} \begin{matrix} n_1 \text{ سطر} \\ n_2 \text{ سطر} \end{matrix}$$

وماذا يكون نوع الكتل في الجداء ؟

٢-٥-١٥ إذا هزمت MIT هارفارد Harvard بـ(35 - 0) وتعادلت ييل Yale مع هارفارد وهزمت برينغتون Pingeton ييل بـ(٧ - ٦)، فما هي فروق

النقاط في المباريات الثلاث الباقية (MIT - y , MIT - P, H - P) والتي تعتبر فروق قدرات بحيث تتفق مع فروق النقاط؟
إذا كانت فروق النقاط معلومة في المباريات الواردة في الشجرة الممتدة التالية، فإنها تكون معلومة لكل المباريات



٢-٥-١٦ (أ) ماهي قوانين التيار الثلاثة $A^T y = 0$ في العقد غير الأرضية ؟
(ب) ماهو قانون التيار في العقدة الأرضية الناتج عن المعادلات الثلاث؟
(جـ) ماهي رتبة A^T ؟
(د) صف حل النظام $A^T y = 0$ بدلالة عرى في الشبكة .

٢-٥-١٧ هل يمكننا، في الطريقة التي استخدمناها لترتيب فرق كرة القدم، أن نأخذ بعين الاعتبار مقدرة المعارضة أم أن ذلك قد بين سابقاً؟

٢-٥-١٨ إذا وجد ضلع بين كل عقدتين (بيان كامل) فماهو عدد أضلاع البيان ؟ للبيان n عقدة ولايسمح بأقواس تنطلق من عقدة وتعود اليها نفسها .

٦-٢ التحويلات الخطية

في هذا البند ستتعرف كيف تحرك مصفوفة فضاءات جزئية. فالفضاء الصفري ينتقل إلى المتجه الصفري عندما يضرب بـ A. كل المتجهات تذهب إلى فضاء الأعمدة لأن Ax، في كل الأحوال، تركيب من الأعمدة. ستلاحظ قريباً شيئاً جميلاً، ذلك أن A ستنقل فضاء أسطرها إلى فضاء أعمدتها، وهي على هذه الفضاءات التي بعدها r تكون ١٠٠٪ قابلة للانعكاس. هذا هو العمل الفعلي لمصفوفة. إنها جزئياً مخفية وراء الفضاءات الصفرية والفضاءات الصفرية اليسرى التي تقع بزوايا قائمة مع فضاءات أخرى وينتقل كل منها بطريقه الخاص (نحو الصفر)، ولكن عندما تكون A مربعة وقابلة للانعكاس فليس لهذين الفضاءين قيمة تذكر. المهم هو مايحدث *داخل* الفضاء ـ أي داخل الفضاء ذي البعد النوني، عندما تكون A من النوع $n \times n$. إن هذا يتطلب نظرة أدق.

لنفترض أن x متجه ذو n بعداً. عندما نضرب A بـ x يمكن أن ننظر لذلك على أنها عملية ***تحويل*** ذلك المتجه إلى متجه جديد Ax. هذا يحدث لدى كل نقطة من الفضاء

R^n. إن الفضاء كله قد تحول أو "تم تطبيقه على نفسه" بوساطة المصفوفة A. نعطي فيمايلي أربعة أمثلة من التحويلات الصادرة عن مصفوفات.

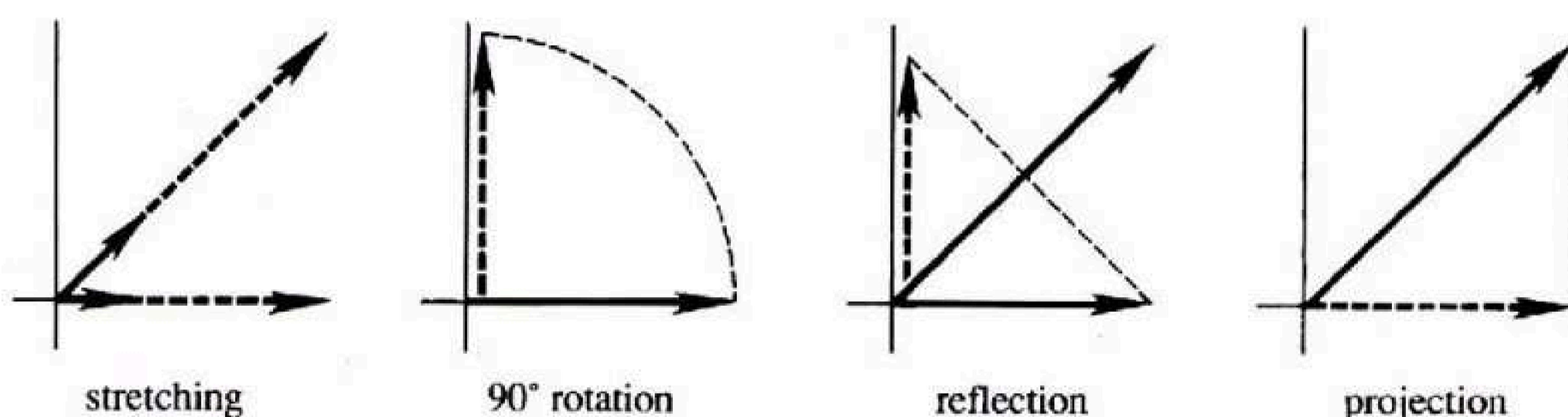
$A = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}$ ١- ***يمط*** مضاعف مصفوفة الوحدة، $A = cI$، كل متجه بمقدار المعامل c. الفضاء بأكمله يمتد أو يتقلص (أو إنه يمر خلال نقطة الأصل إلى الجهة المقابلة عندما يكون c سالباً).

$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ٢- مصفوفة ***الدوران*** تدور الفضاء بأكمله حول نقطة الأصل. هذا المثال يدور جميع المتجهات بزاوية 90^o ويحول $(1,0)$ من محور x إلى $(0,1)$ ويرسل $(0,1)$ من محور y إلى $(-1,0)$.

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ٣- مصفوفة ***الانعكاس*** تحول كل متجه إلى صورته على الجهة المقابلة

من مرآة. في هذا المثال المرآة هي المستقيم $x = y$ الذي يصنع زاوية ٤٥^{o}؛ نقطة مثل (2,2) تبقى دون تغيير، ونقطة مثل (2,-2) تنقلب إلى (2,2−). بالنسبة لتركيب مثل (4,0) = (2,-2) + (2,2)، فان المصفوفة تترك جزءًا في مكانه وتقلب الجزء الآخر. والنتيجة تكون بتبادل x,y لنحصل على (0,4):

$$A\left(\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\-2\end{bmatrix}\right)=\left(\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2\\2\end{bmatrix}\right) \quad \text{أو} \quad \begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\4\end{bmatrix}.$$



شكل (٢-٧). تحويلات المستوي بوساطة المصفوفات الأربعة

مصفوفة الانعكاس هذه هي أيضاً مصفوفة مبادلة. إنها، جبرياً، سهلة فهي تنقل (x,y) إلى (y,x)، المثال الرابع سهل بكلا الاعتبارين.

٤- مصفوفة ***الاسقاط*** تنقل الفضاء بأكمله إلى فضاء جزئي أقل سعة (ولذا، فانها غير قابلة للانعكاس). المثال المذكور يحول كل متجه (x,y) في المستوي إلى أقرب نقطة (x,o) على المحور الأفقي. هذا المحور هو فضاء الأعمدة في A. والمحور العمودي (الذي يسقط على نقطة الأصل) هو الفضاء الصفري. $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$

هذه الأمثلة يمكن، بسهولة، توسعتها إلى أبعاد ثلاثة. هناك مصفوفات تمط الأرض أو تدورها أو تعكسها على مستوي الاستواء (القطب الشمالي يتحول إلى القطب الجنوبي). هناك مصفوفة تسقط كل شيء على ذلك المستوي (كلا القطبين

على المركز). هناك أمثلة أخرى، بالتأكيد، ممكنة وضرورية. إلا أنه من المهم أن ندرك أنه ليس بإمكان المصفوفات فعل كل شيء، فبعض التحويلات غير ممكنة بوساطة المصفوفات:

(١) من المستحيل نقل نقطة الأصل إذ إن $A\ 0 = 0$ لكل مصفوفة.

(٢) إذا انتقل المتجه x إلى x'، عندئذ، يجب أن ينتقل $2x$ إلى $2x'$. بشكل عام cx سينتقل إلى cx'، إذ أن $A\ (cx) = cA\ (x)$.

(٣) إذا انتقل المتجهان x,y إلى x',y' فان حاصل جمعهما $x+y$ يجب أن ينتقل إلى $x'+y'$ حيث أن $A\ (x+y) = Ax + Ay$.

يفرض ضرب المصفوفات هذه القواعد على تحويلات الفضاء. القاعدتان الأوليان سهلتان، وتتضمن الثانية منهما الأولى (يكفي أن تجعل $c = 0$). لقد شاهدنا تأثير القاعدة الثالثة عندما انعكس المتجه (4,0) في المستقيم الذي يصنع زاوية ٤٥°. لقد جزيء إلى (2,-2)+(2,2) وهذان الجزءان انعكسا منفصلين. ويمكن فعل الشيء ذاته بالنسبة للاسقاط: نجزيء ونسقط بشكل منفصل ثم نجمع المسقطين. تصح هذه القواعد لكل ***تحويل مصدره مصفوفة***. إن أهمية تلك القواعد تجعلها تستحق اسماً: التحويلات التي تخضع للقواعد (١) ـ (٣) تسمى ***تحويلات خطية***.

يمكن دمج هذه الشروط في مطلب واحد:

٢ر لكل عددين c و d ولكل متجهين y,x، يحقق ضرب المصفوفات قاعدة الخطية:

$$A\ (cx + dy) = c\ (Ax) + d\ (Ay). \qquad (١)$$

كل تحويل يحقق هذا الشرط هو تحويل خطي.

تؤدي كل مصفوفة مباشرة إلى تحويل خطي. السؤال الأكثر أهمية هو في الاتجاه

العكسي : *هل يؤدي كل تحويل خطي إلى مصفوفة* ؟ موضوع هذا البند هو الاجابة عن هذا السؤال (بالايجاب في حالة n بعداً) . هذه النظرية هي أساس إحدى معالجات الجبر الخطي - ننطلق من الخاصة (١) ونوسع نتائجها، وهي معالجة أكثر تجريداً من المنحى الرئيسي لهذا الكتاب . لقد فضلنا أن نبدأ بالمصفوفات وسنرى فيمايلي كيف تمثل تحويلاً خطياً .

نود أن نؤكد أن التحويل الخطي ليس بالضرورة من $\boldsymbol{R}^n$ إلى $\boldsymbol{R}^n$. فمن المقبول أن ننقل متجهات من $\boldsymbol{R}^n$ إلى متجهات في فضاء مختلف $\boldsymbol{R}^m$. هذا تماماً مايتم عمله بوساطة مصفوفة من النوع $m \times n$. للمتجه الأصلي x، n مركبة، وللمتجه الناتج عن عملية التحويل الذي هو Ax ، m مركبة . إن القاعدة الخطية محققة بالمصفوفات المستطيلة، لذا، فهي تكوّن تحويلات خطية .

مادمنا قد قطعنا هذا الشوط فليس من سبب للتوقف . إن العمليات المتضمنة في الشرط (١) هي جمع وضرب بعدد، إلا أن x و y ليسا بالضرورة متجهات أعمدة من $\boldsymbol{R}^n$. إنه فضاء متوقع، إلا أنه ليس الوحيد . بالتعريف ، *أي فضاء متجهات يجيز التركيبات* $cx+dy$ - "المتجهان" هما x و y ولكن يمكن أن يكونا كثيرتي حدود أو مصفوفتين أو دالتين $x(t), y(t)$. مادام التحويل بين مثل هذه الفضاءات يحقق (١)، فهو خطي . نأخذ كأمثلة الفضاءات P_n، حيث المتجهات كثيرات حدود من درجة n . إنها من الصورة $p=a_0+a_1t+\ldots+a_nt^n$ ، عدد أبعاد هذا الفضاء هو $n+1$ (بسبب وجود الحد الثابت، فان هناك $n+1$ معاملاً) .

مثال ١ : عملية **الاشتقاق** $A=d/dt$ خطية :

$$Ap=\frac{d}{dt}(a_0+a_1t+\ldots+a_nt^n)=a_1+\ldots+na_nt^{n-1}. \qquad (٢)$$

فضاءها الصفري ذو بعد واحد ويتكون من كثيرات الحدود الثابتة $da_0/dt=0$. وفضاء الأعمدة هو p_{n-1}، عدد أبعاده n . الطرف الأيمن من (٢) ينتمي دائماً إلى هذا الفضاء . حاصل جمع الصفرية (=1) والرتبة (= n) هو عدد أبعاد الفضاء الأصلي p_n .

مثال ٢ التكامل من صفر إلى t هو تحويل خطي ، أيضاً (ينقل p_n إلى p_{n+1}) :

$$Ap = \int_0^t (a_0 + \ldots + a_n t^n)\, dt = a_0 t + \ldots + \frac{a_n}{n+1} t^{n+1} .$$

هذه المرة لايوجد فضاء صفري (ماعدا المتجه الصفري ، كما هو الحال دائماً) إلا أن التكامل لاينشىء جميع كثيرات الحدود p_{n+1}، الطرف الأيمن في (٣) لايحتوي على حد ثابت . من المحتمل أن كثيرات الحدود الثابتة ستكون الفضاء الصفري اليساري .

مثال ٣ ***الضرب*** بكثيرة حدود معينة مثل $3t + 2$ هو خطي :

$$Ap = (2 + 3t)a_0 + \ldots + a_n t^n) = 2a_0 + \ldots + 3\, a_n t^{n+1} . \quad (٣)$$

هذا يحول ، أيضاً ، p_n إلى p_{n+1} وليس هناك فضاء صفري ماعدا $p = 0$.

في هذه الأمثلة ، وفي جميع الأمثلة تقريباً ، ليس من الصعب التأكد من الخطية . نادراً مايبدو ذلك مهماً . إذا توفرت الخطية فمن المستحيل الاخفاق في اكتشافها . على كل حال ، فهي الخاصة الأكثر أهمية بين الخواص التي يتمتع بها تحويل [١] . طبعاً ، ليست معظم التحويلات خطية ، مثلاً تربيع كثيرة حدود ($Ap = p^2$) ، أو إضافة واحد ($Ap = p + 1$) أو الاحتفاظ بالمعاملات الموجبة ($A(t - t^2) = t$) . إن التحويلات تكون ، خطية ، فقط ، حينما ترد إلى مصفوفات .

التحويلات الممثلة بمصفوفات

للخطية نتيجة مهمة : إذا كان Ax معلوماً لكل متجه في *الأساس* ، عندئذ يكون Ax معلوماً لكل متجه في *الفضاء بأكمله* . لنفترض أن الأساس يتكون من n متجه $x_1,\ldots,x_n$. كل متجه آخر هو تركيب في هذه المتجهات (إنها تولد الفضاء) .

---

(١) ولعل قابلية الانعكاس تتبعها في الاهمية .

الخطية تعين Ax :

إذا كان $x = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n$ فإن $Ax = c_1 (Ax_1) + \ldots + c_n (Ax_n)$ (٤)

لن يبقى للتحويل A اختيار بعدما تقرر تأثيره على متجهات الأساس. بقية خواص التحويل تتحدد بالخطية. إن الشرط (١) الخاص بمتجهين x و y يؤدي إلى (٤) من أجل n متجهاً $x_1,\ldots,x_n$. للتحويل مطلق الحرية في متجهات الأساس (إنها مستقلة). وعندما تتعين هذه المتجهات فان التحويل بأكمله يتحدد.

مثال ٤ سؤال : أي التحويلات الخطية ينقل

$$Ax_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ إلى } x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ و } Ax_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} \text{ إلى } x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

يجب أن يكون ضرباً بالمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}.$$

إذا ابتدأنا بأساس مختلف (1,1) و (2,-1) فإن هذا أيضاً هو التحويل الخطي الوحيد الذي يتحقق من أجله :

$$A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 12 \end{bmatrix} \text{ و } A\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

ولنجرب الآن مسألة جديدة : وهي إيجاد مصفوفة تمثل الاشتقاق ومصفوفة تمثل التكامل. يمكن عمل ذلك عندما يتحدد الأساس. بالنسبة لكثيرات الحدود من الدرجة ٣ (الفضاء P_3 عدد أبعاده ٤) هناك اختيار طبيعي للمتجهات الأساسية الأربعة :

$$p_1 = 1, \quad p_2 = t, \quad p_3 = t^2, \quad p_4 = t^3 .$$

هذا الأساس ليس وحيداً (ولن يكون أبداً كذلك) إلاأن الاختيار ضروري وهذا

أنسب اختيار . لنر ماهو تأثير الاشتقاق على هذه المتجهات الأربعة . إن مشتقاتها هي $0, 1, 2t, 3t^2$ أو ،

$$Ap_1 = 0,\ Ap_2 = p_1,\ \ Ap_3 = 2p_2,\ Ap_4 = 3p_3\ .$$

يؤثر التحويل A تماماً كمصفوفة ، ولكن أي مصفوفة ؟ لنفترض أننا في الفضاء الرباعي المعتاد وبأساسه المعتاد ـ المتجهات الاحداثية $p_1 = (1,0,0,0)$, $p_2 = (0,1,0,0)$, $p_3 = (0,0,1,0)$, $p_4 = (0,0,0,1)$. عندئذ تكون المصفوفة المقابلة لـ (٥) هي :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

هذه هي «مصفوفة الاشتقاق» . Ap_1 هو العمود الأول وهو صفري ؛ Ap_2 هو العمود الثاني وهو p_1؛ Ap_3 هو $2p_2$ ؛ Ap_4 هو $3p_3$. الفضاء الصفري يحتوي على p_1 (مشتقة العدد الثابت تساوي الصفر) . فضاء الأعمدة يحتوي p_1, p_2, p_3 (مشتقة الدرجة الثالثة هي من الدرجة الثانية) . مشتقة أي تركيب آخر مثل $p = 2+t-t^2-t^3$ تتحدد بالخطية ، وليس هناك أي شيء جديد حولها ، إنها الطريقة الوحيدة للاشتقاق . سيكون أمر غير معقول أن نتذكر مشتقة كل كثيرة حدود .

يمكن للمصفوفة التالية أن تشتق كثيرة الحدود :

$$\frac{dp}{dt} = Ap \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow 1 - 2t - 3t^2\ .$$

باختصار ، إن *المصفوفة تنقل جميع المعلومات الأساسية* . إذا كان الأساس معلوماً والمصفوفة معلومة فإن التحويل الخطي يكون معلوماً .

تنظيم المعلومات بسيط . بالنسبة لتحويلات فضاء إلى نفسه ، يكفي معرفة أساس واحد . أما إذا كان التحويل من فضاء إلى آخر فان الأمر يتطلب أساساً لكل منهما .

٢ ـ ش لنفترض أن المتجهات $x_1,....,x_n$ هي أساس للفضاء V ، وأن $y_1,....y_m$ أساس للفضاء W . عندئذ يمثل كل تحويل خطي A من V إلى W بمصفوفة . نحصل على العمود j بتطبيق A على متجه الأساس الذي ترتيبه j؛ الناتج Ax_j تركيب في المركبات y_j . معاملات هذا التركيب من العمود j .

$$Ax_j = a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + ... + a_{mj}y_m .$$

في مصفوفة الاشتقاق ينتج العمود الأول عن متجه الأساس الأول $p_1=1$. مشتقته تساوي الصفر، وهكذا ، فان العمود الأول أصفار . العمود الأخير نتج عن $3t^2 = 0p_1 + 0p_2 + 3p_3 + 0p_4$. بما أن $d/dt\ (t^3) = 3t^2$ ، فان العمود الأخير يحتوي على 0,0,3,0 . القاعدة (٦) كونت المصفوفة .

نفعل الشيء نفسه بالنسبة للتكامل . هذا ينقلنا من الدرجة الثالثة إلى الرابعة محولاً $V = P_3$ إلى $W = P_4$ ، لذا، فإننا نحتاج أساساً لـ W . الاختيار الطبيعي هو $y_1 = 1 , y_2 = t , y_3 = t^2 , y_4 = t^3 \ \ y_5 = t^4$ الذي يولد كثيرات الحدود من الدرجة الرابعة . ستكون المصفوفة من النوع $m \times n$ أو 5×4 وهي تنتج عن تطبيق التكامل على كل متجه أساس لـ V :

$$Ax_4 = \tfrac{1}{4}y_5 \quad \text{أو} \quad \int_0^t t^3\, dt = \tfrac{1}{4}t^4 \quad ..., \quad Ax_1 = y_2, \quad \text{أو} \quad \int_0^t 1\, dt = t$$

وهكذا فان المصفوفة الممثلة للتكامل هي :

$$A_{\text{int}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

ملاحظة : ننظر للاشتقاق والتكامل على *أنهما عمليتان متعاكستان* . أو على الأقل، إذا تبع الاشتقاق التكامل فاننا نرجع إلى الدالة . لكي نظهر ذلك على المصفوفات، نحتاج لمصفوفة الاشتقاق من الدرجة الرابعة إلى الثالثة والتي هي من

النوع 4×5 :

$$A_{\text{diff}}\ A_{\text{int}} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A_{\text{diff}} = \begin{bmatrix} 0&1&0&0&0 \\ 0&0&2&0&0 \\ 0&0&0&3&0 \\ 0&0&0&0&4 \end{bmatrix}.$$

إن الاشتقاق هو معكوس *يساري* للتكامل. لكن المصفوفات المستطيلة لايمكن أن يكون لها معكوسان من الجانبين ! في الترتيب العكسي، لايمكن أن يكون $A_{int}\ A_{diff} = I$ صحيحاً. يفشل ذلك في العمود الأول الذي هو صفر في مصفوفة الجداء ذات النوع 5×5. مشتقة العدد الثابت تساوي الصفر. من أجل الأعمدة الأخرى $A_{int} A_{diff}$ هي مصفوفة الوحدة وتكامل مشتقة t^n هو t^n.

الدوران Q والاسقاط P والانعكاسH

ابتدأ هذا البند بدوران قدره ^{o}٩٠ ، واسقاط على محور x، وانعكاس في المستقيم الذي يصنع زاوية ٤٥ درجة كانت مصفوفاتها بسيطة بشكل خاص :

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

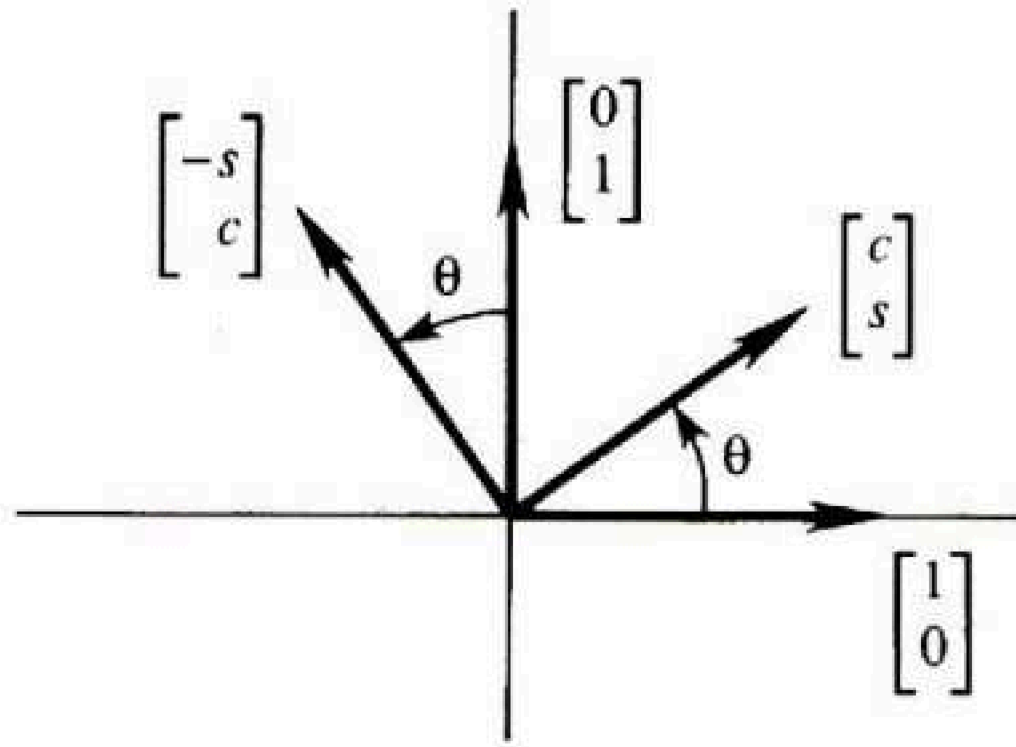
(دورا ن) (إسقـاط) (إنعكاس)

من الطبيعي أن تكون التحويلات الخطية المرافقة للمستوي x - y كذلك بسيطة، لكن يبدو لي أن الدوران بزوايا آخرى، واسقاط على مستقيمات أخرى، وانعكاسات على مرايا أخرى، جميعها تقريباً سهلة التصور. فهي تظل تحويلات خطية شريطة أن تبقى نقطة الأصل ثابتة : $A\ 0 = 0$. ويجب أن تمثل بمصفوفات باستخدام الأساس الطبيعي $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$، نود أن نتعرف على هذه المصفوفات.

١- الدوران : يظهر الشكل (٢-٨) دوراناً بزاوية θ. كذلك، يبين التأثير على متجهي الأساس. الأول ينتقل إلى $(cos\ \theta ,sin\ \theta)$ وطوله لايزال واحداً، ويقع على

«المستقيم θ». ويدور متجه الأساس الثاني (0,1) إلى ($-\sin\theta, \cos\theta$). باستخدام القاعدة (٦)، تظهر هذه الأعداد في أعمدة المصفوفة، نرمز بـ c و s للدالتين $\cos$ و $\sin$.

تعطينا هذه الجماعة من الدورانات Q_θ فرصة ممتازة لاختبار العلاقة بين التحويلات والمصفوفات:



$$Q_\theta = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} c = \cos\theta \\ s = \sin\theta \end{matrix}$$

شكل (٢-٨). دوران بزاوية θ: الهندسة والمصفوفات

هل معكوس Q_θ هو $Q_{-\theta}$ (دوران تراجعي بزاوية θ) ؟ نعم

$$Q_\Theta Q_{-\Theta} = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

هل مربع Q_θ هو $Q_{2\theta}$ (دوران بضعفي الزاوية) ؟ نعم

$$Q_\Theta^2 = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 - s^2 & -2cs \\ 2cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}.$$

هل جداء Q_θ ب Q_φ يساوي $Q_{\theta+\varphi}$ (دوران بزاوية θ ثم بزاوية φ) ؟ نعم

$$Q_\Theta Q_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\Theta\cos\varphi - \sin\Theta\sin\varphi & \text{———} \\ \sin\Theta\cos\varphi + \cos\Theta\sin\varphi & \text{———} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\Theta+\varphi) & -\sin(\Theta+\varphi) \\ \sin(\Theta+\varphi) & \cos(\Theta+\varphi) \end{bmatrix} = Q_{\Theta+\varphi}.$$

الحالة الأخيرة تحوي الحالتين الأولين. يظهر المعكوس عندما φ تساوي θ - ويظهر التربيع عندما φ تساوي θ+ . جميع الأسئلة الثلاثة تم اثباتها باستخدام المتطابقات المثلثية (وهي تعطينا طريقة جديدة لتذكر هذه المتطابقات). من الطبيعي أنه لم يكن مصادفة أن تكون الاجابات نعم. إن ضرب المصفوفات عرِّف بحيث يقابل جداء المصفوفات جداء التحويلات .

٢ت لنفترض أن A و B تحويلان خطيان من V إلى W ومن U إلى V . الجداء AB يبدأ بمتجه u في U الذي ينتقل إلى Bu في V وينتهي إلى ABu في W . هذا "التركيب" AB هو، أيضاً، تحويل خطي (من U إلى W). المصفوفة التي تمثله هي جداء المصفوفتين المثلثيتين لـ A و B .

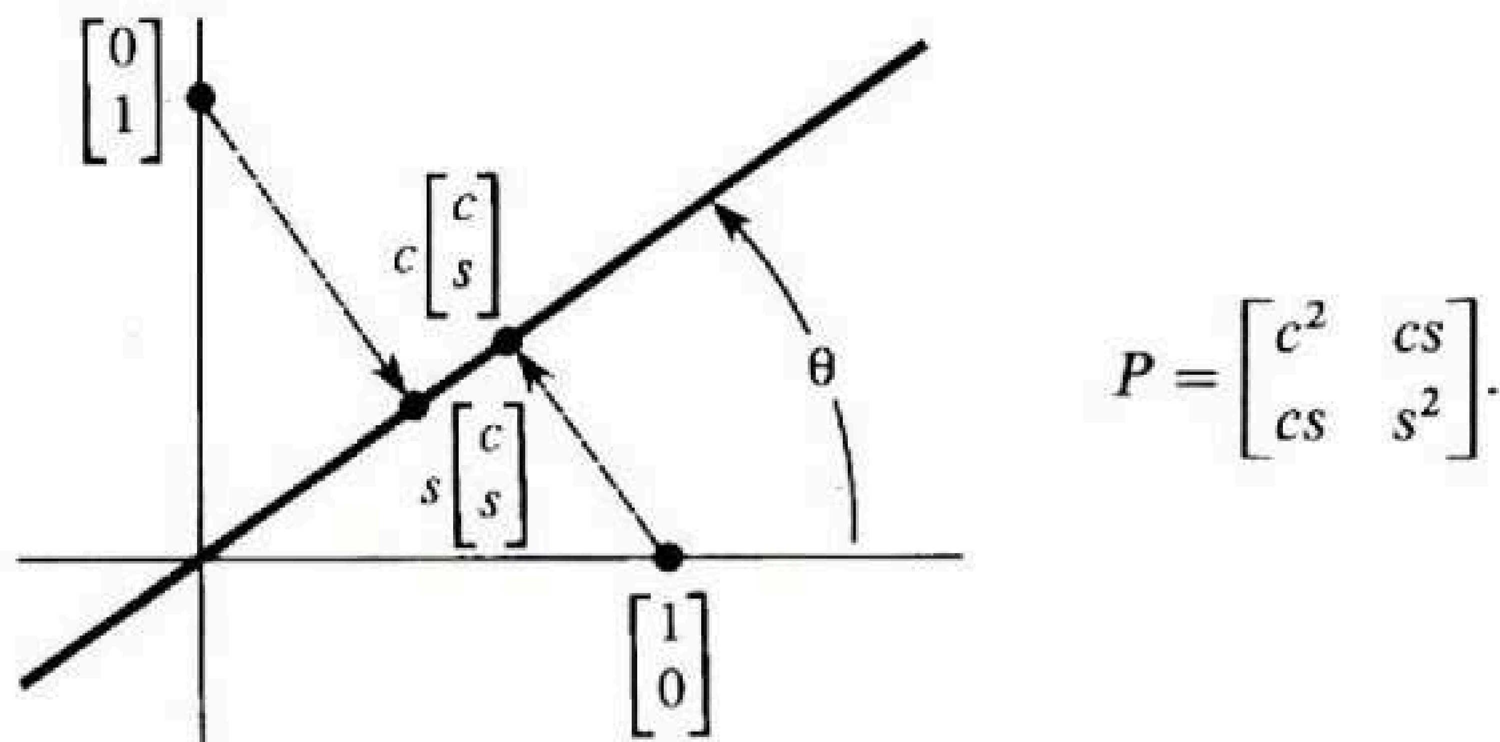
لقد تم اختبار ذلك سابقاً من أجل $A_{diff}A_{int}$ حيث التحويل الناتج كان التطابق (كذلك كان الأمر بالنسبة لـ $A_{int}A_{diff}$ التي ألغت جميع الثوابت). بالنسبة للدورانات، فإن ترتيب الضرب غير ضروري ـ تمثل U,V,W المستوي y - x كاملاً ، وكان Q_θ Q_φ مطابقاً لـ $Q_\varphi Q_\theta$. بالنسبة للاسقاط والانعكاس ، فإن تغيير الترتيب يؤدي إلى نتائج مختلفة .

ملاحظة فنية : لتكوين المصفوفات، نحتاج أساساً لكل من V و W وكذلك لـ U و V . إذا احتفظنا بالآساس نفسه لـ V فإن مصفوفة الضرب تنقل تماماً أساس U إلى أساس W . إذا ميزنا بين التحويل A وبين مصفوفته (التي سنرمز لها بـ $[A]$) فإن قاعدة الضرب ٢ ت تصبح دقيقة تماماً : $[AB]=[A][B]$. لنعيد القول : إن قاعدة ضرب المصفوفات في الفصل الأول كانت محددة تماماً من خلال هذا الشرط، بحيث تتفق مع ضرب التحويلات الخطية . نصل الآن إلى أمثلة محددة بمصفوفات جديدة .

٢- الاسقاط

يظهر الشكل (٢-٩) مسقط (1,0) على المستقيم θ . إن طول المسقط $c = \cos\theta$.

لاحظ أن نقطة المسقط ليست (c,s)، كما ظننت خطأ؛ هذا المتجه طوله 1 (إنه نتيجة الدوران). طول مسقط $(1,0)$ هو c مرة من متجه الوحدة ذاك، أو (c^2,cs). بشكل مشابه، فإن مسقط $(0,1)$ طوله s ونقطة المسقط هي (cs,s^2). ذلك يعطي العمود الثاني من مصفوفة الاسقاط.



شكل (٢-٩). اسقاط على المستقيم θ، الشكل الهندسي والمصفوفة.

هذه المصفوفة ليس لها معكوس، لأن هذا التحويل ليس له معكوس. تسقط نقاطاً مثل $(-s,c)$ من المستقيم العمودي على المستقيم θ في نقطة الأصل. هذا المستقيم هو الفضاء الصفري لـ P، وفي الوقت ذاته نقاط المستقيم θ تسقط في نفسها. بقول آخر، الاسقاط مرتين مثل الاسقاط مرة واحدة و $P^2=P$.

$$p^2=\begin{bmatrix}c^2 & cs\\ cs & s^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c^2\,(c^2+s^2) & cs\,c^2+s^2)\\ cs\,(c^2+s^2) & s^2\,(c^2+s^2)\end{bmatrix}=P.$$

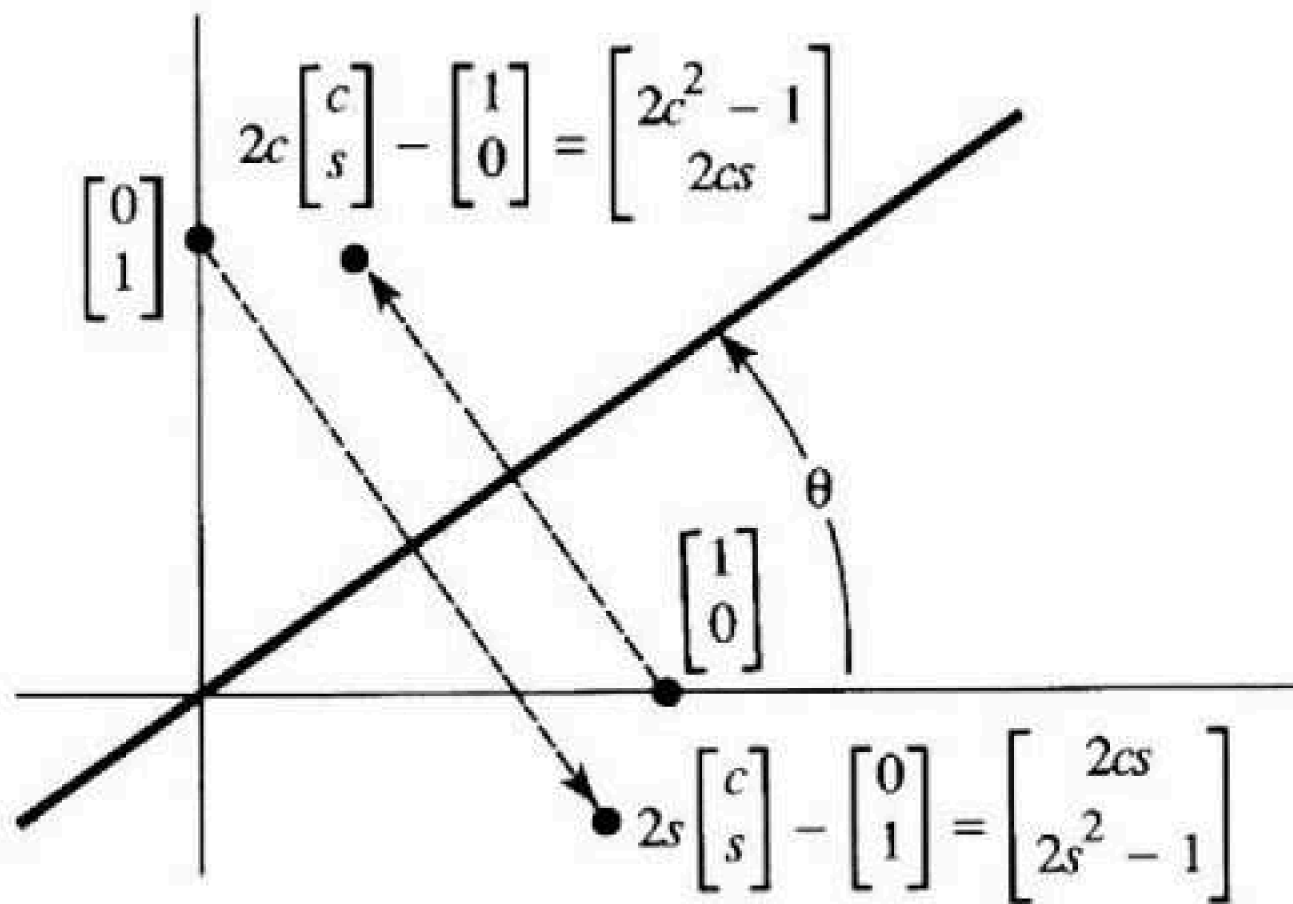
بالطبع $=\cos^2\theta+\sin^2\theta=c^2+s^2$. مصفوفة الاسقاط تساوي مربعها. إنها أيضاً متناظرة.

٣- الانعكاس : يبين الشكل (٢-١٠) انعكاس $(1,0)$ في المستقيم θ. إن طول المتجه الناتج يساوي طول المتجه الأصلي، كما هو الحال بالنسبة للدوران، إلا أن هذين التحويلين مختلفان تماماً. هنا يبقى المستقيم θ مكانه والمستقيم العمود يعكس اتجاهه، جميع النقاط تجتاز المرآة. قاعدة الخطية تحدد الباقي.

للمصفوفة H هذه خاصة تلفت النظر . إن $H^2 = I$. ***انعكاسان متتابعان يعيدان إلى الأصل***. وهكذا فان الانعكاس يساوي معكوسه $H = H^{-1}$ ، وهو أمر واضح هندسياً ولكنه أقل وضوحاً من المصفوفة . إحدى المعالجات تتم من خلال العلاقة بين الانعكاسات والاسقاطات $H = 2P - I$. هذا يعني أن $Hx + x = 2Px$ ، مجموع الصورة مع الأصل يساوي مثلي المسقط . إنها تؤكد أن :

$$H^2 = (2P - I)^2 = 4P^2 - 4P + I = I$$

لأن كل اسقاط يحقق $P^2 = P$.



$$H = \begin{bmatrix} 2c^2 - 1 & 2cs \\ 2cs & 2s^2 - 1 \end{bmatrix}$$

شكل (٢-١٠) . انعكاس حول المستقيم θ : الهندسة والمصفوفة .

هذه التحويلات الثلاثة إما أن تترك الأطوال كما هي (الدوران والانعكاس) أويقلص الطول (الاسقاط) . هناك تحويلات أخرى يمكن أن تزيد الطول ، مثل المط والقص ، نجد ذلك ، في التمارين . كل مثال له مصفوفة تمثله ـ هذا هو المحتوى الرئيسي لهذا البند . لكن هناك أسئلة حول اختيار الأساس ونؤكد *أن المصفوفة تتعلق باختيار الأساس*. مثال ذلك :

(١) بالنسبة للاسقاط، لنفترض أن متجه الأساس الأول يقع على المستقيم θ ومتجه الأساس الثاني عمودي عليه، عندئذ، تعود مصفوفة الاسقاط إلى $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. هذه المصفوفة تتكون كالمعتاد: عمودها الأول ينتج عن متجه الأساس الأول (الذي يسقط على نفسه) وعمودها الثاني ينتج عن متجه الأساس الثاني الذي يسقط على المتجه الصفري.

(٢) بالنسبة للانعكاس، يعطينا الأساس نفسه $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. متجه الأساس الثاني ينعكس على اتجاهه السالب لينتج العمود الثاني. المصفوفة H لاتزال $2P - I$ عندما يستخدم الأساس نفسه لـ H و P.

(٣) بالنسبة للدوران، يمكن أن نختار متجهات الوحدة ثانية على المستقيم θ وعلى العمود عليه. لكن المصفوفة لاتتغير. هذه المستقيمات تدور بزاوية θ و $Q = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}$. السؤال حول اختيار أفضل أساس هو سؤال رئيسي وسوف نعود اليه في الفصل الخامس. الهدف هو جعل المصفوفة قطرية كما حصل بالنسبة لـ P و H. لكي نجعل Q قطرية، فان الأمر يتطلب متجهات مركبة حيث إن جميع المتجهات الحقيقية تدور.

نذكر هنا تأثير تغيير *الأساس* على المصفوفة، بينما يبقى التحويل الخطي كما هو. المصفوفة A (أو Q أو P أو H) ***تتغير إلى*** $S^{-1}AS$. وهكذا فان تحويلاً واحداً يمثل بمصفوفات مختلفة (من خلال أسس مختلفة تتمثل بـ S). إن نظرية المتجهات الذاتية تؤدي إلى الصيغة $S^{-1}AS$ وإلى الأساس الأفضل.

تمـــاريـــن

٢-٦-١ ماهي المصفوفة التي تأثيرها تدوير كل متجه 90^o ثم، تسقط الناتج على محور ؟

٢-٦-٢ ماهي المصفوفة التي تمثل إسقاطاً على محور x متبوعاً بإسقاط على محور y ؟

٢-٦-٣ هل جداء ٥ انعكاسات و ٨ دورانات للمستوي x-y ينتج دوراناً أم انعكاساً؟

٢-٦-٤ تنتج المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ تمدداً باتجاه x . ارسم الدائرة $x^2+y^2=1$ وارسم حولها النقاط $(2x,y)$ ، الناتجة عن نقاط الدائرة بالضرب بـ A . ماهو نوع المنحني الناتج ؟

٢-٦-٥ كل مستقيم يبقى مستقيماً بعد تحويل خطي . إذا كانت z في منتصف الطريق بين x و y . برهن أن Az تقع في منتصف الطريق بين Ax و Ay .

٢-٦-٦ المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ مصفوفة تؤدي إلى تحويل شق لايؤثر شيئاً في محور y . ارسم تأثيرها على محور x وذلك ببيان ماذا يحدث للنقط $(1,0)$ ، $(2,0)$ ، $(-1,0)$ - وإلى ماتحول المحور كله ؟

٢-٦-٧ ماهي المصفوفات من النوع 3×3 التي تمثل التحويلات :

(١) تسقط كل متجه على المستوي x-y ؟

(٢) تعكس كل متجه من خلال المستوي x-y ؟

٢-٦-٨ على فراغ كثيرات الحدود من الدرجة الثالثة p_3 ، ماهي المصفوفة التي تمثل d^2/dt^2 ؟ انشىء المصفوفة ذات النوع 4×4 من أجل الأساس المعتاد $1,t,t^2,t^3$. ماهو فضاؤها الصفري وماهو فضاء أعمدتها وماذا يعني ذلك بلغة كثيرات الحدود ؟

٢-٦-٩ من كثيرات الحدود من الدرجة الثالثة إلى كثيرات الحدود من الدرجة الرابعة ، ماهي المصفوفة التي تمثل الضرب بـ $2+3t$ ؟ تنتج أعمدة المصفوفة A ذات النوع 4×5 عن تطبيق هذا التحويل على متجهات القاعدة :

$$x_1=1,\ x_2=t,\ \ x_3=t^2, x_4=t^3$$

٢-٦-١٠ حلول المعادلة التفاضلية الخطية $d^2u/dt^2=u$ تكوّن فضاء متجهات (لأن أي تركيب للحلول هو أيضاً حل). أوجد حلين مستقلين، وذلك لاعطاء أساس لهذا الفضاء.

٢-٦-١١ بالقيم البدائية $u=x$ و $du/dt=y$ عند $t=o$، ماهو تركيب متجهي الأساس في التمرين ٢-٦-١٠ الذي يحل المعادلة؟. يُعدُّ هذا التحويل من القيم البدائية إلى الحل خطياً؛ ماهي مصفوفته ذات النوع 2×2 (استخدام $x=1, y=0$ و $x=0, y=1$ أساساً لـ V وأساساً من أجل W)؟

٢-٦-١٢ تحقق مباشرة من $c^2+s^2=1$، أن مصفوفة الانعكاس تحقق $H^2=I$.

٢-٦-١٣ نفرض A تحويلاً خطياً من المستوي x-y إلى ذاته. برهن أن A^{-1} هي أيضاً تحويل خطي (إذا وجد). إذا كان A ممثلاً بالمصفوفة M، فسر لماذا A^{-1} يمثل بـ M^{-1}.

٢-٦-١٤ $(AB)C$ جداء تحويلات خطية ينطلق من متجه x فيعطي متجهاً $u=Cx$، وتنتج قاعدة التدرج (٢ت) بتطبيق AB على u. تصل إلى $(AB)Cx$.

(١) هل ستكون النتيجة ذاتها بتطبيق C ثم B ثم A بصورة منفصلة؟

(٢) هل تكون النتيجة ذاتها بتطبيق BC متبوعاً بـ A؟ إذا كان ذلك فإن الأقواس غير ضرورية وإن القانون التجميعي $(AB)C=A(BC)$ صحيح من أجل التحويلات الخطية. ضم إلى قاعدة الضرب ٢ت هذا البرهان الذي هو أفضل برهان لهذا القانون المصفوفي.

٢-٦-١٥ برهن أن A^2 تحويل خطي إذا كان A كذلك (مثلاً، الانتقال من R^3 إلى R^4).

٢-٦-١٦ فضاء المصفوفات من النوع 2×2 يقبل "المتجهات" الأربعة التالية أساساً:

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}.$$

اعتبر التحويل الخطي هو نقل كل مصفوفة من النوع 2×2 وأوجد مصفوفته A بالنسبة لهذا الأساس . لماذا $A^2=I$ ؟

٢-٦-١٧ أوجد مصفوفة من النوع 4×4 تمثل دورة تباديل : كل متجه (x_1,x_2,x_3,x_4) يتحول إلى (x_2,x_3,x_4,x_1) ماهو تأثير A^2؟ برهن أن $A^3=A^{-1}$.

٢-٦-١٨ أوجد المصفوفة A ذات النوع 3×4 التي تمثل التغيير اليميني : يتحول كل متجه (x_1,x_2,x_3) إلى $(0,x_1,x_2,x_3)$. أوجد، أيضاً ، مصفوفة التغيير اليساري B من $\boldsymbol{R}^4$ إلى $\boldsymbol{R}^3$، التي تحول (x_1,x_2,x_3,x_4) إلى (x_2,x_3,x_4) . ماذا يمثل الجداءان AB و BA ؟

٢-٦-١٩ لنفرض في فضاء متجهات كثيرات الحدود من الدرجة الثالثة $P = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$، أن S المجموعة الجزئية التي تحقق عناصرها $\int_0^1 p(x)\ dx = 0$. تحقق من كون S هي فضاءً جزئياً وأوجد له أساساً .

٢-٦-٢٠ يكون تحويل غير خطي قابلاً للعكس إذا تحقق الوجود والوحدانية ؛ لـ $f(x) = b$ حل واحد فعلاً لكل b . المثال $f(x) = x^2$ غير قابل للعكس لأن للمعادلة $x^2=b$ حلين إذا كان b موجباً ولا يوجد لها حل إذا كان سالباً . أي التحويلات التالية (من الأعداد الحقيقية $\boldsymbol{R}^1$ إلى الأعداد الحقيقية $\boldsymbol{R}^1$) قابل للعكس ؟ ليس خطياً وليس أيضاً (جـ) :

(أ) $f(x) = x^3$ ، (ب) $f(x) = e^x$ ، (جـ) $f(x)\ x + 11$ ، (د) $f(x) = \cos x$.

٢-٦-٢١ ماهو محور الدوران وزاوية الدوران للتحويل الذي ينقل (x_1,x_2,x_3) إلى (x_2,x_3,x_1)؟

تمارين مراجعة

٢-١ أوجد أساساً لكل من الفضاءات الجزئية من R^4 :

(أ) المتجهات التي يكون فيها $x_1 = 2x_4$ ،

(ب) المتجهات التي يكون فيها $x_1+x_2+x_3=0$ و $x_3+x_4=0$ ،

(جـ) الفضاء الجزئي المولد بالمتجهات $(2,3,4,5)$, $(1,2,3,4)$, $(1,1,1,1)$ ،

٢-٢ بايجاد أساس، صف فضاءً جزئياً ذا بعدين من R^3 لايحوي أي واحد من المتجهات الاحداثية : $(0,0,1)$, $(0,1,0)$, $(1,0,0)$.

٢-٣ صح أم خطأ مع مثال معاكس في حالة الخطأ

(١) إذا كانت المتجهات $x_1,...,x_m$ تولد فضاءً جزئياً S، فان عدد أبعاد S يساوي m.

(٢) لايمكن أن يكون تقاطع فضاءين جزئيين من فضاء متجهات، خالياً.

(٣) إذا كان $Ax = Ay$ فان $x = y$

(٤) لفضاء أسطر A أساس واحد يمكن الحصول عليه بجعل A ذات شكل مدرج.

(٥) إذا كان لمصفوفة مربعة أعمدة مستقلة هل يكون ذلك لـ A^2.

٢-٤ ماهو الشكل المدرج U للمصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & -7 & -2 \end{bmatrix} ?$$

ماهو عدد أبعاد كل من الفضاءات الجزئية الأساسية الأربعة ؟

٢-٥ أوجد الرتبة والفضاء الصفري لكل من المصفوفات :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

٢-٦ أوجد أساساً لكل من الفضاءات الأربعة الأساسية المرافقة لكل من :

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

٢-٧ ماهو الحل الأكثر عمومية للنظام $u-w=2$ ، $u+v+w=1$ ؟

٢-٨ (أ) أنشىء مصفوفة يحوي فضاؤها الصفري $x=(1,1,2)$

(ب) أنشىء مصفوفة يحوي فضاؤها الصفري اليساري $y=(1,5)$

(جـ) أنشىء مصفوفة يولد فضاء أعمدتها بالمتجه $(1,1,2)$ وفضاء أسطرها بالمتجه $(1,5)$

(د) إذا اعطيت أي ثلاثة متجهات من R^6 وأي ثلاثة متجهات من R^5، هل توجد مصفوفة من النوع 5×6 يولد فضاء أعمدتها بالمتجهات الثلاثة الأوائل ويولد فضاء أسطرها بالثلاثة الأواخر .

٢-٩ في فضاء متجهات المصفوفات من النوع 2×2،

(أ) هل مجموعة المصفوفات من الرتبة (١) تكون فضاء جزئياً ؟

(ب) ماهو الفضاء الجزئي المولد بمصفوفات المبادلة ؟

(جـ) ماهو الفضاء الجزئي المولد بالمصفوفات الموجبة (جميع $a_{ij}>0$) ؟

(د) ماهو الفضاء الجزئي المولد بالمصفوفات القابلة للعكس؟

٢-١٠ ابتكر فضاء متجهات يحوي جميع التحويلات الخطية من R^n إلى R^n. عليك أن تقرر عليها قاعدة جمع . ماهو عدد أبعاده ؟

٢-١١ (أ) أوجد رتبة المصفوفة A وأساساً لفضائها الصفري :

$$A=LU=\begin{bmatrix}1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 2 & 1 & 1 & \\ 3 & 2 & 4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

(ب) صح أم خطأ : الأسطر الثلاثة الأوائل من U أساس لفضاء أسطر A.

الأعمدة 1,3,6 من U أساس لفضاء أعمدة A.

أسطر A الأربعة أساس لفضاء أسطر A.

(جـ) أوجد أكبر عدد ممكن من المتجهات المستقلة b بحيث يكون للنظام $Ax = b$ حل.

(د) في الحذف في A، ماهو مضاعف السطر الثالث الذي يطرح ليعطل عمل السطر الرابع ؟

٢-١٢ إذا كانت A مصفوفة من النوع $(n - 1) \times n$ ورتبتها $n - 2$ ماهو عدد أبعاد فضائها الصفري؟

٢-١٣ استخدم حذفاً لايجاد العاملين المثلثيين $A = LU$ إذا كان :

$$A = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{bmatrix}.$$

ماهي الشروط التي تفرض على الأعداد a,b,c لتكون الأعمدة مستقلة خطياً؟

٢-١٤ هل تصلح المتجهات (1,4,3) , (2,3,6) , (1,1,3) أساساً لـ $\mathbf{R}^3$ ؟

٢-١٥ أوجد أمثلة من المصفوفات بحيث يكون عدد حلول $Ax = b$ هو :

(١) 0 أو 1 يتعلق بـ b

(٢) ∞ غير متعلق بـ b

(٣) 0 أو ∞ متعلق بـ b

(٤) 1 دون النظر في b.

٢-١٦ في التمرين السابق، كيف ترتبط r بكل من n و m ؟

٢-١٧ إذا كان x متجهاً من $\boldsymbol{R}^n$ و $x^T y = 0$ لكل y، برهن أن $x = 0$.

٢-١٨ إذا كانت A مصفوفة من النوع $n \times n$ بحيث يكون $A^2 = A$ ورتبة A تساوي n، برهن أن $A = I$.

٢-١٩ ماهو الفضاء الجزئي من فضاء المصفوفات من النوع 3×3، المولد بالمصفوفات الأولية E_{ij} حيث عناصر القطر وحدان ومالايزيد عن عنصر واحد غير صفري تحت القطر؟

٢-٢٠ ماهو عدد مصفوفات المبادلة من النوع 5×5 ؟ هل هي مستقلة خطياً ؟ هل تولد فضاء جميع المصفوفات من النوع 5×5 ؟ ليس من الضروري كتابتها كلها .

٢-٢١ ما رتبة المصفوفة ذات النوع $n \times n$ التي جميع عناصرها وحدان ؟ ماذا تقول عن مصفوفة رقعة الداما حيث $a_{ij} = 0$ عندما يكون $i + j$ شفعاً و $a_{ij} = 1$ عندما يكون $i + j$ وتراً ؟

٢-٢٢ (أ) تحت أي شروط لـ b يكون للنظام $Ax = b$ حل إذا كان :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \text{ ؟}$$

(ب) أوجد أساساً للفضاء الصفري لـ A .

(جـ) أوجد الحل العام للنظام $Ax = b$ عندما يوجد حل .

(د) أوجد أساساً لفضاء أعمدة A .

(هـ) ماهي رتبة A^T ؟

٢-٢٣ كيف يمكنك تكوين مصفوفة تحول المتجهات الاحداثية e_1, e_2, e_3 إلى المتجهات الثلاثة المعطاة v_1, v_2, v_3 ؟ متى تكون هذه المصفوفة قابلة للعكس؟

٢-٢٤ إذا كانت e_1,e_2,e_3 واقعة في فضاء أعمدة مصفوفة من النوع 5×3 ، هل لهذه المصفوفة معكوس يساري ؟ هل لها معكوس يميني ؟

٢-٢٥ افرض أن T هي التحويل الخطي على R^3 الذي ينقل كل نقطة (u,v,w) إلى $(u+v+w,u+v,u)$ صف ماذا تفعل المصفوفة T^{-1} بالنقطة (x,y,z) .

٢-٢٦ صح أم خطأ :

(أ) كل فضاء جزئي من $\boldsymbol{R}^4$ هو فضاء صفري لمصفوفة ما .

(ب) إذا كان للمصفوفة A فضاء $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ الصفري نفسه ، فإنه يجب أن تكون A مربعة .

(جـ) التحويل الذي ينقل x إلى $mx+b$ تحويل خطي (من $\boldsymbol{R}^1$ إلى $\boldsymbol{R}^1$) .

٢-٢٧ أوجد أساساً لكل من المصفوفات الاساسية الأربعة للمصفوفتين :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad , \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & 4 \end{bmatrix}.$$

٢-٢٨ (أ) إذا كانت أسطر A مستقلة خطياً (A من النوع $m \times n$) فان رتبتهاهي . . . . . وفضاء الأعمدة هو . . . . والفضاء الصفري الأيسر هو . . . .

(ب) إذا كانت A من النوع 10×8 وكان الفضاء الصفري ذا بعدين ، برهن أن $Ax=b$ قابل للحل لكل b .

٢-٢٩ صف التحويل الخطي لمستوي x-y المنسوب إلى الأساس المعتاد , $(1,0)$ $(0,1)$ والممثل بالمصفوفة :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

٢-٣٠ (أ) إذا كانت A مربعة ، برهن أن الفضاء الصفري لـ A^2 يحوي الفضاء الصفري لـ A .

(ب) برهن أيضاً أن فضاء أعمدة A^2 محتوى في فضاء أعمدة A.

٢-٣١ متى تحقق المصفوفة A ذات الرتبة المساوية للواحد، $A^2 = 0$ ؟

٢-٣٢ (أ) أوجد أساساً لفضاء متجهات $\boldsymbol{R}^6$ التي تحقق

$x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = x_5 + x_6$.

(ب) أوجد مصفوفة بحيث يكون هذا الفضاء الجزئي فضاءً صفرياً لها.

(جـ) أوجد مصفوفة بحيث يكون هذا الفضاء الجزئي فضاء أعمدتها.

٢-٣٣ نفرض أن المصفوفات الواقعة في $PA = LU$ هي :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 9 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 5 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(أ) ماهي رتبة A؟

(ب) ماهو فضاء أسطر A؟

(جـ) صح أم خطأ : الأسطر 1,2,3 من A مستقلة خطياً.

(د) ماهو أساس فضاء أعمدة A؟

(هـ) ماهو عدد أبعاد الفضاء الصفري الأيسر لـ A ؟

(د) ماهو الحل العام للنظام $Ax = 0$ ؟

الفصل الثالث

التعامد

٣-١ المتجهات المتعامدة والفضاءات الجزئية القائمة

لقد تعرفنا في الفصل السابق على الأساس. جبرياً، إنه مجموعة من المتجهات المستقلة التي تولد الفضاء. هندسياً، إنه مجموعة من محاور الاحداثيات. يُعرَّف فضاء متجهات بصورة مستقلة عن المحاور. إلا أنني في كل مرة ألجأ إلى المستوي x -y أو إلى الفضاء ذي الأبعاد الثلاثة أو R^n حيث المحاور ظاهرة. علاوة على ذلك لقد استخدمت هذه المحاور متعامدة! *كما أن المحاور الاحداثية التي أنشأها الفكر كلها*، *عملياً*، *متعامدة*. عندما نختار أساساً نحاول اختيار أساس متعامد.

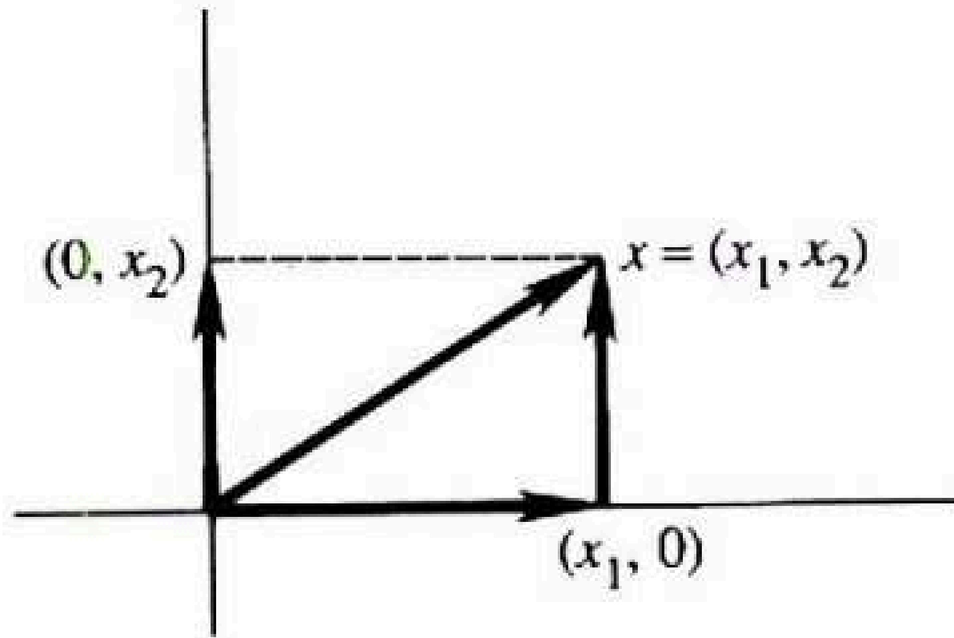
إذا كانت فكرة الأساس إحدى أسس الجبر الخطي، فان فكرة جعلها متعامدة ليست متخلفة كثيراً عنها. نحتاج إلى أساس لتحويل الهندسة إلى حسابات جبرية، ونحتاج إلى أساس متعامد لجعل هذه الحسابات سهلة. هناك، أيضاً، تخصيص اضافي، وهو الذي يجعل الأساس قريباً من الأمثل: سيكون للمتجهات طول يساوي الواحد. يمكن لذلك أن ينهي الموضوع ولكن لنكوِّن الأساس، نحتاج إلى معرفة:

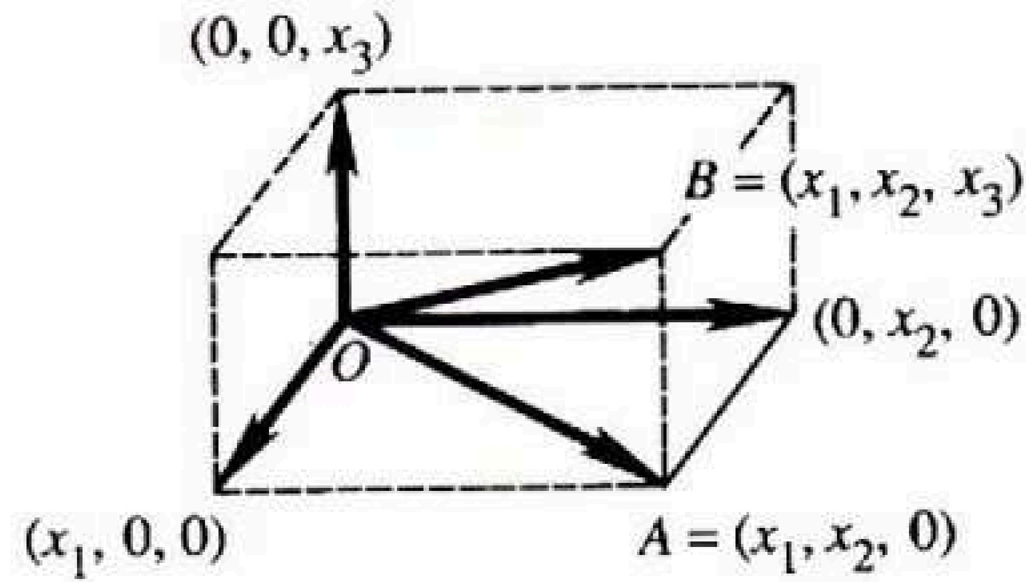
(١) طول المتجه

(٢) اختبار تعامد المتجهات،

(٣) كيف نكوِّن متجهات متعامدة من متجهات مستقلة خطياً. فوق ذلك، يجب أن ندخل الفضاءات الجزئية في الصورة. يمكنها أيضاً أن تكون متعامدة.

سنكتشف شيئاً جميلاً وبسيطاً ومن البهجة معرفته، وهو أن *كل واحد من الفضاءات الجزءية الأساسية متعامد مع فضاء آخر منها*. إنها متعامدة مثنى، اثنان في R^m واثنان في R^n إن ذلك يتم النظرية الأساسية للجبر الخطي.





شكل(٣-١). طول متجه من الفضاء الثنائي البعد والثلاثي.

الخطوة الأولى هي إيجاد **طول متجه**. يمثل بالرمز $\|x\|$ وهو في الفضاء ذي البعدين طول وتر مثلث قائم (شكل٣-١، أ). قد أعطي مربع الطول منذ زمن طويل من قبل فيثاغورس *Pythagoras* $\|x\|^2=x_1{}^2+x_2{}^2$.

في الفضاء ذي الأبعاد الثلاثة، المتجه $x=(x_1,x_2,x_3)$ هو قطر متوازي مستطيلات (٣-١، ب). ينتج طوله عن تطبيق نظرية فيثاغورس مرتين. في المرة الأولى، أعطانا الفضاء ذا البعدين القطر $0A=(x_1,x_2,0)$ الذي يقع في القاعدة ويحقق $\overline{0A}^{\,2}=x_1{}^2+x_2{}^2$. إنه يصنع زاوية قائمة مع الضلع الرأسي (الشاقولي)$(0,0,x_3)$، لذا، يمكننا تطبيق نظرية فيثاغورس من جديد (في مستوي AB و $0A$). طول الوتر في المثلث $0AB$ هو الطول $\|x\|$ الذي نريده وهو معطى بالعلاقة:

$$\|x\|^2=\overline{OA}^{\,2}+\overline{AB}^{\,2}=x_1^2+x_2^2+x_3^2\,.$$

يمكن تعميم ذلك على متجه ذي n بعداً، $x=(x_1,\dots,x_n)$ مباشرة، . ***الطول*** $\|x\|$

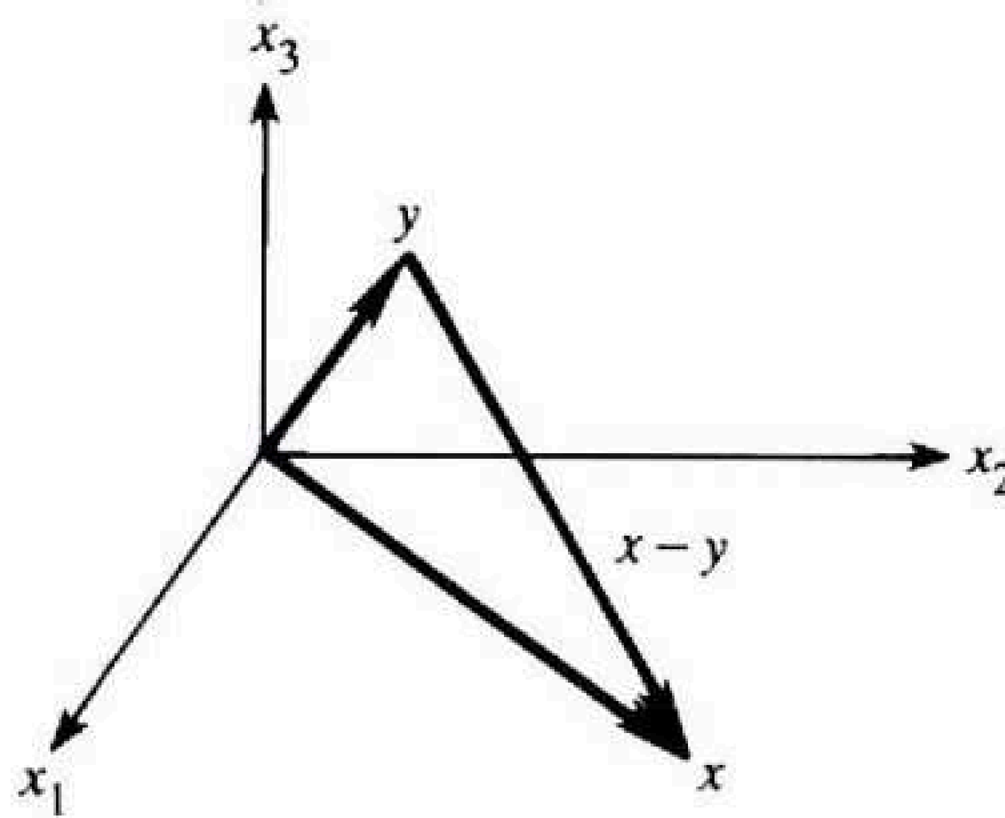
لمتجه من R^n هو الجذر التربيعي الموجب للعدد :

(١)
$$\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = x^T x .$$

يكافىء ذلك، هندسياً، تطبيق نظرية فيثاغورس n-1 مرة، يضاف في كل خطوة بعدٌ جديد. يتفق مجموع المربعات مع الجداء x^Tx، لذا، طول $x=(1,2,3)$ يساوي $\sqrt{14}$ويحقق :

$$x^T x = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = 14 .$$

لنفترض أن لدينا متجهين x,y (شكل ٣-٢). كيف يمكننا أن نقرر ما إذا كانا متعامدين أو غير ذلك ؟ بقول آخر ماهو معيار التعامد ؟ يمكن الاجابة عن هذا السؤال في المستوي ذي البعدين، من قبل علم المثلثات. نحتاج إلى تعميم ذلك على $\boldsymbol{R}^n$، ومع ذلك، سنبقى في المستوي المولد بـx,y. داخل هذا المستوي، يكون x متعامدا مع y إذا أمكنهما تكوين مثلث قائم ويمكننا استخدام قانون فيثاغورس معياراً : يكون y,x *متعامدين إذا كان* :



شكل (٣-٢) . المثلث المستوي بأضلاعه $x,y,x-y$.

(٢)
$$\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x-y\|^2 .$$

بتطبيق القانون (١)، يأخذ هذا الشرط الصورة :

$$\left(x_1^2 + \ldots + x_n^2\right) + \left(y_1^2 + \ldots + y_n^2\right) = \left(x_1 . y_1^2 + \ldots + x_n^2 y_n^2\right) + \left(y_1^2 + \ldots + y_n^2\right).$$

يختصر جزء من الطرف الأيمن مع الطرف الأيسر الذي ينشر كمايلي :

$$\left(x_1^2 + \ldots + x_n^2\right) - 2\left(x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n\right) + \left(y_1^2 + \ldots + y_n^2\right).$$

تتحقق المساواة (٢) عندما يكون مجموع الجداءات المتصالبة مساوياً الصفر : **يكون** x و y **متعامدين** إذا كان :

$$\boxed{x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n = 0.} \qquad (٣)$$

لاحظ أن هذا المقدار هو بالضبط $x^T y$ وهو حاصل ضرب مصفوفة من النوع $1 \times n$ (مصفوفة السطر x) بمصفوفة من النوع $n \times 1$ (مصفوفة العمود y) :

$$x^T y = \begin{bmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n . \qquad (٤)$$

إذا استخدمنا رمز التجميع فان ماسبق يأخذ الصورة $\sum x_i y_i$. (وهو أيضاً $y^T x$) . يظهر هذا التركيب في كل دراسة في كل هندسة ذات n بعداً . يدعى هذا المقدار ، في بعض الأحيان ، الجداء العددي للمتجهين ويمثل بالرمز $x.y$ أو (x,y) ولكننا نفضل تسميته **الجداء الداخلي** والمحافظة على الرمز $x^T y$:

٣-أ المقدار $x^T y$ هو الجداء الداخلي للمتجه x في المتجه y من R^n. إنه يساوي الصفر إذا وإذا فقط كان y,x متعامدين .

مفهوم الطول والجداء مرتبطان بالعلاقة $x^T x = x_1^2 + \ldots + x_n^2 = \|x\|^2$. المتجه الصفري هو المتجه الوحيد الذي طوله يساوي الصفر ـ بقول آخر ، هو المتجه الوحيد المتعامد مع نفسه ـ إنه صفر المتجهات . المتجه $x = 0$ متعامد مع أي متجه من الفضاء $\mathbf{R}^n$.

مثال . $x = (2, 2, -1)$ متعامد مع $y = (-1, 2, 2)$. طول كل منهما يساوي $\sqrt{4+4+1} = 3$.

يدرس البند التالي المتجهات غير المتعامدة؛ سيعطي الجداء الداخلي x^Ty زاوية هذين المتجهين. يعطي الجداء الداخلي تعريفاً طبيعياً لجيب التمام في فضاء سعته n؛ تحقق زاوية متجهين متعامدين $\cos\theta = 0$. سنبقى في هذا البند مع الزوايا القائمة. وسيكون هدفنا فهم الفضاءات الجزئية الأساسية الأربعة والخاصة التي سنراها بعد ذلك هي التعامد.

نلاحظ أولاً، أن هناك ارتباطاً بسيطاً بين الاستقلال الخطي والتعامد. *إذا كانت المتجهات غير الصفرية* $v_1,....,v_k$ *متعامدة مثنى (كل متجه متعامد مع أي متجه آخر) فانها مستقلة خطياً.*

البرهانـ لنفرض أن $c_1v_1+.....+c_kv_k=0$. لكي نبرهن، أن على المعامل c_1 ، مثلاً، أن يكون مساوياً الصفر، نكوّن الجداء الداخلي لطرفي هذه العلاقة بالمتجه v_i^T :

$$v_1^T\left(c_1v_1 + \ldots + c_kv_k\right) = v_1^T0 = 0. \qquad (٥)$$

لما كانت المتجهات v متعامدة مثنى، فانه لا يبقى في المعادلة (٥) سوى حد واحد، $c_1v_1^Tv_1 = 0$.وبسبب فرضنا أن المتجهات غير صفرية، فان $v_1^Tv_1 \neq 0$، وبذلك نجد أن $c_1 = 0$. هذا الأمر صحيح من أجل أي c_i، لذا، فالتركيب الوحيد المساوي للصفر هو التركيب التافه حيث كل $c_i = 0$. أي أن المتجهات مستقلة خطياً.

إن أهم متجهات متعامدة مثنى هي مجموعة المتجهات الاحداثية $e_1,...,e_n$ في $\boldsymbol{R}^n$. إنها أعمدة مصفوفة الوحدة وهي تكوّن أبسط أساس للفضاء R^n. إنها متجهات وحدة طول كل واحد منها $\left\|e_i\right\| = 1$. إنها تشير إلى اتجاهات محاور الاحداثيات. إذا دار هذا النظام من المتجهات، فانه ينتج عن ذلك أساس نظامي متعامد جديد وهو نظام جديد من متجهات الوحدة المتعامدة مثنى. في المستوي، يعطي هذا الدوران :

$$v_1 = (\cos\theta, \sin\theta), \quad v_2 = (-\sin\theta, \cos\theta).$$

يعطي ذلك مثالاً آخر للطول ($v_1^T v_1 = 1$ و $v_2^T v_2 = 1$) وللتعامد $v_1^T v_2 = 0$.

الفضاءات الجزئية المتعامدة

نصل الآن إلى تعامد فضاءين جزئيين. يتطلب ذلك أن يكون *كل* متجه من فضاء جزئي متعامد مع *أي* متجه من الآخر. في الفضاء ذي الأبعاد الثلاثة المعتاد، تمثل الفضاءات الجزئية بمستقيمات أو بمستويات مارة من نقطة الأصل، وفي الحالتين القصويين، بنقطة الأصل نفسها أو بالفضاء الكلي. يمكن أن يكون عدد أبعاد الفضاءات الجزئية 0,1,2,3. الفضاء الجزئي $\{0\}$ متعامد مع كل فضاء جزئي. يمكن لمستقيم أن يكون متعامداً مع مستقيم آخر أو مع مستوٍ ولكن *لا يمكن لمستوٍ أن يكون متعامداً مع مستوٍ آخر*(١). الفضاء الكلي R^3 متعامد مع $\{0\}$ فقط. في فضاءات من السعة n، التعريف الأساسي للتعامد هو مايلي :

٣-ب نقول عن فضاءين جزئيين V,W من R^n إنهما *متعامدان* إذا كان كل متجه v من V *متعامد* مع كل متجه w من W : $v^Tw = 0$ لكل v,w .

مثال ـ لنفرض أن V هو المستوي المولد بالمتجهين $v_1=(1,0,0,0)$ و $v_2=(1,1,0,0)$ وأن W هو المستقيم المولد بالمتجه $w=(0,0,4,5)$. بما أن w متعامد مع كل من v_1,v_2 فان المستقيم W متعامد مع المستوي V كاملاً.

في هذه الحالة، حيث الفضاءان الجزئيان من بعد وبعدين في R^4، سيكون هناك مكان لفضاء جزئي ثالث. إنه المستقيم L الذي يحمل المتجه $z=(0,0,5,-4)$ والمتعامد مع V و W. مجموع هذه الأبعاد 4=1+1+2، ولا يوجد متجه. سوى المتجه الصفري، متعامد مع كل من V,W,L

---

(١) نقبل أن الحائط الأمامي والحائط الجانبي في غرفة مستويان متعامدان من $R3$. لكنهما، وفق تعريفنا، غير متعامدين لأنه يمكن ايجاد مستقيمين v,w في هذين الحائطين، على الترتيب، لايصنعان زاوية قائمة.

لنبرر الآن اهتمامنا بمفهوم التعامد. أهمية هذه الأشياء أنها لاتأتي عرضاً بل تأتي زوجاً في كل مرة. في الحقيقة، الفضاءات الجزئية المتعامدة أمر لامفر منه. إنها ***الفضاءات الجزئية الأساسية*** ! هناك أربع فضاءات جزئية وتظهر مثنى.

الزوج الأول هو *الفضاء الصفري وفضاء الأسطر* . إنهما فضاءان من $\boldsymbol{R}^n$ ـ للأسطر n مركبة لذا، فهي متجهات Ax. علينا أن نبرهن، باستخدام المعادلة $Ax = 0$ فقط ***أن أسطر A متعامدة مع المتجه*** x.

٣ جـ فضاء الأسطر متعامد مع الفضاء الصفري (في $\boldsymbol{R}^n$) وفضاء الأعمدة متعامد مع الفضاء الصفري الأيسر (في $\boldsymbol{R}^m$).

البرهان الأول . لنفرض x متجهاً في الفضاء الصفري. لذا $Ax = 0$، ويمكن كتابة هذا النظام ذي الـ m معادلة بصورة أكثر وضوحاً.

$$Ax = \begin{bmatrix} \cdots & \text{١ سطر} & \cdots \\ \cdots & \text{٢ سطر} & \cdots \\ & & \\ \cdots & \text{m سطر} & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{٦}$$

النقطة الأساسية واقعة مسبقاً في المعادلة الأولى: *السطر الأول متعامد مع* x. إذ أن جداءهما الداخلي يساوي الصفر؛ هذه هي المعادلة. تذكر المعادلة الثانية الشيء ذاته من أجل السطر الثاني. بسبب وجود الأصفار في الطرف الأيمن، يكون x متعامداً مع كل سطر. لذا، فانه متعامد مع كل تركيب للأسطر. كل x من الفضاء الصفري متعامد مع كل متجه من فضاء الأسطر لذا، فان $\mathcal{N}(A) \perp \mathcal{R}(A^T)$.

الفضاءان الجزئيان المتعامدان الآخران ينتجان عن $A^Ty = 0$ أو $y^TA = 0$:

$$y^{\mathrm{T}}A = \begin{bmatrix} y_1 & \dots & y_{\mathrm{m}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{c} & & \mathrm{c} \\ \mathrm{o} & & \mathrm{o} \\ \mathrm{l} & & \mathrm{l} \\ \mathrm{u} & \dots & \mathrm{u} \\ \mathrm{m} & & \mathrm{m} \\ \mathrm{n} & & \mathrm{n} \\ 1 & & n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}. \tag{٧}$$

المتجه y متعامد مع كل عمود . تبين المعادلة ذلك بسبب أصفار الطرف الأيمن . لذا ، فان y متعامد مع كل تركيب للأعمدة . إنه متعامد مع فضاء الأعمدة وإنه متجه نموذجي من الفضاء الصفري اليساري : $\mathcal{N}(A^T) \perp \mathcal{R}(A)$. إن ذلك مماثل تماماً للنصف الأول من النظرية وذلك بتعويض A بـ A^T .

البرهان الثاني نريد أن نحقق النتيجة ذاتها بطريقة خالية من الاحداثيات . سيفيد التباين بين هذين البرهانين القارىء حتماً ، فيعطيه مثالاً خاصاً لبرهان مجرد مقابل برهان مشخص . إنني متأكد أن هذا البرهان سيكون أشد وضوحاً وأشد رسوخاً .

لنفرض أن x متجه من الفضاء الصفري و v متجه من فضاء الأسطر . لذا $Ax = 0$ و $v = A^T_z$ من أجل متجه محدد z . (المتجه v تركيب للأسطر لأنه واقع في فضاء الأسطر) . سطر واحد يكفي لبرهان كونهما متعامدين :

$$v^T x = (A^T z)^T x = z^T A x = z^T 0 = 0. \qquad (٨)$$

مثال لنفرض أن A مصفوفة رتبتها تساوي الواحد ، لذا ، فإن فضاء أسطرها وفضاء أعمدتها مستقيمان :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}.$$

الأسطر مضاعفات $(1,3)$. يحوي الفضاء الصفري المتجه $(-3,1)$ وهو متعامد مع الأسطر . فعلاً الفضاء الصفري هو ، تماماً ، المستقيم العمودي على $\boldsymbol{R}^2$ ، وهو يحقق :

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \quad , \quad \begin{bmatrix} 2 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \quad , \quad \begin{bmatrix} 3 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0.$$

بالمقابل ، يقع الزوج الآخر من الفضاءات الجزئية في $\boldsymbol{R}^3$ وهما : فضاء الأعمدة وهو مستقيم يحمل المتجه $(1,2,3)$ والفضاء الصفري اليساري مستوي . يجب أن يكون *المستوي العمودي* $y_1+2y_2+3y_3 = 0$. هذا هو ، تماماً ، محتوى $y^TA = 0$.

نلاحظ أن مجموع أبعاد الزوج الأول هو 2=1+1 في الفضاء R^2. ومجموع أبعاد الزوج الثاني (مستقيم ومستو) هو 3=2+1 في الفضاء R^3. بصورة عامة مجموع عدد أبعاد فضاء الأسطر وعدد أبعاد الفضاء الصفري هو $n=(n-r)+r$. يحقق الزوج الثاني العلاقة $m=(m-r)+r$. هناك شيء آخر أكثر من التعامد قد ظهر وأطلب منك الصبر من أجل نقطة اضافية.

من المؤكد أن الفضاء الصفري متعامد مع فضاء الأسطر ـ لكن ذلك ليس الحقيقة كاملة. $\mathcal{N}(A)$ لايحوي فقط بعض المتجهات العمودية *على* فضاء الأسطر *بل* يحوي *كل هذه المتجهات*. يتكوّن الفضاء الصفري من جميع حلول $Ax=0$.

تعريف إذا أعطينا فضاءً جزئياً V من R^n، فان فضاء جميع متجهات R^n المتعامدة مع V، يدعى *المتمم المتعامد لـ* V ويمثل بالرمز $V^{\perp}$ (يلفظ متعامد V).

إذا استخدمنا هذا المصطلح فان الفضاء الصفري $\mathcal{N}(A)$ متمم متعامد لفضاء الأسطر: $\mathcal{N}(A)=\mathcal{R}(A^T)^{\perp}$ والعكس صحيح: يحوي فضاء الأسطر جميع متجهات R^n المتعامدة مع الفضاء الصفري. إن هذا الأمر لايتضح بصورة كافية من طريق الانشاء لأنه عند حل المعادلة $Ax=0$، ننطلق من فضاء الأسطر لنجد كل x متعامد مع هذا الفضاء؛ لذا، علينا أن نتحول إلى الاتجاه المعاكس. لنفرض أن متجهاً z من R^n متعامد مع الفضاء الصفري ولكنه لايقع في فضاء الأسطر. إذا ما أضفنا z كسطر اضافي للمصفوفة A فان ذلك قد يوسع في فضاء الأسطر دون أن يغير شيئاً في الفضاء الصفري. لكننا نعلم أنه يوجد قانون ثابت. $n=(n-r)+r$ أو:

عدد أبعاد (فضاء الأسطر)+ عدد أبعاد (الفضاءالصفري)= عدد الأعمدة

بماأن هذين العددين الأخيرين لم يتغيرا عندما أضفنا السطر الجديد z فانه من المستحيل أن يتغير الأول. نستنتج أن كل متجه متعامد مع الفضاء الصفري واقع مسبقاً في فضاء الأسطر، $\mathcal{R}(A^T)=(\mathcal{N}(A))^{\perp}$.

إذا طبقنا هذه المحاكمة ذاتها على A^T فاننا نحصل على النتيجة المرافقة : *الفضاء الصفري الأيسر* $\mathcal{N}(A^T)$ *وفضاء الأعمدة* $\mathcal{R}(A)$ *كل منهما متمم متعامد للآخر* في R^m. وهذا ينهي النصف الثاني من النظرية الأساسية في الجبر الخطي. يعطي النصف الأول عدد أبعاد كل من الفضاءات الجزئية الأربعة، متضمناً الحقيقة التي تقول إن رتبة الأسطر = رتبة الأعمدة. لقد أصبحنا الآن نعلم أن هذه الفضاءات ليس كل اثنين منها متعامدين، فقط، بل إنهما متتامان متعامدان.

٣ د النظرية الأساسية في الجبر الخطي، الجزء ٢

الفضاء الصفري هو المتمم المتعامد لفضاء الأسطر في R^n.

الفضاء الصفري الأيسر هو المتمم المتعامد لفضاء الأعمدة في R^m.

نعيد، هاتان القضيتان قابلتان للعكس. يحوي فضاء الأسطر كل متجه متعامد مع الفضاء الصفري. ويحوي فضاء الأعمدة كل متجه متعامد مع الفضاء الصفري الأيسر. إن ذلك حكم صحيح محتوى في وسط الكتاب، *لكنه يقرر، تماماً، أي نظام معادلات قابل للحل!* بالنظر مباشرة، نلاحظ أن $Ax = b$ يتطلب أن يقع b في فضاء الأعمدة. وإذا نظرنا بصورة غير مباشرة، نجد أن ذلك يتطلب أن يكون b متعامداً مع الفضاء الصفري الأيسر.

٣ هـ تكون المعادلة $Ax = b$ قابلة للحل إذا وإذا، فقط، كان $b^Ty = 0$ متى كان $A^Ty = 0$.

العرض المباشر هو «يجب أن يكون b تركيباً للأعمدة». العرض غير المباشر «b متعامد مع كل متجه متعامد مع الأعمدة». لايمكن اعتبار ذلك تحسيناً (ليوضع في وسط السطر). لكن، إذا وجد كثير من الأعمدة ومتجه أو متجهان فقط متعامدان

معها، فمن السهل جداً التحقق من الشرط أو الشرطين $b^Ty = 0$. هناك مثال سهل في البند (٢-٥) هو قانون كريتشوف في التوتر. يعدُّ اختبار الصفر حول عروة أسهل بكثير من التعرف على تراكيب الأعمدة.

مثال : مجموع الأطراف اليمنى في المعادلات التالية يساوي الصفر :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad \text{أو} \quad \begin{aligned} x_1 - x_2 &= b_1 \\ x_2 - x_3 &= b_2 \\ x_3 - x_1 &= b_3 \end{aligned}$$

تكون هذه المعادلات قابلة *للحل إذا وفقط إذا كان مجموع الأطراف اليمنى يساوي الصفر*. كما أن التحقق من كون $b_1+b_2+b_3=0$ ـ الأمر الذي يجعل b متعامداً مع $y = (1,1,1)$ الواقع في الفضاء الصفري الأيسر ـ أسهل من التحقق من كون b تركيباً خطياً في الأعمدة. وفق النظرية الأساسية، إنها الشيء ذاته.

المصفوفة والفضاء الجزئي

نريد أن نؤكد أنه يمكن لـ V و W أن يكونا متعامدين دون أن يكونا متتامين، عندما يكونا صغيري السعة. المستقيم V المولد بالمتجه (1,0,0) متعامد مع المستقيم W المولد بالمتجه (0,0,1)، ولكن في، فضاء ذي ثلاثة أبعاد، V ليس $W^{\perp}$. كما أن المتمم العمودي لـ W ذو بعدين. إنه مستوٍ والمستقيم V ماهو إلا جزء منه. إذا كانت الأبعاد متلائمة، فإن الفضاء الجزئي العمودي هو، بالضرورة، متمم عمودي. كان هذا حال فضاء الأسطر مع الفضاء الصفري، ويمكن البرهان بصورة عامة :

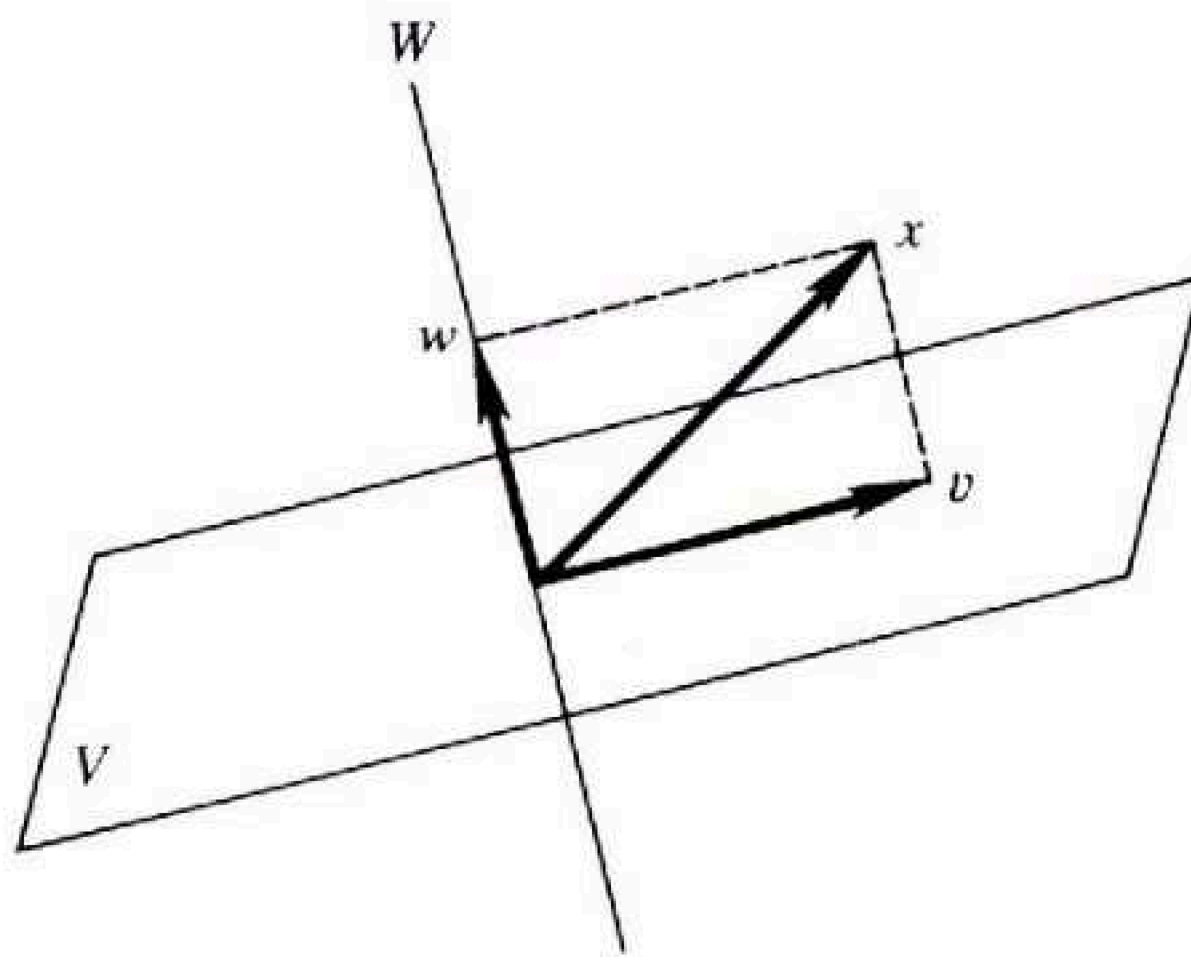
إذا كان $W = V^{\perp}$ فإن $V = W^{\perp}$

بقول آخر $V^{\perp\perp} = V$! . أبعاد V و W متلائمة، وينقسم الفضاء إلى جزئين متعامدين شكل (٣-٣).

عندما يقسم الفضاء إلى جزأين متعامدين، فان ذلك يعني أن ذلك يجري على كل متجه : $x = v + w$. المتجه v هو المسقط على الفضاء الجزئي V. المركبة العمودية

wهي مسقط x على W . البند التالي يبين كيف نجد هذين المسقطين؛ نريد هنا استخدامهما . إن ذلك يؤدي إلى شكل ، من المحتمل ، أن يكون أكثر أشكال الكتاب أهمية (شكل ٣-٤) .

يلخص الشكل (٣-٤) النظرية الأساسية في الجبر الخطي . إنه يوضح التأثير الصحيح لمصفوفة ـ ماذا يحدث تحت المظهر السطحي للضرب Ax. أحد جزأي



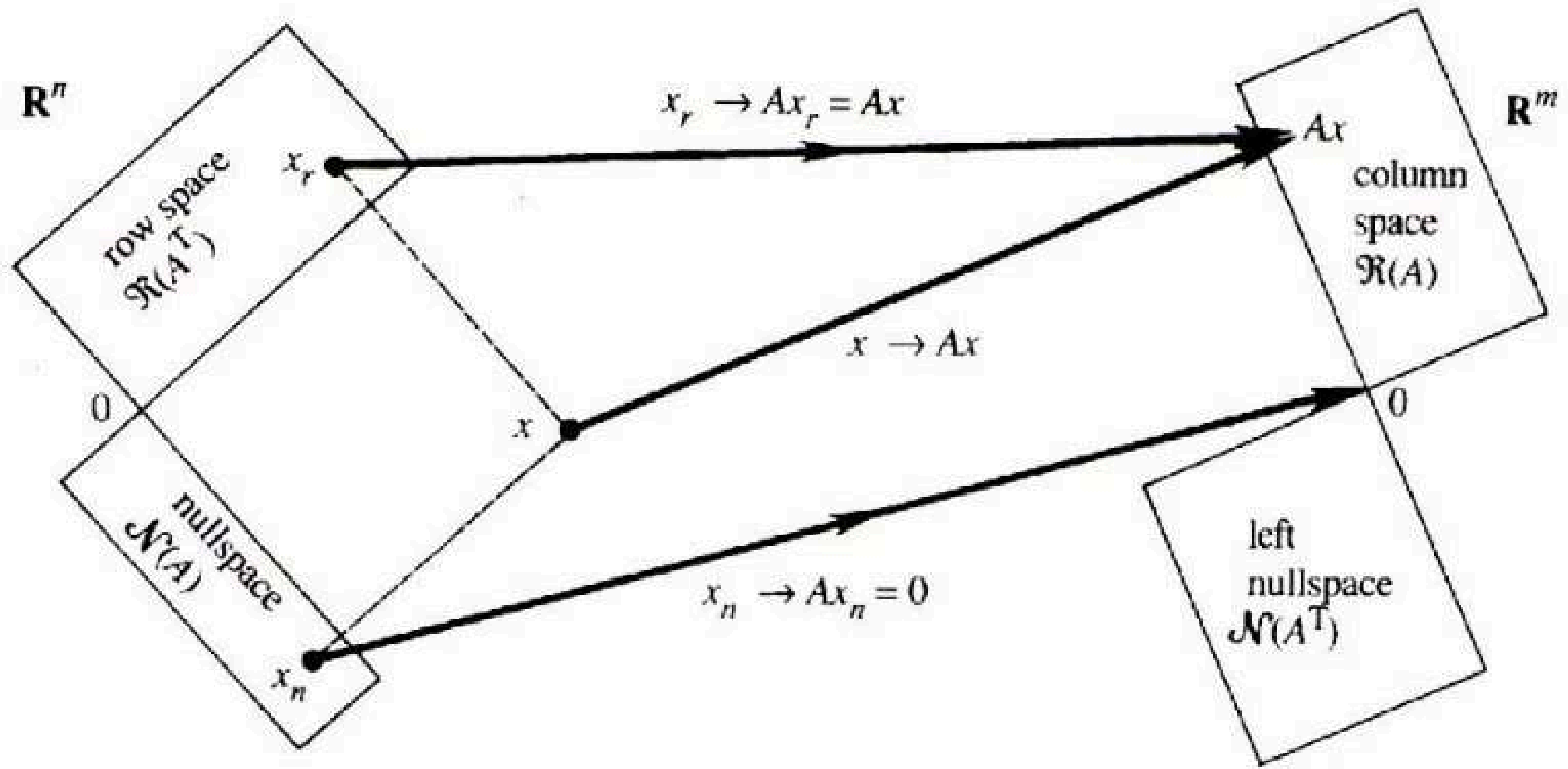
شكل(٣-٣) . المتممان العموديان في R^3 .

النظرية يعين عدد *أبعاد* الفضاءات الجزئية . النقطة الأساسية هي أن لفضاء الأسطر ولفضاء الأعمدة السعة ذاتها r (الرتبة) . نعرف الآن ، أيضاً ، توجيه كل من الفضاءات الأربعة : فضاءان جزئيان متتامان ومتعامدان في R^n والآخران في R^m ـ الفضاء الصفري ينقل إلى صفر المتجهات . و لايوجد شيء ينقل إلى الفضاء الصفري الأيسر . التأثير الحقيقي هو بين فضاء الأسطر وفضاء الأعمدة ، ويمكنك أن ترى ذلك بالنظر في متجه نموذجي x. إن له «مركبة من فضاء الأسطر »، و «مركبة من الفضاء الصفري»، $x = x_r + x_n$. عندما نضربه بـ A نجد $Ax = Ax_r + Ax_n$.

مركبة الفضاء الصفري تفضي إلى الصفر $Ax_n = 0$

مركبة فضاء الأسطر تفضي إلى فضاء الأعمدة $Ax_r = Ax$.

طبعاً، كل شيء ينتهي إلى فضاء الأعمدة ـ لايمكن للمصفوفة أن تعمل أي شيء غير ذلك ـ ويبين الشكل ماذايحدث(١).



شكل (٣-٤) تأثير المصفوفة A.

٣ و التطبيق من فضاء الأسطر إلى فضاء الأعمدة هو، فعلاً، قابل للعكس. كل متجه b من فضاء الأعمدة يأتي من متجه واحد وواحد فقط x_r من فضاء الأسطر.

البرهان إذا كان b من فضاء الأعمدة، فإنه التركيب Ax للأعمدة. فعلاً، إنه Ax_r، حيث x_r واقع في فضاء الأسطر، لأن مركبة الفضاء الصفري تعطي $Ax_n = 0$. إذا أعطى متجه آخر x'_r، من فضاء الأسطر، $Ax'_r = b$، فسيكون $A(x_r - x'_r) = b - b = 0$. يضع ذلك $x_r - x'_r$ في الفضاء الصفري وفضاء الأسطر معاً، الأمر الذي يجعله متعامداً مع نفسه. لذا، فإنه الصفر وبالتالي $x_r = x'_r$. بالضبط. انتقل متجه واحد من الفضاء الصفري إلى b.

(١) ماكنت أعرف حقاً كيف يمكن رسم فضائين جزئيين متعامدين عدد ابعادهما r و n - r . إذا عرفت هذه الأبعاد والتعامد، فلا تتابع الشكل (٣ - ٤) كي لايختلط عليك الأمر.

كل مصفوفة تحول فضاء أسطرها إلى فضاء أعمدتها.

على هذين الفضاءين اللذين عدد أبعادهما r، تكون المصفوفة A قابلة للعكس. وعلى فضائها الصفري، تقوم المصفوفة A بدور المصفوفة الصفرية. يمكن رؤية ذلك بسهولة عندما تكون A قطرية! فالمصفوفة الجزئية التي يتكون قطرها من العناصر غير الصفرية (عددها r) قابلة للعكس. نعلم الآن أن هذه الفكرة صحيحة دوماً. إضافة إلى ذلك، فإن A^T تعمل في الاتجاه المعاكس، من R^m رجوعاً إلى R^n ومن $\mathcal{R}(A)$ رجوعاً إلى $\mathcal{R}(A^T)$. طبعاً، النقل ليس عكساً! A^T يحرك الفضاءات بشكل مضبوط ولكن ليس ذلك بصورة فردية بالنسبة للمتجهات. هذا الفخر يخص A^{-1} إذا كانت موجودة ـ وهي تكون موجودة فقط إذا كان $r=m=n$. وإلا فانني أطلب إليها أن تعيد فضاءً صفرياً كاملاً خالياً من المتجه الصفري، الأمر الذي لا توجد مصفوفة قادرة على عمله.

عندما يتعثر وجود A^{-1}، يمكنك أن تجد بديلاً طبيعياً. إنه يدعى ***المعكوس الكاذب*** الذي يمثل بالرمز A^+. إنه يعكس A عندما يكون ذلك ممكناً: $A^+Ax=x$ حيث x من فضاء الأسطر. لا يوجد شيء يمكن عمله على الفضاء الصفري الأيسر: $A^+y=0$. لذا، فان A^+ تعكس A عندما تكون قابلة للعكس، وستحسب في الملحق. يتعلق هذا الحساب بواحد من أهم تحاليل المصفوفات ـ ***تحليل القيمة الشاذة*** ـ نحتاج من أجل ذلك أن نتعرف على القيم الذاتية.

تمارين

٣-١-١ أوجد طول كل من $x=(1,4,0,2)$ و $y=(2,-2,1,3)$ وجداءهما الداخلي.

٣-١-٢ أوجد مثالاً من R^2 لمتجهات مستقلة خطياً وغير متعامدة فيما بينها. أعط أيضاً مثالاً لمتجهات متعامدة فيما بينها ولكنها غير مستقلة.

٣-١-٣ انسجاماً مع الهندسة التحليلية، يكون مستقيمان من المستوي متعامدين

إذا كان جداء ميليهما يساوي -١ . طبق ذلك على المتجهين $x = (x_1,x_2)$ ، $y = (y_1,y_2)$ ، علماً أن ميليهما هما x_1/x_2 ، y_1/y_2 لنحصل من جديد على شرط التعامد $x^Ty = 0$.

٣-١-٤ كيف تعرف أن السطر i من مصفوفة قابلة للعكس B متعامد مع العمود j من B^{-1} ، إذا كان $i \neq j$ ؟

٣-١-٥ عين المتجهين المتعامدين بين المتجهات :

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}?$$

٣-١-٦ في R^3 ، أوجد جميع المتجهات العمودية على (1,1,1) و (1,-1,0) . استنتج من هذه المتجهات نظام متجهات وحدة متعامدة فيما بينها (مجموعة متعامدة ـ نظامية) في R^3 .

٣-١-٧ أوجد متجهاً x متعامداً مع فضاء الأسطر ومتجهاً y متعامداً مع فضاء الأعمدة للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

٣-١-٨ إذا كان W و V فضائين جزئيين متعامدين ، برهن أن المتجه الوحيد المشترك بينهما هو المتجه الصفري : $V \cap W = \{0\}$.

٣-١-٩ أوجد المتمم المتعامد للمستوي المولد بالمتجهين (1,2,3) و (1,1,2) ، وذلك بأن تعتبر هذين المتجهين سطري مصفوفة A وتحل النظام $Ax = 0$. تذكر أن المتمم مستقيم كامل .

٣-١-١٠ كون نظام معادلات متجانسة بثلاثة مجاهيل بحيث يكون حلها تراكيب خطية للمتجهين الواردين في التمرين السابق . إن هذا التمرين عكس

السابق ولكن هذين التمرينين هما في الحقيقة شيء واحد .

٣-١-١١ كثيراً ماتعرض النظرية الأساسية في الجبر الخطي بصورة بديلة تنسب إلى Fredholm : لكل A و b ، واحد وواحد فقط من النظامين التاليين يقبل حلاً :

$$(1)\, Ax = b \qquad (2)\, A^{\mathrm{T}}\mathrm{y} = 0,\ \mathrm{y}^{\mathrm{T}}b \neq 0.$$

بقول آخر ، سواء أكان b من فضاء الأعمدة $\mathscr{R}(A)$. أو وجد متجه y من $\mathscr{N}(A^T)$ بحيث يكون $y^Tb \neq 0$ ، برهن أن وجود حل لكل من (١) و (٢) في آن واحد يوقع في التناقض .

٣-١-١٢ أوجد أساساً للفضاء الصفري للمصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix},$$

ثم تحقق من أنه متعامد مع فضاء الأسطر . فرق المتجه $x = (3,3,3)$ إلى مركبة x_r في فضاء الأسطر ومركبة x_n في الفضاء الصفري .

٣-١-١٣ وضح عمل A^T برسم مشابه لذلك الظاهر في الشكل (٢-٤) وذلك بارجاع $\mathscr{R}(A)$. إلى فضاء الأسطر والفضاء الصفري اليساري إلى الصفر .

٣-١-١٤ برهن أن $x - y$ و $x + y$ متعامدان إذا وإذا فقط كان $\| x \| = \| y \|$.

٣-١-١٥ أوجد مصفوفة يحوي فضاء أسطرها المتجه (1,2,1) ويحوي فضاؤها الصفري المتجه (1,-2,1)، أو برهن أنه لاتوجد مثل هذه المصفوفة .

٣-١-١٦ أوجد جميع المتجهات المتعامدة مع (1,4,4,1) و (2,9,8,2) .

٣-١-١٧ إذا كان V المتمم العمودي لـ W في $\boldsymbol{R}^n$، هل توجد مصفوفة فضاء أسطرها V وفضاؤها الصفري W ؟ انطلق من أساس لـ V وبين كيف يمكن انشاء مثل هذه المصفوفة .

٣-١-١٨ إذا كان $S = \{0\}$ الفضاء الصفري من $\boldsymbol{R}^4$ الذي يحوي نقطة الأصل ،

فقط . ماهو $S^\perp$ ؟ إذا كان S مولداً بالمتجه (0,0,0,1) فما هو $S^\perp$ ؟

٣-١-١٩ صح *أو خطأ* :

(أ) إذا كان V متعامداً مع W ، فان $S^\perp$ متعامد مع $W^\perp$.

(ب) إذا كان V متعامداً مـع W و W متعامداً مع Z ، فـان V متعامد مع Z

٣-١-٢٠ نفرض أن S فضاء جزئي من R^n . فسر ماذا يعني $S=(S^\perp)^\perp$ ولماذا هو صحيح ؟

٣-١-٢١ نفرض أن p مستويٍ (ليس فضاءً جزئياً) في الفضاء ذي الأبعاد الثلاثة ، يحقق $x+2y-z=6$. أوجد معادلة مستو P' يوازي p ويمر من نقطة الأصل . أوجد، أيضاً ، متجهاً متعامداً مع هذين المستويين . ماهي المصفوفة التي فضاؤ ها الصفري هو المستوي p وماهي المصفوفة التي فضاء أسطرها p' ؟

٣-١-٢٢ نفرض أن S الفضاء الجزئي من R^4 الذي يحوي كل متجه يحقق $x_1+x_2+x_3+x_4=0$. أوجد أساساً للفضاء $S^\perp$ الذي يحوي كل متجه متعامد مع S .

٣-٢ الجداء الداخلي والاسقاط على مستقيم

لقد رأينا سابقاً أن الجداء الداخلي للمتجهين x, y هو العدد x^Ty . حتى الآن لم نهتم إلا بكون الجداء الداخلي مساوياً الصفر أم لا ـ بقول آخر ، ما إذا كان المتجهان متعامدين أم لا . نريد الآن أن ننظر في إمكان أن لا يكون الجداء الداخلي *صفراً* أو لاتكون الزوايا قائمة ـ ونستنتج العلاقة بين الجداء الداخلي والزاوية . والعلاقة بين الجداء الداخلي والمنقول . في الفصل الأول ، أجري الانتقال بالمبادلة بين أسطر وأعمدة مصفوفة . سنعمل الآن بصورة أفضل من هناك .

إذا حاولنا تلخيص بقية ذلك الفصل فلا يمكننا أن ننكر أن *قضية التعامد كانت* ،

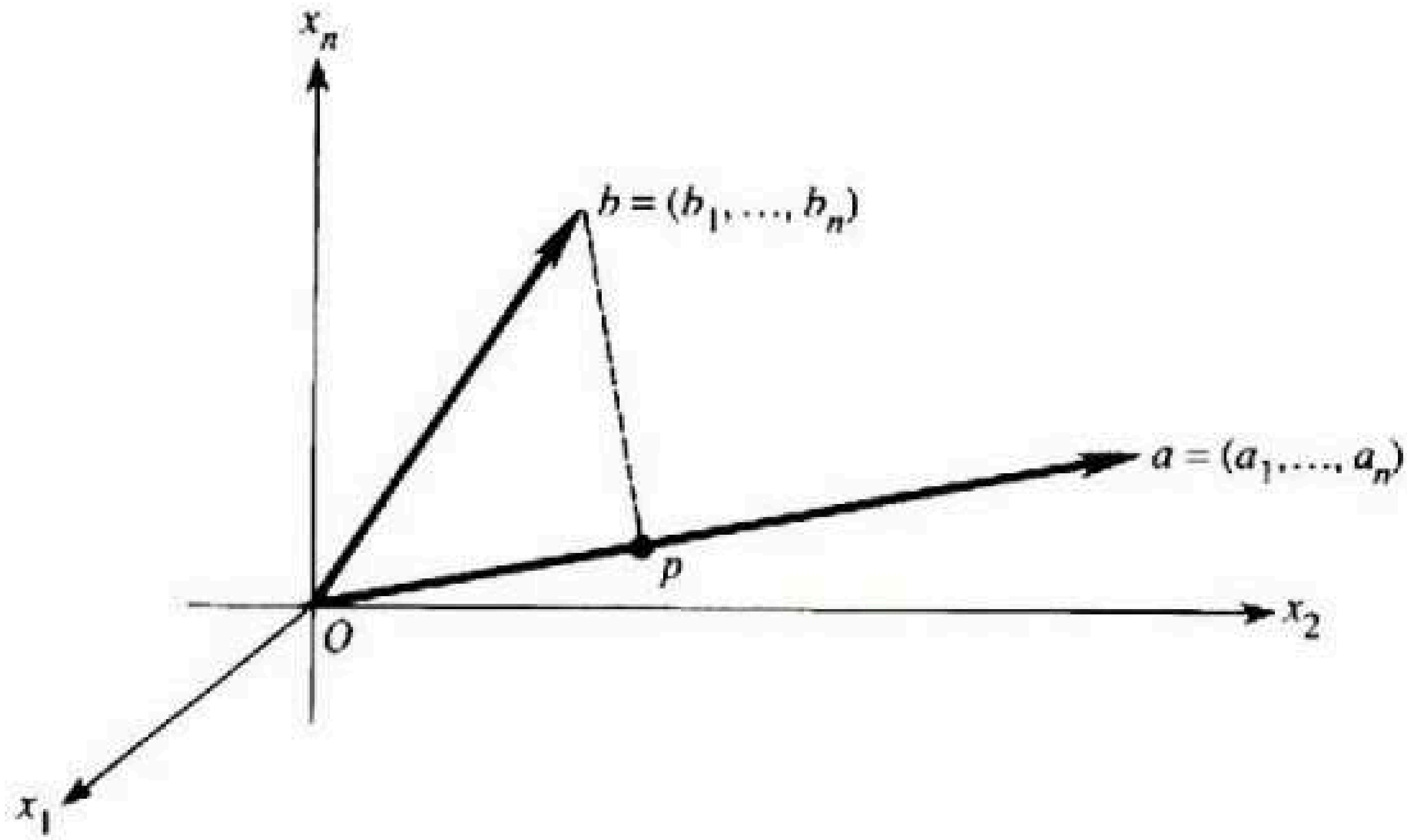
إلى حد كبير، الأكثر أهمية. لنفرض نقطة b في الفضاء ذي الـ n بعداً، نريد ايجاد بعدها عن مستقيم مفروض، لنقل مثلاً، إنه المستقيم الذي له اتجاه المتجه a. نبحث على هذا المستقيم، عن النقطة p الأكثر قرباً من b. يكمن الحل في الهندسة. سيكون ***المستقيم الواصل*** بين b و p (المستقيم المنقط في الشكل ٣-٥) ***عموداً على المتجه الأصلي***. ستسمح *لنا هذه الحقيقة بإيجاد النقطة* p *الأكثر قرباً من* b وحساب بعدها عن هذه النقطة. رغم أن المتجهين a و b غير متعامدين، فان حل هذه المسألة يقود إلى التعامد بصورة آلية.

سيكون الوضع ذاته فيما إذا أعطينا، بدلاً من المستقيم ذي الاتجاه a، مستوياً ـ أو بصورة أكثر عمومية فضاءً جزئياً S من R^n. ستكون المسألة من جديد، هي ايجاد النقطة p من هذا الفضاء الجزئي، الأكثر قرباً من b. *وستكون (بالتعريف) النقطة* p *أيضاً*، هي *مسقط* b *على الفضاء الجزئي*. عندما ننشىء عموداً من b على S ستكون p نقطة تلاقي العمود مع الفضاء الجزئي. بتعبير هندسي، إن ذلك هو حل بسيط لمسألة عادية جداً تتعلق بالبعد بين نقطة b وفضاء جزئي S. لكن، هناك سؤلان يحتاجان إلى اجابة :

(١) هل لهذه المسألة تطبيقات عملية حالياً ؟

(٢) إذا كان الفضاء الجزئي معرفاً بأساس محدد، فهل هناك قانون يعين المسقط p؟

الاجابة، حتماً، نعم. مسألتنا التي وصفت حتى الآن بعبارات هندسية، هي بالضبط، مسألة ايجاد ***حل لنظام مفرط التعيين بطريقة المربعات الأصغرية***. يمثل المتجه b المعطيات الناتجة عن سلسلة من التجارب أو البيانات وهي تحوي العديد من الأخطاء. بقول آخر عندما نحاول كتابة b كتركيب في متجهات أساس الفضاء الجزئي، قد لانجد ذلك ممكناً. المعادلات التي نواجهها غير متسقة وليس لها حل. لذلك، فان طريقة المربعات الأصغرية تنتقي p كأفضل وضع ممكن. لايمكن أن يكون هناك شك بأهمية هذا التطبيق.

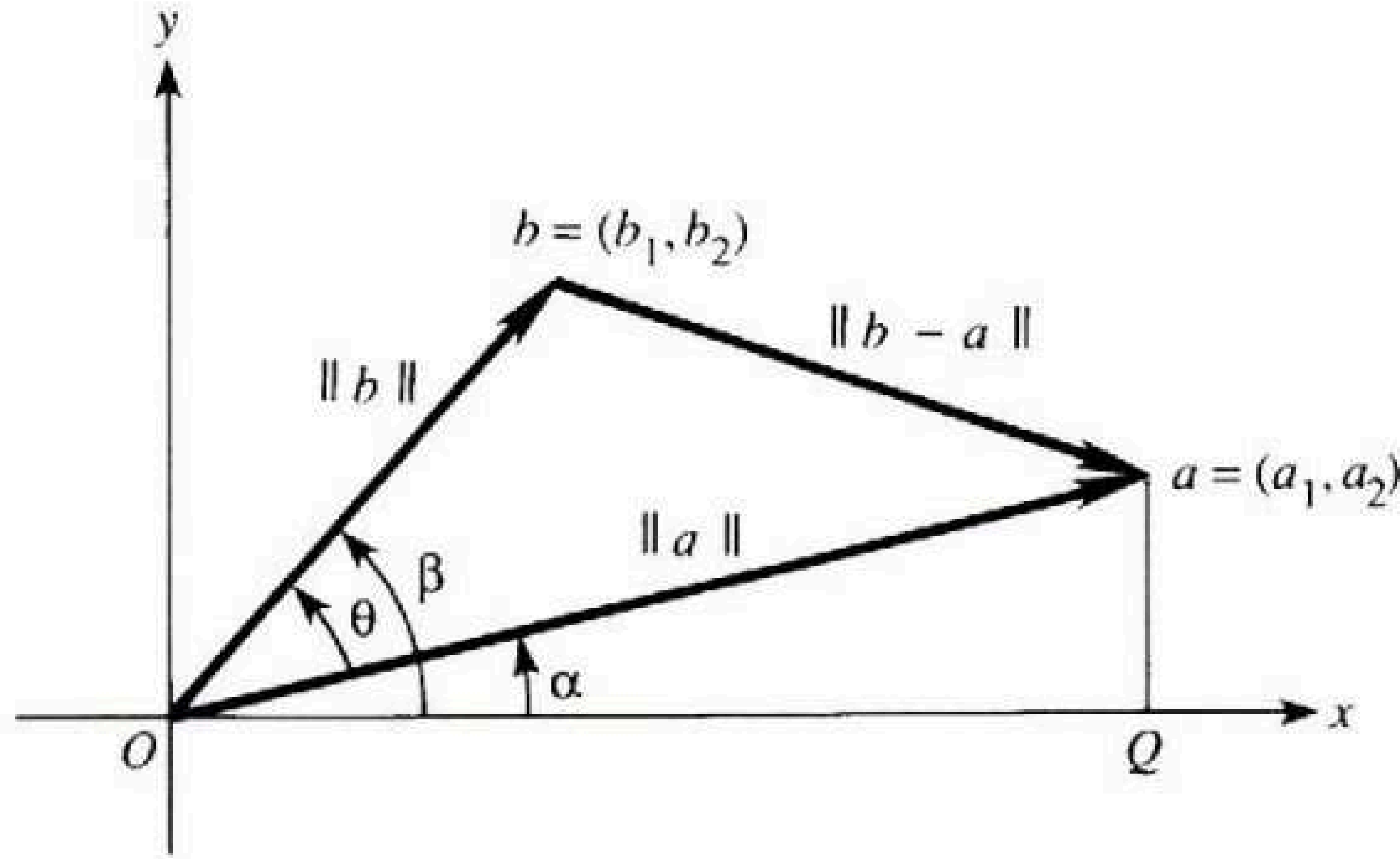


شكل (٣ -٥). الإسقاط في فضاء ذي n .

المسألة الثانية، ايجاد قانون لتعيين p ، هي مسألة سهلة الحل إذا كان الفضاء الجزئي مستقيماً. في هذا البند والذي يليه، سنسقط متجهاً واحداً على آخر بطرائق متعددة، وسنربط هذا الاسقاط بالجداء الداخلي والزاوية. لحسن الحظ، يبقى قانون p بسيطاً بصورة واضحة، عندما نسقط على فضاء جزئي عدد أبعاده كبير، شرط أن يكون لدينا أساس لهذا الفضاء. وهذه، إلى حد بعيد أكثر الحالات أهمية؛ إنها تقابل مسألة مربعات أصغرية ذات وسطاء متعددة ، سنحلها في البند (٣-٣). عندئذ، يبقى علينا أن نجعل هذه القوانين أكثر بساطة وذلك بالعودة إلى المتجهات المتعامدة.

الجداء الداخلي ومتراجحة شوارتز

نعود الآن إلى دراسة الجداء الداخلي والزوايا. سنرى قريباً أنه ليست الزاوية بل **جيب تمامها** هو الذي يرتبط مع الجداء الداخلي مباشرة. سنعمد إلى المثلثات في الحالة ذات البعدين لايجاد هذه العلاقة. نفرض أن α قياس زاوية المتجه a مع محور x (شكل ٣-٦)، لنذكر أن $\|a\|$ هو طول المتجه a الذي يشغل الوتر في المثلث $0\, a\, Q$ ، يعرف جيب وجيب تمام α كما يلي :



شكل (٣-٦) . جيب تمام الزاوية $\theta = \beta - \alpha$.

$$\sin \alpha = \frac{a_2}{\|a\|}, \qquad \cos \alpha = \frac{a_1}{\|a\|}.$$

الأمر ذاته صحيح من أجل b والزاوية المقابلة β : الجيب هو $b_2 / \|b\|$ وجيب التمام هو $b_1 / \|b\|$. لما كانت θ هي $\beta - \alpha$، فان تمام جيبها ينتج عن مطابقة مثلثية لايمكن لأي فرد أن ينساها :

$$\cos \theta = \cos\beta \ \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\|a\| \ \|b\|}. \tag{١}$$

البسط في هذا القانون هو الجداء الداخلي لـ a في b وهذا مايعطي العلاقة التي نبحث عنها :

٣ ز جيب تمام أي متجهين b و a هو :

$$\cos \theta = \frac{a^{\mathrm{T}} b}{\|a\| \ \|b\|} . \tag{٢}$$

لنلاحظ أن هذا القانون صحيح من ناحية تعادل الأبعاد ؛ إذا ضاعفنا طول b فان كلاً من البسط والمقام يتضاعف بالشكل ذاته، وجيب التمام لايتغير . إذا غيرنا إشارة b فان إشارة $\cos \theta$ في الطرف الثاني تتغير، أيضاً وتختلف الزاوية بمقدار ١٨٠° .

ملاحظة : هناك قانون مثلثي آخر ، قانون جيب التمام ، يؤدي ، مباشرة ، إلى النتيجة ذاتها وهو ليس مثل القانون الظاهر في المعادلة (١) ، غير قابل للنسيان ، لكنه يربط بين أطوال أضلاع أي مثلث :

$$\|b - a\|^2 = \|b\|^2 + \|a\|^2 - 2\|b\|\,\|a\| \cos\theta. \quad (٣)$$

عندما تصبح θ زاوية قائمة ، فإننا نعود إلى نظرية فيثاغورس . لكن ، بغض النظر عن θ ، يمكن نشر $\|b-a\|^2$ إلى $(b-a)^T(b-a)$ وتأخذ عندها المعادلة (٣) الصورة :

$$b^{\mathrm{T}}b - 2a^{\mathrm{T}}b + a^{\mathrm{T}}a = b^{\mathrm{T}}b + a^{\mathrm{T}}a - 2\|b\|\,\|a\| \cos\theta.$$

بحذف b^Tb و a^Ta من طرفي هذه المعادلة ، نصل إلى قانون جيب التمام كما في المعادلة (٢) . فعلاً يبرهن ذلك قانون جيب التمام في فضاء ذي n بعداً ، وقد ناضلنا كما في المعادلة للمثلث المستوي $O\,a\,b$ فقط .

نريد الآن أن نجد p مسقط b على a . متجه هذه النقطة مضاعف للمتجه المفروض a أي $p = \bar{x}\,a$ ـ شأنها بذلك شأن كل نقطة من المستقيم ـ وبذلك تؤول المسألة إلى حساب المعامل $\bar{x}$. كل مانحتاجه من أجل هذا الحساب هو تطبيق الحقيقة الهندسية التي تقول : ***المستقيم الواصل من النقطة b إلى أقرب نقطة إليها من حامل $p = \bar{x}\,a$ ، متعامد مع المتجه a :***

$$\bar{x} = \frac{a^{\mathrm{T}}b}{a^{\mathrm{T}}a} \quad \text{أو} \quad a^{\mathrm{T}}(b - \bar{x}a) = 0, \quad \text{أو} \quad (b - \bar{x}a) \perp a, \quad (٤)$$

يعطي ذلك قانون $\bar{x}$ و p :

٣ح مسقط b على مستقيم مار من o يحمل a هو :

$$p = \bar{x}\,a = \frac{a^{\mathrm{T}}b}{a^{\mathrm{T}}a}\,a. \quad (٥)$$

هذا مايجيز لنا إعادة رسم الشكل (٣-٥) حاوياً القانون الصحيح للنقطة p .

لهذا القانون نتيجة مهمة قد تكون أهم متراجحة في الرياضيات . إنها

تعمم حالة خاصة هي كون الوسط الحسابي $\frac{1}{2}(x+y)$ أكبر من الوسط الهندسي $\sqrt{xy}$. (وهي تكافىء أيضاً ـ انظر التمرين ٣-٢-١ ـ متراجحة المثلث في المتجهات) . تظهر النتيجة وكأنها جاءت عرضاً ، تقريباً ، من القضية التي تقول إن مربع بعد $\|b - p\|^2$ لايمكن أن يكون سالباً . إنظر الشكل (٣-٧) :

$$\left\|b - \frac{a^{\mathrm{T}}b}{a^{\mathrm{T}}a}\,a\right\|^2 = b^{\mathrm{T}}b - 2\frac{(a^{\mathrm{T}}b)^2}{a^{\mathrm{T}}a} + \left(\frac{a^{\mathrm{T}}b}{a^{\mathrm{T}}a}\right)^2 a^{\mathrm{T}}a = \frac{(b^{\mathrm{T}}b)(a^{\mathrm{T}}a) - (a^{\mathrm{T}}b)^2}{(a^{\mathrm{T}}a)} \geq 0.$$

بما أن بسط (صورة) الكسر الأخير لايمكن أن يكون سالباً ، فإننا نجد $(b^Tb)\,(a^Ta) \geq (a^Tb)^2$ ـ ثم بأخذ الجذر التربيعي :

٣ ط يحقق كل متجهين المتراجحة التالية وهي تدعى متراجحة شوارتز Schwarz :

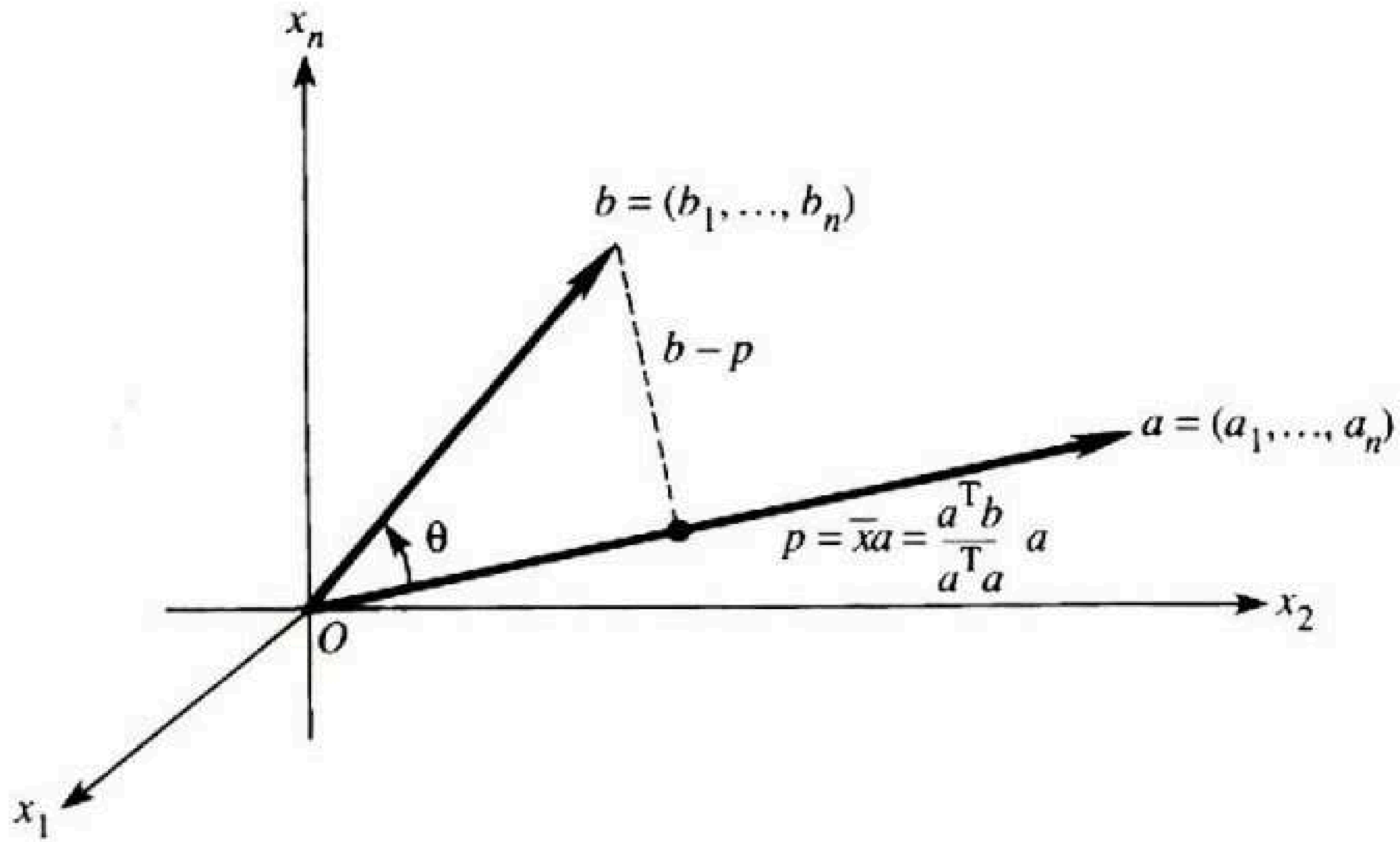
$$|a^{\mathrm{T}}b| \leq \|a\|\,\|b\|. \qquad (٦)$$

ملاحظة : استناداً إلى (٦) ، النسبة بين طرفي متراجحة شوارتز تساوي تماماً $|cos\ \theta|$.

بما أن جيب التمام يقع في الفترة $-1 \leq cos\ \theta \leq 1$ ، فان هذا يعطي برهاناً آخر للمعادلة (٦) : *متراجحة شوارتز مماثلة لـ* $|cos\ \theta| \leq 1$ الذي هو ، في بعض الحالات ، أكثر سهولة في الفهم لأن جيب التمام مفهوم مألوف جداً . كل من البرهانين صحيح في $\boldsymbol{R}^n$ ولكن ، يجب أن نذكر أن برهاننا هذا يكافىء القيام بالحسابات الميكانيكية لـ $\|b - p\|^2$. إنه غير سالب ويجب أن يبقى غير سالب حتى عندما ندخل ، فيما بعد ، بعض الإمكانات الجديدة فيما يتعلق بالأطوال والجداء الداخلي للمتجهات . لذا ، فان متراجحة شوارتز قد برهنت دون اللجوء إلى المثلثات [1] .

---

(١) يرتبط اسم كوشي أيضاً بهذه المتراجحة وينسبها الروس ، أيضاً ، إلى- Couchy - Schwarz - Couchy Buniakowsky . يظهر أن مؤرخي الرياضيات يقرون بأن زعم بونياكوسكي حقيقي .



شكل (٣-٧). مسقط bعلى a حيث $\cos\theta = \dfrac{op}{ob} = \dfrac{a^T b}{\|a\|\,\|b\|}$.

ملاحظة أخيرة تتعلق بـ $|a^T b| \le \|a\|\,\|b\|$. *تتحقق المساواة إذا وإذا فقط كان b مضاعفاً لـ a*. الزاوية هي إما $\theta = 0^o$ أو 180^o وجيب التمام هو إما 1 أو 1-. في هذه الحالة، تتطابق b مع مسقطها p ويصبح البعد بين النقطة والمستقيم صفراً.

مثال أسقط $b = (1,2,3)$ على المستقيم الحامل لـ $a = (1,1,1)$:

$$\bar{x} = \frac{a^T b}{a^T a} = \frac{6}{3} = 2.$$

المسقط هو $p = 2a = (2,2,2)$. تمام الجيب هو :

$$\cos\theta = \frac{\|p\|}{\|b\|} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{14}}\ .$$

متراجحة شوارتز هي $|a^T b| \le \|a\|\,\|b\|$ أو $6 \le \sqrt{3}\,\sqrt{14}$. نكتب العدد 6() بالصورة $\sqrt{36}$ وبذلك يكون $\sqrt{12} \le \sqrt{14}$ ؛ جيب التمام أصغر من الواحد. المتراجحة صحيحة لأن b لايوازي a.

المساقط من الرتبة واحد

مسقط b على المستقيم الحامل لـ a يقع في $r = a\ (a^Tb / a^Ta)$. ذلك هو قانوننا $p = \bar{x}\,a$، لكنه مكتوب بالتواء طفيف: وضع المتجه a قبل العدد $\bar{x} = a^Tb / a^Ta$. هناك سبب خلف هذا التغيير التافه ظاهرياً. ينفذ الاسقاط على مستقيم بوساطة «**مصفوفة اسقاط**» P. وبكتابة ذلك بهذا الترتيب الجديد، يمكننا أن ندرك ماهي هذه المصفوفة. إنها مصفوفة تضرب b وتنتج p:

$$\boxed{P = \frac{a\ a^{\mathrm{T}}}{a^{\mathrm{T}}\,a}.} \qquad (٧)$$

إن ذلك جداء عمود بسطر (مصفوفة مربعة) مقسوماً على العدد a^Ta.

مثال . المصفوفة التي تسقط على المستقيم الحامل لـ $a = (1,1,1)$ هي:

$$P = \frac{a\ a^{\mathrm{T}}}{a^{\mathrm{T}}\,a} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}.$$

لهذه المصفوفة خاصتان سنرى فيها إسقاطاً نموذجياً:

(١) P مصفوفة متناظرة.

(٢) مربعها يساويها: $P^2 = P$.

إنه مثال مهم لفهم الفضاءات الجزئية الأربعة:

الرتبة $r = 1$.

يتكون فضاء الأعمدة من المستقيم الحامل لـ $a = (1,1,1)$.

يتكون الفضاء الصفري من المستوي العمودي على a.

كل عمود مضاعف لـ a، لذا، يقع Pb على المستقيم الحامل لـ a. للمتجهات التي مسقطها $p = 0$ أهمية خاصة. إنها المتجهات التي تحقق $a^Tb = 0$ ـ إنها متعامدة مع a ومركباتها على هذا المستقيم تساوي الصفر. إنها تقع في المستوي العمودي الذي هو الفضاء الصفري للمصفوفة P.

فعلاً، إن هذا المثال بالغ حد الكمال، فيه الفضاء الصفري متعامد مع فضاء الأعمدة، الأمر الذي يبدو غريباً. من المفروض أن يكون الفضاء الصفري متعامداً مع *فضاء الأسطر*. لكن، بسبب كون P متناظرة، فان فضاء أسطرها وفضاء أعمدتها متطابقان.

ملاحظة تتعلق بتدريج المقياس. تبقى مصفوفة الاسقاط aa^T/a^Ta نفسها إذا ضاعفنا a :

$$a=\begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix} \quad \text{تعطي} \quad P=\frac{1}{12}\begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 2 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

المستقيم الحامل لـ a بقي نفسه وهذا يعني أن اهتمام مصفوفات الإسقاط منصب حوله. إذا كان طول a يساوي وحدة الأطوال فإن المقام $a^Ta=1$ وتصبح المصفوفة التي رتبتها تساوي الواحد هي $P=a\,a^T$

مثال ٢ اسقاط على «اتجاه θ» في مستوي $x-y$. المستقيم يحمل المتجه $a=(\cos\theta, \sin\theta)$ والمصفوفة هي :

$$P=\frac{aa^T}{a^Ta}=\frac{\begin{bmatrix}c\\s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c & s\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}c & s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c\\s\end{bmatrix}}=\begin{bmatrix}c^2 & cs\\ cs & s^2\end{bmatrix}.$$

هنا c رمز لـ $\cos\theta$ و s رمز لـ $\sin\theta$ و $c^2+s^2=1$ وهو الواقع في المقام. لقد اكتشفت المصفوفة P هذه من قريب في البند (٢-٦) في التحويلات الخطية. يمكننا الآن أن نتقدم إلى أبعد من إسقاط المستوي $x-y$ على مستقيم، ونحسب P في أي عدد من الأبعاد. نؤكد أن ذلك سينتج المسقط p :

لاسقاط b على a ، نضرب بـ P : $p=Pb$.

منقول مصفوفة

نعود الآن إلى المنقول. حتى الآن A^T معرف، فقط، بانعكاس A على قطرها الرئيسي (في حالة مصفوفة مربعة)؛ أسطر A تصبح أعمدة A^T والعكس بالعكس. بقول آخر العنصر الواقع في السطر i والعمود j في A^T هو العنصر $(j.i)$ من A :

$$(A^T)_{ij} = (A)_{ji}.$$

هناك تفسير آخر، أكثر عمقاً للمنقول وهو الذي ينتج عن علاقته القريبة بالجداء الداخلي. في الحقيقة، يمكن استخدام هذه العلاقة لإعطاء تعريف جديد وأكثر «تجريداً» للمنقول :

٣ ي يمكن تعريف المنقول A^T بالخاصة التالية : الجداء الداخلي لـAx في y يساوي الجداء الداخلي لـ x في A^Ty. بصورة شكلية يعني ذلك :

$$(Ax)^T y = x^T A^T y = x^T (A^T y). \qquad (٨)$$

لهذا التعريف هدفان :

(١) يرينا، عندما نغير طريقة القياس في الجداء الداخلي، كيف يؤثر هذا التغيير على المنقول. يصبح ذلك مهماً في حالة الأعداد المركبة. سنرى الجداء الداخلي الجديد في البند (٥ , ٥).

(٢) يعطينا طريقة أخرى لتحقيق القانون الأساسي لمنقول جداء :

$$(AB)^T = B^T A^T. \qquad (٩)$$

يتأكد ذلك باستخدام المعادلة (٨) مرتين، المرة الأولى من أجل A والثانية من أجل B :

$$(ABx)^T y = (Bx)^T (A^T y) = x^T (B^T A^T y).$$

يظهر المنقول بترتيب معاكس في الطرف الأيمن كما يجري في حالة العكس بقانون مشابه $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. نذكر من جديد أن هذين القانونين يجتمعان لإعطاء التركيب المهم $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

تمـاريـن

٣-٢-١ (أ) x و y عددان موجبان، اختر المتجه b مساوياً $(\sqrt{x}, \sqrt{y})$ والمتجه $a = (\sqrt{y}, \sqrt{x})$. طبق متراجحة شوارتز لتقارن الوسط الحسابي $\frac{1}{2}(x+y)$ مع الوسط الهندسي $\sqrt{xy}$.

(ب) افرض أن لدينا متجهاً ينطلق من نقطة الأصل إلى النقطة x وأننا أضفنا إلى ذلك متجهاً طوله $\|y\|$ يربط x بـ $x+y$. يبدأ الضلع الثالث للمثلث من نقطة الأصل وينتهي عند $x+y$؛ *تقرر متراجحة المثلث أنه لايمكن لهذا البعد أن يكون أكبر من مجموع البعدين الآخرين :*

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

بعد تربيع الطرفين أرجع هذه المتراجحة إلى متراجحة شوارتز .

٣-٢-٢ تأكد من أن المسقط يحقق $\|p\| = \|b\| \, |\cos \theta|$، باستخدام الصيغة (٥) .

٣-٢-٣ ماهو مضاعف $a = (1,1,1)$ الأكثر قرباً من النقطة $b = (2,4,4)$؟ أوجد أيضاً، النقطة الواقعة على المستقيم الحامل لـ b والأكثر قرباً من a .

٣-٢-٤ فسر لماذا تصبح متراجحة شوارتز مساواة في الحالة التي تقع فيها النقطتان b و a معاً على مستقيم مار من نقطة الأصل . وفي هذه الحالة، فقط . ماذا يحصل إذا وقعتا في موضعين متعاكسين بالنسبة لنقطة الأصل ؟

٣-٢-٥ في الفضاء ذي n بعداً، ماهي الزاوية التي يصنعها المتجه $(1,1,....,1)$ مع محاور الاحداثيات ؟ ماهي مصفوفة الاسقاط على هذا المتجه ؟

٣-٢-٦ لمتراجحة شوارتز برهان بسطر واحد، عندما يكون المتجهان a, b متجهي وحدة ومتعامدين :

$$|a^{\mathrm{T}}b| = \left|\sum a_j b_j\right| \leq \sum |a_j|\,|b_j| \leq \sum \frac{|a_j|^2 + |b_j|^2}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \|a\|\,\|b\|.$$

أي تمرين سابق يبرر الخطوة المتوسطة ؟

٣-٢-٧ باختيار المتجه b المناسب في متراجحة شوارتز، برهن أن :

$$(a_1 + \dots + a_n)^2 \le n(a_1^2 + \dots + a_n^2) .$$

متى تكون المساواة محققة ؟

٣-٢-٨ ذرة الميتان CH_4 مرتبة كما لو كان عنصر الفحم واقعاً في مركز رباعي وجوه منتظم وتقع العناصر الأربعة من الهيدروجين في رؤوسه . إذا وقعت الرؤوس في النقاط $(0,0,0),(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)$ ـ لاحظ أن الطول المشترك للأضلاع يساوي $\sqrt{2}$ لأن رباعي الوجوه منتظم ـ فماهي جيوب تمام زوايا الأشعة الذاهبة من المركز $(1/2,1/2,1/2)$ إلى الرؤوس ؟ (زاوية شعاعين تساوي تقريباً ١٠٩,٥°).

٣-٢-٩ ربِّع المصفوفة $P = a\,a^T/a^Ta$ التي تسقط على مستقيم وبرهن أن $P^2 = p$ (لاحظ أن العدد a^Ta يقع في وسط المصفوفة $a\,a^T\;a\,a^T$!)

٣-٢-١٠ هل مصفوفة الاسقاط قابلة للعكس؟لماذا نعم ولماذا لا؟

٣-٢-١١ (أ) أوجد مصفوفة الاسقاط P_1 على المستقيم الحامل للمتجه $a = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ وكذلك المصفوفة P_2 التي تسقط على المستقيم العمودي على a.

(ب) احسب $P_1 + P_2$ و P_1P_2 وفسر النتائج .

٣-٢-١٢ أوجد المصفوفة التي تسقط كل نقطة من المستوي على المستقيم $x + 2y = 0$.

٣-٢-١٣ برهن أن "أثر" $P = a\,a^T/a^Ta$ ـ الذي هو مجموع عناصر قطرها ـ يساوي دوماً الواحد .

٣-٢-١٤ ماهي المصفوفة P التي تسقط كل نقطة من R^3 على مستقيم تقاطع المستويين $x + y + t = 0$ و $x - t = 0$ ؟

٣-٢-١٥ برهن أن طول Ax يساوي طول A^Tx، إذا كان $AA^T = A^TA$.

٣-٢-١٦ نفرض P مصفوفة الاسقاط على المستقيم الحامل لـ a .

(أ) لماذا الجداء الداخلي لـ x في Py يساوي الجداء الداخلي لـ Px في y ؟

(ب) هل الزاويتان متساويتان ؟ أوجد جيب تمام كل منهما إذا كان $y = (2,1,2)$, $x = (2,0,1)$, $a = (1,1,-1)$.

(جـ) لماذا الجداء الداخلي لـ Px مع Py مطابق لماسبق ؟ ماهي زاوية هذين المتجهين؟

٣-٣ الاسقاط على فضاء جزئي وتقريبات المربعات الأصغرية

حتى الآن ، كل نظام $Ax=b$ إما أن يكون له حل أو لايكون ذلك . إذا لم يكن b في فضاء الأعمدة $\mathscr{R}(A)$ ، فان النظام غير متسق وتكون طريقة الحذف ، حينئذ ، فاشلة . إن هذا الأمر مؤكد تقريباً عندما يكون النظام بمعادلات متعددة وبمجهول واحد . مثال ذلك ، المعادلات الآنية :

$$\begin{aligned} 2x &= b_1 \\ 3x &= b_2 \\ 4x &= b_3 \end{aligned}$$

قابلة للحل إذا كانت الأطراف اليمنى متناسبة مع 4 :3 :2 . يكون الحل حتماً وحيداً إذا وجد ، ويكون موجوداً ، فقط ، إذا كان b واقعاً على مستقيم المتجه :

$$a = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

رغم عدم إمكان حل المعادلات غير المتسقة ، فانه يرتفع شأنها في التطبيقات ويصبح من الممكن حلها . إحدى الإمكانات هي استخراج قيمة x من جزء من النظام وإهمال الباقي ؛ من الصعب تبرير ذلك إذا كانت جميع المعادلات ناتجة عن مصدر واحد . في الواقع ، كما هو متوقع ، قد لاتوجد أخطاء في بعض المعادلات بينما تحوي بقية المعادلات أخطاء كبيرة . من الأفضل *اختيار* x بحيث يجعل

معدل الخطأ في الـ m معادلة في نهايته الصغرى. يوجد العديد من الطرائق لتعيين مثل هذا المعدل ولكن أفضلها هو استخدام *مجموع المربعات* :

$$E^2 = (2x - b_1)^2 + (3x - b_2)^2 + (4x - b_3)^2 .$$

إذا وجد حل صحيح للنظام $ax = b$ *فإن الخطأ الأصغري* $E = 0$. في أرجح الحالات، قد لايكون b متناسباً مع a، وتمثل الدالة E^2 قطعاً مكافئاً تقع نهايته الصغرى في النقطة التي يكون فيها :

$$\frac{aE^2}{dx} = 2[(2x - b_1)2 + (3x - b_2)3 + (4x - b_3)4] = 0.$$

بالحل بالنسبة لـ x، نجد حل المربعات الأصغرية للنظام $ax = b$ وهو :

$$\bar{x} = \frac{2b_1 + 3b_2 + 4b_3}{2^2 + 3^2 + 4^2} .$$

يمكنك التعرف على a^Tb في البسط وعلى a^Ta في المقام.

الحالة العامة مشابهة ذلك تماماً. «نحل» $ax = b$ بالنهاية الصغرى لـ

$$E^2 = \|ax - b\|^2 = (a_1x - b_1)^2 + \ldots + (a_mx - b_m)^2 .$$

تكون مشتقة E^2 مساوية الصفر في النقطة التي يكون فيها

$$(a_1 \bar{x} - b_1)a_1 = \ldots + (a_m \bar{x} - b_m)a_m = 0$$

لقد جعلنا البعد بين b والمستقيم الحامل للمتجه a، في نهايته الصغرى ويعطي الحساب الجواب نفسه الذي أعطته الهندسة منذ قليل :

٣ ك حل المربعات الأصغرية لمسألة $ax = b$ ذات مجهول واحد هو : $\bar{x} = \frac{a^Tb}{a^Ta}$

يلاحظ أننا عدنا إلى التفسير الهندسي لمسألة المربعات الأصغرية ـ تصغير البعد إلى الحد الأدنى. في الحقيقة، عندما نشتق E^2 ونجعل المشتقة مساوية الصفر، نكون

قد استخدمنا الحساب لتعزيز الهندسة الواردة في البند السابق؛ على المستقيم الواصل من b إلى p أن يكون عموداً على المستقيم الحامل لـ a :

$$a^{T}(b - \overline{x}\ a) = a^{T}b - \frac{a^{T}b}{a^{T}a}\ a^{T}b = 0.$$

كملاحظة جانبية، ننظر في الحالة المتردية $a = 0$. كل مضاعف لـ a يساوي الصفر ويصبح المستقيم نقطة. لذا، فإن $p = 0$ هي المرشحة الوحيدة لتكون مسقطاً لـ b على المتجه a. لكن القانون الذي يعطي $\overline{x}$ يصبح غير معين 0/0، وهذا يعني أن المضروب $\overline{x}$ يصبح غير معين بصورة كاملة. تعطي أي قيمة لـ x الخطأ ذاته $E = \|0x - b\|$ ويصبح عندئذ E^2 مستقيماً أفقياً عوضاً عن القطع المكافىء. سيكون أحد أغراض المعكوس الكاذب، في الملحق هو تعيين قيمة محددة لـ $\overline{x}$؛ في هذه الحالة، يجب اتخاذ $\overline{x} = 0$، الذي يظهر، على الأقل، وكأنه الاختيار الأكثر تناظراً من بقية الأعداد.

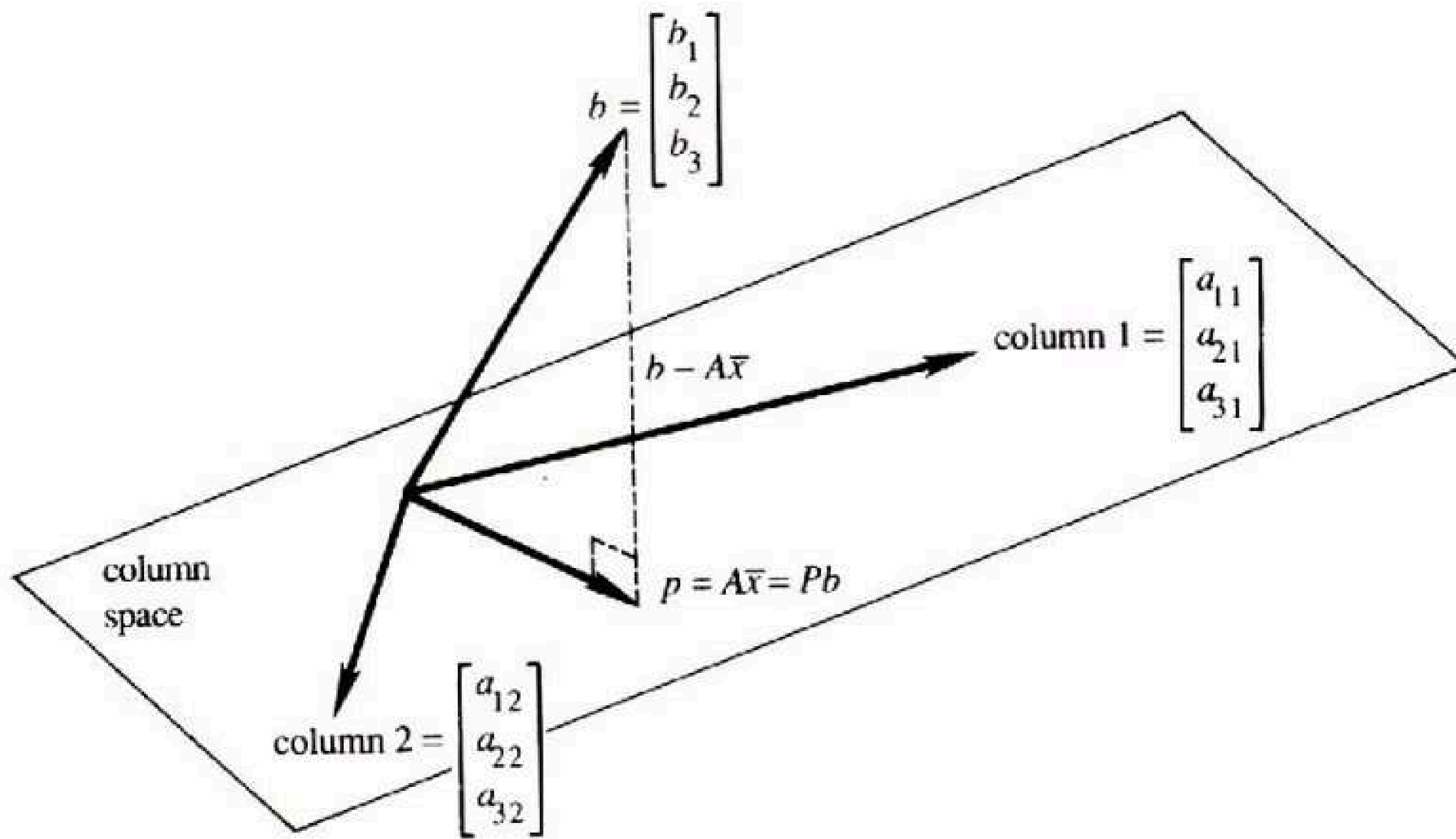
مسائل المربعات الأصغرية بمتغيرات متعددة

أصبحنا الآن مهيئين للخطوة المهمة، ***اسقاط b على فضاء جزئي***. يفضل أن لايكون مستقيماً. تظهر هذه المسألة بالصورة التالية: نفرض أننا انطلقنا من النظام $Ax = b$، ولنفرض، في هذه الحالة، أن A مصفوفة من النوع $m \times n$. بدلاً عن الحالة السابقة التي يسمح فيها بمجهول واحد ومتجه عمود فريد a، فإن للمصفوفة هنا، n عموداً. سنتصور، مع ذلك، أن عدد الأرصاد أكبر من n الذي هو عدد المجاهيل، أي علينا أن نتوقع كون هذا النظام غير متسق. من *المحتمل أن يكون من غير الممكن اختيار قيمة لـ x موافقة، بصورة صحيحة، للمعطيات b*، أو بقول آخر، من المحتمل أن لايكون المتجه b تركيباً لأعمدة A؛ من الممكن أن يكون خارج فضاء الأعمدة.

المسألة، من جديد، هي اختيار $\overline{x}$ بحيث يكون الخطأ أصغرياً، وسنجري، أيضاً، هذا العمل بطريقة المربعات الأصغرية. الخطأ هنا $E = \|Ax - b\|$ ***وهو، بالضبط، البعد بين b والنقطة Ax الواقعة في فضاء أعمدة A***. (لنذكر أن Ax تركيب

خطي لأعمدة A بالمعاملات $x_1,....,x_n$). لذلك، فان البحث عن حل المربعات الأصغرية الذي يجعل الخطأ E أصغرياً يشبه تعين موضع النقطة $p = A\bar{x}$ التي هي أقرب نقطة من فضاء الأعمدة إلى b .

يمكننا أن نستخدم أي الطريقين، الهندسي أو الحسابي، لتعيين $\bar{x}$ ، ومع ذلك . فإننا نفضل عندما يكون عدد الأبعاد n، أن نعمد إلى الهندسة؛ على النقطة p أن تكون «مسقط b على فضاء الأعمدة» ***وعلى متجه الخطأ $b - A\bar{x}$ أن يكون متعامداً مع هذا الفضاء (شكل ٣-٨)***.



شكل (٣-٨). الاسقاط على فضاء أعمدة مصفوفة من النوع 3×2.

حساب $\bar{x}$ والمسقط $p = A\bar{x}$ أساسي بحيث علينا أن نجري ذلك بطريقتين :

١ ـ تقع المتجهات المتعامدة مع فضاء الأعمدة في الفضاء الصفري الأيسر . لذا، فان على متجه الخطأ أن يقع في الفضاء الصفري لـ A^T :

$$A^T A\bar{x} = A^T b \quad \text{أو} \quad A^T(b - A\bar{x}) = 0$$

٢ـ يجب على متجه الخطأ أن يكون متعامداً مع كل عمود من A :

$$\begin{bmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b - A\bar{x} \end{bmatrix} = 0 \quad \text{أو} \quad \begin{matrix} a_1^T (b - A\bar{x}) = 0 \\ a_n^T (b - A\bar{x}) = 0 \end{matrix}$$

تلك من جديد المعادلة $A^T(b-A\bar{x})=0$ أو $A^TA\bar{x}=A^Tb$. طريق ثالث هو أخذ المشتقات الجزئية لـ $E^2=(Ax-b)^T(Ax-b)$. يعطي ذلك $2A^TAx-2A^Tb=0$. إذا اعطينا معادلة غير قابلة للحل $Ax=b$ ، فإن الطريق الأكثر امكاناً هو ***الضرب بالمصفوفة*** A^T . تنتج كل هذه الطرائق المتكافئة مصفوفة معاملات مربعة A^TA. إنها متناظرة (منقولها ليس AA^T !) وهي المصفوفة الأساسية في هذا الباب.

تعرف هذه المعادلة، في الاحصاء، باسم "***المعادلة النظامية***" :

٣ ل حل المربعات الأصغرية لنظام غير متسق $Ax=b$ ذي m معادلة في n مجهولاً يحقق:

$$A^TAx=A^Tb. \qquad (١)$$

إذا كانت أعمدة A مستقلة خطياً ، فان المصفوفة A^TA قابلة للعكس، ويكون

$$\bar{x}=(A^TA)^{-1}A^Tb. \qquad (٢)$$

سيكون، عندئذ، مسقط b على فضاء الأعمدة :

$$p=A\bar{x}=A(A^TA)^{-1}A^Tb. \qquad (٣)$$

سنختار مثالاً يكون فيه حدسنا جيداً مثل القانونين :

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b=\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

من السهل تصور فضاء أعمدة A، لأن كلاً من العمودين ينتهي بصفر. إنه المستوي x - y في الفضاء ذي الأبعاد الثلاثة. مسقط $b=(4,5,6)$ سيكون $p=(4,5,0)$ -

تبقى المركبتان x و y كما كانتا سابقاً لكن $z = 6$ سيختفي . يتأكد ذلك بالقوانين :

$$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\overline{x} = (A^TA)^{-1}A^Tb = \begin{bmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$p = A\overline{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

في هذه الحالة الخاصة ، أفضل مايمكننا عمله هو حل المعادلتين الأوليين :

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 4 \\ x_1 + 3x_2 &= 5 \\ 0x_1 + 0x_2 &= 6. \end{aligned}$$

نجد عندها $\overline{x}_1 = 2$ و $\overline{x}_2 = 1$. الخطأ في المعادلة الثالثة هو 6 .

ملاحظة ١ لنفرض أن b واقع ، فعلاً ، في فضاء الأعمدة لـ A ـ إنه تركيب $b = Ax$ في الأعمدة . لذا فان مسقط b هو b :

$$p = A(A^TA)^{-1}A^TAx = Ax = b.$$

النقطة p الأكثر قرباً هي b ذاتها وهو واضح تماماً .

ملاحظة ٢ في الحالة القصوى الأخرى ، نفرض أن b *متعامد* مع فضاء الأعمدة . إنه متعامد مع كل عمود ، لذا $A^Tb = 0$. في هذه الحالة ، يكون المسقط هو صفر المتجهات :

$$p = A(A^TA)^{-1}A^Tb = A(A^TA)^{-1}\,0 = 0.$$

ملاحظة ٣ عندما تكون A مربعة وقابلة للعكس ، فان فضاء الأعمدة سيكون الفضاء كله . مسقط كل متجه هو هذا المتجه نفسه ويكون p مساوياً b :

$$r = A(A^TA)^{-1}A^Tb = AA^{-1}(A^T)^{-1}A^Tb = b.$$

هذه هي الحالة الوحيدة التي يمكننا فيها وضع $(A^TA)^{-1}$ جانباً بمفرده وكتابة ذلك بالصورة $A^{-1}(A^T)^{-1}$. عندما تكون A مستطيلة فان ذلك غير ممكن .

ملاحظة ٤ (الاسقاط على مستقيم) نفرض أن للمصفوفة A عموداً واحداً يحمل المتجه a . لذا، فان المصفوفة A^TA هي العدد a^Ta وسيكون $\overline{x}$ هو $a^Tb \;/\; a^Ta$. إن ذلك هو الحالة التي يمكننا فيها التقسيم على A^TA، بدلاً من التوقف عند $(A^TA)^{-1}$ ، ونحصل من جديد على القوانين التي رأيناها من قريب .

مصفوفة الجداء ـ المتصالب A^TA

النقطة التقنية الباقية هي تحقيق خواص A^TA. إنها بالتأكيد متناظرة ! منقولها هو $(A^TA)^T = A^TA^{TT}$ التي هي A^TA نفسها . العنصر i, j الذي هو الجداء الداخلي للعمود i من A ، بالعمود j من A ، أيضاً . إن ذلك متفق مع العنصر i,j الذي هو جداء العمود j بالعمود i من A . السؤال الأساسي هو قابلية A^TA للعكس ولحسن الحظ

لـ A^TA و A الفضاء الصفري ذاته .

من المؤكد أنه إذا كان $Ax = 0$ فان $A^TAx = 0$. المتجهات x من الفضاء الصفري لـ A تقع ، أيضاً ، في الفضاء الصفري لـ A^TA. للذهاب في الاتجاه المعاكس ، ننطلق بفرض $A^TAx = 0$، ولنأخذ الجداء الداخلي بـ x :

$$x^TA^TAx = 0. \quad \text{أو} \quad \|Ax\|^2 = 0, \quad \text{أو} \quad Ax = 0$$

لذا ، فإن x واقع في الفضاء الصفري لـ A ؛ الفضاءان الصفريان متطابقان. بصورة خاصة ، إذا كانت أعمدة A مستقلة (وكان $x = 0$ وحده في فضائها الصفري) فإن ذلك ذاته سيكون صحيحاً من أجل A^TA :

٣ م إذا كانت أعمدة A مستقلة خطياً فإن المصفوفة A^TA ***مربعة ومتناظرة وقابلة للعكس .***

سنرى فيما بعد أن A^TA معرفة إيجابياً ،أيضاً . (جميع المحاور والقيم الذاتية موجبة) .

في هذه الحالة التي هي، إلى حد بعيد، الأكثر عمومية والأكثر أهمية، يمكن حل المعادلة النظامية من أجل $\overline{x}$. كما ظهر في المثال العددي، للمصفوفة A«رتبة أعمدة كاملة». أعمدتها الـ n مستقلة ـ ليس الأمر صعباً في الفضاء ذي الـ m بعداً إذا كان $m>n$ ، لكن ذلك ليس آلياً. نفترض ذلك في كل مايلي.

مصفوفات الاسقاط

لقد بينت حساباتنا أن النقطة الأكثر قرباً من b هي $p=A\,(A^TA)^{-1}A^Tb$. *يعبر هذا القانون، بلغة المصفوفات، عن الانشاء الهندسي لمستقيم يمر من b ويكون عموداً على فضاء أعمدة* A. تدعى مصفوفة هذا الانشاء مصفوفة اسقاط وسيرمز لها بـ P :

$$\boxed{p=A\ (A^TA)^{-1}\ A^T.}$$

تسقط هذه المصفوفة أي متجه b على فضاء أعمدة A[١] . بقول آخر ، $p=Pb$ هي مركبة b في فضاء الأعمدة . أما الخطأ $b-Pb$ فهو المركبة على المتمم العمودي . (ويظهر من الطبيعي أن نقول : إن $I-P$ هي ، أيضاً، مصفوفة اسقاط ؛ إنها تسقط كل متجه b على المتمم العمودي والمسقط هو $(I-P)b=b-Pb$)) . باختصار ، لدينا الآن قانون مصفوفي لتفريق متجه إلى مركبتين متعامدتين : Pb واقعة في فضاء الأعمدة $\mathscr{R}(A)$ والمركبة الثانية $(I-P)b$ واقعة في الفضاء الصفري الأيسر $\mathscr{N}(A^T)$ ـ الذي هو المتمم العمودي لفضاء الأعمدة .

يمكن إدراك مصفوفات الإسقاط هذه سواء من الوجهة الهندسية أو من وجهة نظر جبرية . إنها جماعة من المصفوفات ذوات صفات خاصة ، تماماً، ستستخدم فيما بعد ككتل أساسية في بناء المصفوفات المتناظرة . لذا، سنتوقف لبعض الوقت قبل متابعة تطبيقات المربعات الأصغرية وذلك لعرض هذه الخواص .

---

(١) يمكن أن يؤدي ذلك إلى خطر التباس مع مصفوفة المبادلة التي رمزنا لها، أيضاً، بـP . لكن هذا الخطر ضئيل لأننا سنحاول أن لانظهر هذين الرمزين في الصفحة ذاتها.

٣ ن لمصفوفة الاسقاط $P = A\,(A^TA)^{-1}A^T$ خاصتان أساسيتان :

(١) إنها تساوي مربعها $P^2 = P$ (متساوية القوى)

(٢) إنها تساوي منقولها $P = P^T$ (متناظرة)

وعلى العكس، فإن أي مصفوفة متناظرة تحقق $P^2 = P$ ، تمثل اسقاطاً.

البرهان : من السهل أن نرى لماذا $P^2 = P$ ، لأنه إذا انطلقنا من أي متجه b فان المتجه Pb يقع في الفضاء الجزئي الذي اسقطنا عليه. لذا، ***عندما نسقط من جديد لا يتغير أي شيء***. يقع المتجه Pb مسبقاً في الفضاءالجزئي و $P\,(Pb)$ هو أيضاً Pb. بقول آخر $P = P^2$. اسقاطان أو ثلاثة أو خمسون اسقاطاً تعطي النقطة ذاتها p مثل الاسقاط الأول :

$$P^2 = A\ (A^TA)^{-1}\ A^TA\ (A^TA)^{-1}\ A^T = A\ (A^TA)^{-1}\ A^T = P.$$

لكي نبرهن أن P متناظرة، نأخذ منقولها. نضرب هذين المنقولين بترتيب معاكس، ثم نستخدم المتطابقة $(B^{-1})^T = (B^T)^{-1}$ حيث هنا $B = A^TA$:

$$P^T = (A^T)^T\ ((A^TA)^{-1})^T A^T = A\ ((A^TA)^T)^{-1} A^T = A\ (A^TA)^{-1} A^T = P.$$

من أجل العكس، علينا أن نستنتج من $P^2 = P$ و $P^T = P$ أن P مصفوفة إسقاط. مثل أي مصفوفة إسقاط أخرى، على المصفوفة P أن تنقل أي متجه b إلى فضاء أعمدتها. Pb تركيب للأعمدة. لبرهان كونه *مسقطاً* على هذا الفضاء، فإن ما علينا برهانه هو أن الجزء الباقي من b ـ متجه الخطأ $b - Pb$ ـ *متعامد مع الفضاء*. لكل متجه Pc من هذا الفضاء، الجداء الداخلي لهذا المتجه بمتجه الخطأ يساوي الصفر .

$$(b - Pb)^T Pc = b^T\ (I - P)^T Pc = b^T\ (P - P^2)c = 0. \qquad (٤)$$

لذا، فإن $b - Pb$ متعامد مع الفضاء و Pb هو مسقط b على فضاء الأعمدة.

مثال. نفرض أنقابلة للعكس، فعلاً. إذا كانت من النوع 4×4 فان أعمدتها الأربعة مستقلة وفضاء أعمدتها هو $\boldsymbol{R}^4$ كاملاً. ماهي المصفوفة المسقطة على الفضاء كاملاً ؟ إنها مصفوفة الوحدة :

$$P = A\ (A^{T}A)^{-1}\ A^{T} = AA^{-1}\ (A^{T})^{-1}\ A^{T} = I. \qquad (٥)$$

مصفوفة الوحدة متناظرة وتحقق $I^2 = I$ والخطأ $b - Ib$ صفر .

النقطة الأساسية في الأمثلة الأخرى هي أن ماحدث في المعادلة (٥) غير ضروري ـ نعيد : لايمكننا أن نعكس بين موضعي A^T و A ، عندما تكون هاتان المصفوفتان مستطيلتين ، فإن المصفوفة المربعة A^TA قابلة للعكس .

المربعات الأصغرية الملائمة للمعلومات

لنفرض أننا قمنا بسلسلة من التجارب وتوقعنا أن يكون الحاصل b دالة خطية في المتغير t. نبحث عن مستقيم $b = C + Dt$. مثال ذلك :

(١) في نهايات عدد من الفترات الزمنية ، قسنا بعد قمر صناعي يأخذ طريقه نحو المريخ . في هذه الحالة ، يمثل t الزمن و b المسافة . إذا لم يترك المحرك شغالاً ولم يكن تأثير الجاذبية كبيراً ، فان القمر الصناعي يتحرك ، تقريباً ، بسرعة ثابتة v ويكون ، عندئذ ، $b = b_0 + vt$.

(٢) يمكننا أن نغير الأحمال المطبقة على بناء وقياس التوتر الناتج عن ذلك . في هذه الحالة t يمثل الحمل و b يمثل قراءة مقياس التوتر . إذا لم يكن الحمل كبيراً بحيث تصبح مادة البناء قابلة للالتواء ، فمن الطبيعي ، حسب نظرية المرونة ، أن تتحقق علاقة خطية مثل $y = C + Dt$.

(٣) تكلفة إنتاج t كتاباً مشابهاً لواحد منها خطي تقريباً $b = C + Dt$ حيث التحرير والتنضيد يقعان في C والطبع والتجليد يقعان في D (تكلفة أي كتاب إضافي) .

المسألة هنا ، هي كيف نحسب المعاملين D و C انطلاقاً من نتائج التجارب ؟ . إذا كانت العلاقة ، فعلاً ، خطية ولا توجد أخطاء في التجارب ، فليس هناك أي مشكلة ؛ يمكن ، بقياسين مختلفين لـ b (من أجل قيمتين مختلفتين لـ t) أن يتم تعين المستقيم $b = C + Dt$. وسيقع أي قياس لاحق على هذا المستقيم . لكن ، إذا كان هناك أخطاء ولم تقع النقاط الإضافية على المستقيم ، فإن علينا أن نقوم بإعداد

عملية توسيط لجميع التجارب وإيجاد المستقيم المفضل . يجب عدم الخلط بين هذا المستقيم والمستقيم الذي أسقطنا عليه المتجه b في البند السابق - في الواقع لما كان هناك مجهولان D و C يجب تعينهما ، فان علينا أن نستخدم اسقاطاً على فضاء جزئي ذي بعدين . تنتج مسألة المربعات الأصغرية ، مباشرة ، من نتائج التجارب :

$$\begin{aligned} C + Dt_1 &= b_1 \\ C + Dt_2 &= b_2 \\ &\vdots \\ C + Dt_m &= b_m. \end{aligned} \tag{٦}$$

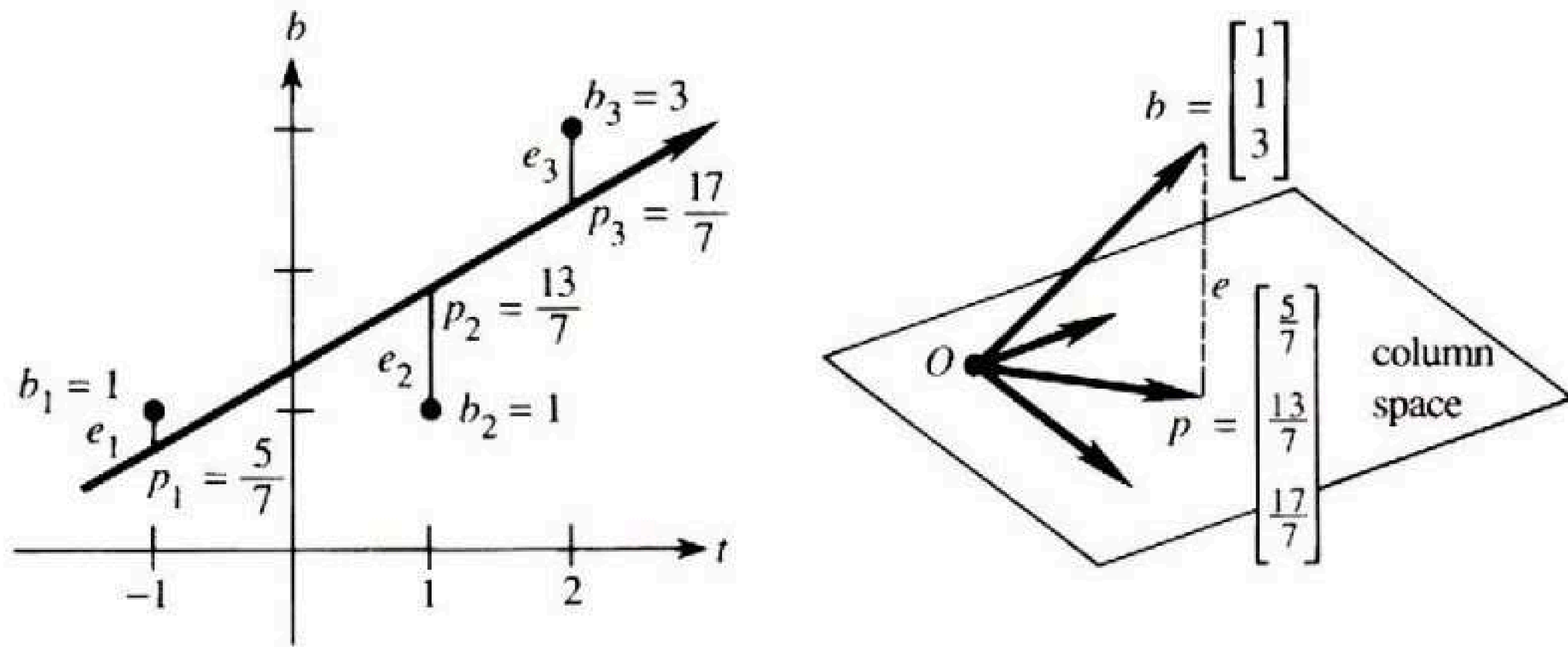
هذا النظام مفرط التعيين مكون من m معادلة ومجهولين فقط . إذا كان هناك أخطاء فقد لايكون له حل . نريد أن نؤكد أن للمصفوفة A عمودين وللمجهول x مركبتين هما C و D :

$$Ax = b \quad \text{أو} \quad \begin{bmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \tag{٧}$$

إن أفضل حل $\overline{D}$ ، $\overline{C}$ هو ذلك الحل الذي يجعل الدالة التالية في نهايتها الصغرى :

$$E^2 = \|b - Ax\|^2 = (b_1 - C - Dt_1)^2 + \dots + (b_m - C - Dt_m)^2.$$

بالتعبير المصفوفي ، نختار $\overline{x}$ بحيث تكون النقطة $p = A\overline{x}$ أقرب مايمكن من b . من بين جميع المستقيمات $y = C + Dt$ ، نختار الأكثر موافقة للمعطيات (شكل ٣-٩) . الأخطاء الموجودة على الشكل ، هي الأبعاد الرأسية $b - C - Dt$ عن نقاط المستقيم (ليست الأبعاد العمودية عليه) . إنها ***الأبعاد الرأسية*** التي تربع وتجمع وتنهى إلى نهايتها الصغرى .



شكل (٣-٩ م). ستقيم التقريب والمساقط المقابلة.

مثال . نفرض أننا اعطينا ثلاثة قياسات هي الظاهرة في الشكل الأيسر :

$b = 1$ عند $t = -1$ ، $b = 1$ عند $t = 1$ ، $b = 3$ عند $t = 2$

لاحظ أنه ليس من الضروري أن تكون قيم t على مسافات متساوية فيما بينها. يختار المجرب قيماً مناسبة (وقد تكون سالبة) دون أي تأثير على الرياضيات. الخطوة الأولى هي *كتابة المعادلات التي* **تكون** *صحيحة إذا أمكن إمرار مستقيم من النقاط الثلاث* :

$$\begin{aligned} C - D &= 1 \\ C + D &= 1 \\ C + 2D &= 3 \end{aligned} \quad \text{أو} \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

لو أمكن حل هذه المعادلات فلن يكون هناك أخطاء. إنها غير ممكنة الحل ؛ النقاط لاتقع على مستقيم واحد. لذا نحلها بواسطة المربعات الأصغرية :

$$A^{T}Ax = A^{T}b \quad \text{هي} \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{C} \\ \overline{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

الحل هو : $\overline{D} = \frac{4}{7}$ ، $\overline{C} = \frac{9}{7}$ وأفضل مستقيم هو $\frac{9}{7} + \frac{4}{7}t$

لاحظ الارتباط الجميل بين الشكلين. المسألة هي نفسها ولكن الفن أظهرها

مختلفة . في الشكل الأيمن ، b ليس تركيباً في الأعمدة ، وليس (1,1,3) تركيباً لـ (1,1,1) و (-1,1,2) . في الجانب الأيسر ، النقاط الثلاث ليست على مستقيم واحد . تستعيض طريقة المربعات الأصغرية عن b بـ p وتستعيض عن النقاط غير الواقعة على مستقيم بنقاط واقعة عليه . ولكوننا عاجزين عن حل النظام $Ax=b$ ، فإننا نحل $A\overline{x}=p$.

للمستقيم $\frac{9}{7}+\frac{4}{7}t$ الارتفاعات $\frac{5}{7},\frac{13}{7},\frac{17}{7}$ كقياسات في الأزمنة -1,1,2 . تقع هذه النقاط على مستقيم . لذا يقع المتجه $p=(\frac{5}{7},\frac{13}{7},\frac{17}{7})$ في فضاء الأعمدة . لحسن الحظ ، فإن هذا المستقيم هو أفضل مستقيم وهذا المتجه هو أفضل متجه . *إنه المسقط* . الشكل الأيمن واقع في فضاء ذي ثلاثة أبعاد (أو m بعداً إذا وجدت m نقطة) والشكل الأيسر في فضاء ذي بعدين (أو n بعداً إذا وجد n وسيطاً) .

بطرح p من b ، نجد الأخطاء $e=(\frac{2}{7},-\frac{6}{7},\frac{4}{7})$. إنها الأخطاء الرأسية في الشكل الأيسر ، وهي مركبات المتجه المنقط في الشكل الأيمن . متجه الخطأ هذا متعامد مع العمود الأول (1,1,1) لأن $\frac{2}{7}-\frac{6}{7}+\frac{4}{7}=0$ ، إنه متعامد مع العمود الثاني (-1,1,2) لأن $-\frac{2}{7}-\frac{6}{7}+\frac{8}{7}=0$ ، لذا ، فانه متعامد مع فضاء الأعمدة وهو واقع في الفضاء الصفري اليساري .

سؤال : لو كانت القياسات الأصلية $b=(\frac{2}{7},-\frac{6}{7},\frac{4}{7})$ ، فماذا سيكون أفضل مستقيم وأفضل $\overline{x}$ ؟ الجواب : المستقيم الصفري ـ الذي هو المحور الأفقي ـ و $\overline{x}=0$.

يمكننا أن نلخص بسرعة معادلات الملائمة مع مستقيم . العمود الأول من A يحوي وحداناً ، ويحوي العمود الثاني الأزمنة t_i . لذا A^TA يحوي مجموع m من الوحدان ومجموع الأزمنة t_i ومجموع t_i^2 :

٣ ي إذا اعطينا القياسات $b_1,...,b_m$ في النقاط المختلفة $t_1,...,t_m$ ، فان المستقيم $\overline{C}+\overline{D}t$ الذي يجعل E^2 أصغرياً ، ينتج عن المربعات الأصغرية :

$$\begin{bmatrix} m & \sum t_i \\ \sum t_i & \sum t_i^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{C} \\ \overline{D} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sum b_i \\ \sum t_i b_i \end{bmatrix} \quad \text{أو} \quad A^TA\begin{bmatrix} \overline{C} \\ \overline{D} \end{bmatrix}=A^Tb$$

ملاحظة الملائمة بين المعطيات والمستقيم لم تسبب اختلافاً خاصاً في رياضيات المربعات الأصغرية . في كثير من التجارب ، لا يوجد مبرر لتوقع علاقة خطية وليس من المعقول البحث عن مثل ذلك . لنفرض أننا نتعامل مع مادة مشعة . الناتج b هنا هو قراءات عداد جيجر باختلاف الزمن . نفرض أننا أمام خليط من مادتين كيماويتين مشعتين نعرف مدة نصف حياتهما (أو معدل انحلالهما) ولكننا لانعرف مقدار مايقع تحت أيدينا من كل منهما . إذا كان هذان المقداران المجهولان هما C و D فان قراءة عداد جيجر سوف تتصرف كمجموع قوتين (وليس كمستقيم) :

$$b = Ce^{-\lambda t} + De^{-\mu t}. \qquad (٨)$$

عملياً ، هذا القانون ليس منعكساً من قبل العداد . بدلاً من ذلك ، إذا قمنا بسلسلة من القراءات $b_1,...,b_m$ في اللحظات المختلفة $t_1,...,t_m$ ، فإن العلاقة (٨) تتحقق بصورة تقريبية ، فقط :

$$Ce^{-\lambda t_1} + De^{-\mu t_1} \approx b_1 .$$

$$Ce^{-\lambda t_m} + De^{-\mu t_m} \approx b_m.$$

إذا كان هناك أكثر من قراءتين $m > 2$ فانه ، على الأرجح ، لن يمكننا حل مثل هذه المعادلات بالنسبة لـ C و D . لكن ، يمكن لمبدأ المربعات الأصغرية أن يعطي قيمتين مفضلتين $\overline{C}$ و $\overline{D}$.

سيكون الوضع مختلفاً تماماً ، فيما لو عرفنا المقدارين C و D وحاولنا إيجاد معدلي الانحلال λ و μ . هذه مسألة *مربعات أصغرية* غير خطية وهي مسألة صعبة جداً . نريد ، أيضاً ، تكوين E^2 ، وهو مجموع مربعات الأخطاء ، ثم نبحث عن نهايتها الصغرى . ولكن ، عندما نجعل مشتقاتها مساوية الصفر ، فقد لانحصل على معادلات خطية في القيمتين المفضلتين $\overline{\lambda}$ و $\overline{\mu}$. في التمارين ، سنبقى مع المربعات الأصغرية الخطية .

تمـاريـن

٣-٣-١ أوجد أفضل حل مربعات أصغرية $\bar{x}$ للمعادلتين $3x = 10$ ، $4x = 5$. ماهو الخطأ E^2 الـذي جعـل فـي نهـايتـه الصغـرى ؟ تحقــق من أن متــجه الخــطأ $(10-3\bar{x}, 5-4\bar{x})$ متعامد مع العمود $(3,4)$.

٣-٣-٢ نفرض أنه جرت ملائمة القيمتين $b_1=1$ و $b_2=7$ اللتين تقـابلان الزمنـين $t_1=1$ و $t_2=2$ مـع المستقيم $b=Dt$ *المار مـن نقطة الأصل*. حــل المعادلتـين المقابلتـــين لـ $D=1$ و $2D=7$ بطريقة المربعات الأصغرية وتحقق من المستقيم المفضل .

٣-٣-٣ حل $Ax=b$ بطريقة المربعات الأصغرية وأوجد $p=A\bar{x}$، إذا كان :

$$A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}.$$

تحقق من أن متجه الخطأ متعامد مع أعمدة A .

٣-٣-٤ اكتب $E^2=\|Ax-b\|^2$ واجعل مشتقتي ذلك بالنسبة لـ u و v مساويتين الصفر، إذا كان :

$$A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{bmatrix},\quad x=\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}1\\3\\4\end{bmatrix}.$$

قارن المعادلة الناتجة مع $A^TA\bar{x}=A^Tb$، تأكيداً لكون الحساب جيداً مثل الهندسة التي تعطي المعادلة النظامية . أوجد الحل $\bar{x}$ والمسقط $p=A\bar{x}$. لماذا $p=b$ ؟

٣-٣-٥ ليس للنظام التالي حل :

$$Ax=\begin{bmatrix}1&-1\\1&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C\\D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\5\\9\end{bmatrix}=b.$$

ارسم وجد مستقيماً ملائماً يؤدي إلى جعل التركيب التربيعي في نهايته الصغرى : $(C-D-4)^2+(C-5)^2+(C+D-9)^2$. ماهو مسقط b على فضاء أعمدة A ؟

٣-٣-٦ أوجد مسقط b على فضاء أعمدة A :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

فرق b إلى $p + q$ حيث p في فضاء الأعمدة و q متعامد مع هذا الفضاء .
أي واحد من الفضاءات الجزئية الأربعة يحوي q ؟

٣-٣-٧ أوجد مصفوفة الاسقاط p على الفضاء المولد بالمتجهين $a_1=(1,0,1)$ و $a_2=(1,1,-1)$.

٣-٣-٨ إذا كانت P مصفوفة اسقاط على فضاء جزئي S عدد أبعاده k ، من الفضاء الكلي R^n ، ماهو فضاء أعمدة P وماهي رتبتها ؟

٣-٣-٩ (أ) إذا كان $P = P^TP$ ، برهن أن P مصفوفة اسقاط .

(ب) ماهو الفضاء الجزئي الذي يمكن للمصفوفة $P = 0$ أن تسقط عليه ؟

٣-٣-١٠ إذا كانت المتجهات a_1,a_2,b متعامدة . فماهما A^TA و A^Tb ؟ ماهو مسقط b على مستوي المتجهين a_1 و a_2 ؟

٣-٣-١١ نفرض أن P مصفوفة اسقاط على فضاء جزئي S و Q مصفوفة الاسقاط على المتمم المتعامد $S^{\perp}$ ماهما $P+Q$ و PQ ؟ برهن أن معكوس $P-Q$ هو ذاتها .

٣-٣-١٢ إذا كان V الفضاء الجزئي المولد بالمتجهين $(1,1,0,1)$ و $(0,0,1,0)$ ، أوجد :
(أ) أساساً للمتمم العمودي $V^{\perp}$ ،
(ب) مصفوفة الاسقاط P على V ،
(جـ) المتجه المنتمي إلى V والأكثر قرباً من المتجه $b=(0,1,0,-1)$ من $V^{\perp}$.

٣-٣-١٣ أوجد أفضل مستقيم ملائم (مربعات أصغرية) للقياسات :

$b = 3$, عند $t = -1$ $b = 4$, عند $t = -2$

$b = 1$. عند $t = 0$ $b = 0$, عند $t = 2$

ثم أوجد مسقط $b = (4,3,1,0)$ على فضاء أعمدة المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

٣-٣-١٤ المتجهات $a_1 = (1,1,0)$ و $a_2 = (1,1,1)$ يولدان مستوياً في $\boldsymbol{R}^3$. أوجد مصفوفة الاسقاط P على هذا المستوي وأوجد متجهاً غير صفري b يكون مسقطه في الصفر.

٣-٣-١٥ إذا كانت P مصفوفة اسقاط على مستقيم في مستوي x-y، ارسم شكلاً يصف تأثير "مصفوفة الانعكاس" $H = I - 2P$، فسر هندسياً وجبرياً، سبب كون $H^2 = I$.

٣-٣-١٦ برهن أنه إذا كان للمتجه u طول يساوي الواحد، فان المصفوفة $P = uu^T$ ذات البعد الواحد هي مصفوفة اسقاط : إنها تتمتع بالخاصتين (١) و (٢). باختيار $u = a / \|a\|$، تصبح P مصفوفة إسقاط على مستقيم يحمل a وتصبح Pb النقطة $p = \overline{x}\, a$. مصفوفات الاسقاط من الرتبة واحد، تقابل تماماً، مسائل المربعات الأصغرية ذات المجهول الواحد.

٣-٣-١٧ ماهي المصفوفة ذات النوع 2×2 التي تسقط المستوي x-y على المستقيم 45^o - حيث $x + y = 0$.

٣-٣-١٨ نريد ملائمة المستوي $y = C + D\,t + E\,z$ مع النقاط الأربع :

$y = 6$ عند $t = 0, z = 3$, $y = 3$ عند $t = 1, z = 1$

$y = 0$ عند $t = 0, z = 0$, $y = 5$ عند $t = 2, z = 1$

(١) أوجد ٤ معادلات في ٣ مجاهيل لكي يمر مستوٍ من النقاط المذكورة (إذا وجد مثل هذا المستوي).

(٢) أوجد ثلاث معادلات بثلاثة مجاهيل لأفضل حل مربعات أصغرية.

٣-٣-١٩ إذا كان $P_c = A(A^TA)^{-1}A^T$ مصفوفة الاسقاط على فضاء أعمدة A، فماهي مصفوفة الاسقاط P_R على فضاء الاسطر؟ (إنها ليست P_c^T!).

٣-٣-٢٠ إذا كانت P_R مصفوفة الاسقاط على فضاء أسطر A، فماهي مصفوفة الاسقاط P_N على الفضاء الصفري؟ (هذان الفضاءان الجزئيان متعامدان).

٣-٣-٢١ نفرض L_1 المستقيم المار من نقطة الأصل في اتجاه a_1 و L_2 المستقيم المار من b في اتجاه a_2. لايجاد النقطتين الأكثر قرباً x_1a_1 و $b+x_2a_2$ من المستقيمين، اكتب معادلتين لكي يجعل x_1 و x_2 التركيب $\|x_1a_1 - x_2a_2 - b\|$ في نهايته الصغرى. حل بالنسبة لـ x *إذا كان* $a_1=(1,1,0)$ و $a_2=(0,1,0)$ و $b=(2,1,4)$.

٣-٣-٢٢ أوجد أفضل مستقيم $C+Dt$ يلائم $b = 4,2,-1,0,0$ في الأزمنة $t = -2,-1,0,1,2$.

٣-٣-٢٣ برهن أن أفضل ملائمة مربعات أصغرية لمجموعة القياسات $y_1,...,y_n$ هي بمستقيم أفقي ـ بقول آخر، بدالة ثابتة $y = c$ ـ هي متوسط هذه القيم:

$$C = \frac{y_1 + \dots + y_m}{m}.$$

بلغة الاحصاء، تدعى القيمة المختارة $\overline{y}$ التي تجعل الخطأ $E^2 = (y_1-y)^2 + \dots + (y_n-y)^2$ أصغرياً هو متوسط العينة، أما الناتج E^2 فهو *التباين* σ^2.

٣-٣-٢٤ أوجد أفضل مستقيم يوافق القياسات التالية وارسم الحل :

$$t = -1 \text{ عند } y = 2\,,\ t = 0 \text{ عند } y = 0,$$
$$t = 1 \text{ عند } y = -3\,,\ t = 2 \text{ عند } y = -5.$$

٣-٣-٢٥ أفرض أننا، عوضاً عن المستقيم، لاءمنا المعطيات الواردة في التمرين السابق، بالقطع المكافىء $y = C + Dt + Et^2$، في النظام غير المتسق $Ax = b$ الناتج عن القياسات الأربعة، ماهي عناصر المصفوفة A والمتجه المجهول x ومتجه المعطيات b ؟ ليس من المطلوب حساب $\overline{x}$.

٣-٣-٢٦ مط رجل كهل بآلة تعذيب بالمط حتى أصبح طوله $L = 5,6,7$ أقدام وذلك بتأثير القوى $F = 1,2,4$ طناً. بفرض صحة قانون Hook ‏, $L = a + bF$، أوجد طوله المعتاد a بطريقة المربعات الأصغرية.

٣ - ٤ الأسس القائمة، المصفوفات القائمة وتقويم غرام-شميدت

في أساس قائم، يكون كل متجه منه متعامد مع أي متجه آخر. المحاور الاحداثية متعامدة فيما بينها. إن ذلك، فعلاً، قريب من المفضل، وهناك تحسين ممكن آخر من السهل اجراؤه : نقسم كل متجه على طوله لجعله متجه وحدة. تحول هذه الخطوة أساساً ***قائماً*** إلى أساس ***متعامد نظامي***. سنمثل متجهات هذا الأساس بالرمز q الذي يعني التعامد النظامي :

٣ع تكون المتجهات $q_1,....,q_k$ متعامدة نظامية إذا كان :

$$q_i^T q_j = \begin{cases} 0 & \text{إذا كان } i \neq j \text{ وهذا يعنى التعامد} \\ 1 & \text{إذا كان } i = j \text{ وهذا يعني الانتظام} \end{cases}$$

عندما توضع متجهات متعامدة نظامية في أعمدة مصفوفة، تمثل عندئذ بـ Q.

المثال الأكثر أهمية هو *الأساس القياسي*. من أجل المستوي x-y، فإن أفضل محورين معروفين ليسا، فقط، متعامدين بل هما أفقي ورأسي؛ الأساس هو

$e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)$. Q هي مصفوفة الوحدة . في فضاء ذي n بعداً ، الأساس القياسي مكون من أعمدة $Q = I$:

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad e_{\rm n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

من المؤكد أن ذلك ليس هو الأساس المتعامد النظامي الوحيد ؛ بل يمكننا أن ندور المحاور كاملة دون أن تتغير الزوايا القوائم التي تلتقي بها هذه المحاور . مصفوفة الدوران هذه ستقدم فيما بعد كمثال لمصفوفة Q . من جهة أخرى ، إذا لم نكن نتعامل مع $\boldsymbol{R}^{\rm n}$ ، بل مع واحد من فضاءاته الجزئية ، فان المتجهات القياسية e_i قد لاتكون واقعة في هذا الفضاء الجزئي . في هذه الحالة ، إمكان إيجاد أساس متعامد نظامي أمر غير واضح . لكننا سنبرهن أن مثل هذا الأساس موجود دائماً وأنه من الممكن إنشاؤه بطريقة سهلة ، انطلاقاً من أي أساس مهما كان نوعه . يدعى هذا الانشاء الذي يحول جملة مائلة من المحاور إلى جملة متعامدة : ***تقويم غرام شميدت Gram _ Schmidt*** .

نلخص النقاط الأساسية الثلاث لهذا البند كما يلي :

(١) تعريف وذكر خواص المصفوفات القائمة Q .

(٢) حل النظام $Qx = b$ عادياً أو بطريقة المربعات الأصغرية .

(٣) طريقة غرام ـ شميدت وتفسيرها كتفريق مصفوفي جديد $A = QR$.

المصفوفات القائمة

المصفوفة القائمة هي مجرد مصفوفة مربعة أعمدتها متعامدة ـ نظامية[١] .

---

(١) لقد كان من الممكن أن يكون من الأفضل تسميتها مصفوفة متعامدة نظامية ، ولكن قد اصبح التغيير متأخراً جداً . يوجد ، كذلك ، تسمية غير مقبولة للمصفوفة المستطيلة ذات الأعمدة المتعامدة النظامية . سنكتب مع ذلك ، Q وتعتبر بذلك مصفوفة قائمة ، مالم تكن مربعة .

نستعمل Q رمزاً لهذه المصفوفة و $q_1,....,q_n$، رموزاً لاعمدتها. خاصتا الاعمدة هما $q_i^T q_j=0$ و $q_i^T q_i=1$ ويمكن جعل ذلك ضمن خواص Q. في هذا الدمج، السهل جداً، يمكنك أن ترى لماذا يكون الرمز المصفوفي حسن الاستخدام.

٣ ف إذا كانت أعمدة A متعامدة نظامية، فإن :

$$Q^{\mathrm{T}}Q = \begin{bmatrix} \text{-----}\ q_1^{\mathrm{T}}\ \text{-----} \\ \text{-----}\ q_2^{\mathrm{T}}\ \text{-----} \\ \\ \text{-----}\ q_{\mathrm{n}}^{\mathrm{T}}\ \text{-----} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & & q_{\mathrm{n}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & . & 0 \\ 0 & 1 & . & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & 1 \end{bmatrix}.$$

لذا $Q^TQ=I$ و $Q^T=Q^{-1}$. في المصفوفات القائمة ***يكون المنقول هو المعكوس نفسه.***

عندما يضرب السطر i من Q^T بالعمود j من Q فان الناتج $q_i^Tq_j=0$. هذه هي الأصفار غير القطرية. عندما يكون $i=j$ نجد على القطر $q_i^Tq_i=1$. إن ذلك هو التنظيم وهو جعل المتجهات من طول يساوي الواحد.

لاحظ أن $Q^TQ=I$ حتى عندما تكون Q^{T} مستطيلة. إلا أن Q^T تكون عندئذٍ معكوساً يسارياً، فقط.

مثال ١

$$Q = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad Q^{\mathrm{T}} = Q^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

تدور Q كل متجه بزاوية قدرها θ وتدور Q^T (إلى الخلف) بزاوية قدرها $-\theta$. من الواضح أن الأعمدة متعامدة وهي متعامدة ـ نظامية لأن $sin^2\theta+cos^2\theta=1$. المصفوفة Q^T هي تماماً مثل Q مصفوفة قائمة.

مثال ٢

كل مصفوفة مبادلة P مصفوفةقائمة، أعمدتها حتماً متجهات وحدة وهي، حتماً، متعامدة فيما بينها ـ لأن العدد (١) يظهر في مواقع مختلفة من الاعمدة :

إذا كان $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ فإن $P^{-1} = P^{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

يلاحظ بصورة مباشرة أن $P^TP = I$. المنقول هو المعكوس. هناك مصفوفة أخرى P تحقق عناصرها $P_{13} = P_{22} = P_{31} = 1$، تنقل المحاور x,y,z إلى الوضع z,y,x - من نظام موجب إلى نظام سالب. لذا، فاننا نخطىء عندما نقول إن كل مصفوفة قائمة تمثل دوراناً. *الانعكاس ممكن، أيضاً*. المصفوفة $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ليست دوراناً مثل مصفوفة المثال (١). لاتوجد قيمة لـ θ تنتج P. تعكس P أي نقطة (x,y) إلى صورتها (y,x) عبر مرآة واقعة على المستقيم $x = y$ الذي ميله ٤٥°. هندسياً، تمثل مصفوفة قائمة Q تركيب دوران وانعكاس.

يبقى هناك خاصة مشتركة بين الدوران والانعكاس وتتمتع بها، فعلاً، كل مصفوفة قائمة. لاتتمتع بهذه الخاصة مصفوفات الاسقاط التي هي ليست قوائم ولاقابلة للعكس. الاسقاط يصغر طول المتجه، بينما للمصفوفة القائمة خاصة تعد الأكثر أهمية والأكثر تمييزاً :

٣ ص الضرب بمصفوفة قائمة Q يحافظ على الأطوال :

$$\|Qx\| = \|x\| \quad \text{لكل متجه } x$$

ويحافظ، أيضاً، على الجداء الداخلي لأن : $(Qx)^T(Qy) = x^TQ^TQy = x^Ty$.

تنتج المحافظة على الطول من $Q^TQ = I$:

$$\|Qx\|^2 = \|x\|^2 \quad \text{لأن} \quad (Qx)^T(Qx) = x^TQ^TQx = x^Tx$$

يحتفظ كل جداء داخلي وكل طول، عندما يدور الفضاء أو يعكس. طبعاً، يأتي الطول من الضرب الداخلي لمتجه بنفسه. وتأتي الزاوية عن الضرب الداخلي لـ x بـ y - لأن $\cos\theta$ يعطى بالكسر $x^Ty / \|x\|\,\|y\|$ ولا يتغير هذا الكسر عند الضرب بـ Q.

نصل الآن إلى الحساب الذي يستخدم الخاصة الأساسية $Q^T=Q^{-1}$. من حيث المبدأ، يمكن إجراء هذا الحساب تحت أي أساس . عملياً، سيكون العمل بسيطاً جداً عندما يكون الأساس متعامداً ـ نظامياً ـ سنبرهن فيما بعد أن ذلك يؤدي إلى الفكرة الأساسية لمتسلسلة فوريه . إذا كان لدينا أساسٌ، فان كل متجه تركيب لهذا الأساس، والمسألة هنا هي معرفة المعاملات في هذا التركيب :

اكتب b كتركيب من الشكل $b = x_1q_1+x_2q_2+......+x_nq_n$

لحساب x_1 توجد حيلة بارعة . *نضرب طرفي المعادلة بالمتجه* q_1^T ، في الطـرف الأيســر نجد $q_1^T b$ وفي الطرف الأيمن تختفي جميع الحدود (لأن $q_i^T q_j = 0$) سوى الحد الأول . سنبقى مع :

$$q_1^T b = x_1 q_1^T q_1 .$$

لما كان $q_1^T q_1 = 1$ فاننا نجد x_1 . إنه $q_1^T b$. بصورة مشابهة نجد المعامل الثاني $x_2 =$ $q_2^T b$ إنه الحد الوحيد الذي يبقى على قيد الحياة عندما نضرب بـ q_2^T . تموت بقية الحدود بسبب التعامد . لكل جزء من b قانون بسيط، بتركيب هذه الأجزاء، نجد :

أي متجه b يساوي $(q_1^T b)\, q_1 + (q_2^T b)\, q_2 ..... + (q_n^T b) q_n$ (١)

من أجل ذلك، نحتاج إلى أساس وكذلك Q مربعة .

لايمكننا أن نقاوم كتابة هذا الحساب بلغة المصفوفات . لقد بحثنا عن المعاملات في المعادلة المتجهة $x_1a_1 + ... + x_nq_n = b$. إنها مطابقـة للمعادلـة المصفوفيـة $Qx = b$. (تضرب أعمدة Q مركبات x) . حلها هو $x = Q^{-1}b$. إلا أن $Q^{-1} =$ Q^T ـ ذلك عندما يتدخل االتعامد النظامي ـ لذا، يكون الحل أيضاً $x = Q^T b$:

(٢)

$$x = Q^{T} b = \begin{bmatrix} _\ q_1^T\ _ \\ \\ _\ q_n^T\ _ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ b \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1^T b \\ \\ q_n^T b \end{bmatrix}$$

تظهر جميع مركبات x للعيان، إنها الجداءات الداخلية $q_i^T b$ كما رأينا سابقاً .

يبين الشكل المصفوفي، أيضاً، ماذا يحدث عندما لاتكون الأعمدة متعامدة نظامية. التعبير عن b كتركيب من الصورة $x_1a_1+....+x_na_n$ مطابق لحل النظام $Ax=b$. تذهب متجهات الأساس إلى مواقع أعمدة المصفوفة. في هذه الحالة، نحتاج إلى A^{-1} التي تأخذ عملها، ولكن في حالة التعامد ـ النظامي نحتاج فقط إلى Q^T.

ملاحظة ١ لقد ظهرت النسبة $q_1^Tb/q_1^Tq_1$ منذ قريب عندما اسقطنا bعلى مستقيم. لقد كان حاملاً للمتجه a وكان المسقط $a(a^Tb/a^Ta)$. هنا سيكون المستقيم حاملاً لـ q_1 وسيكون المقام ١، والمسقط $q_1(q_1^Tb)$. لذا سيكون لدينا تفسير جديد للقانون $b=\sum(q_i^Tb)q_i$ كل متجه b يساوي مجموع مساقطه ذات البعد الواحد على المستقيمات الحاملة لـ q_i.

هناك شيء إضافي آخر. لما كانت هذه الاسقاطات قائمة، فان نظرية فيثاغورس تبقى صحيحة. مربع الوتر يبقى مساوياً لمجموع مربعات المركبات:

$$\|b\|^2=(q_1^Tb)^2+(q_2^Tb)^2+\dots+(q_n^Tb)^2.$$

إن ذلك مماثل للعلاقة $\|Q^Tb\|^2=\|b\|^2$ التي برهنت من قريب.

ملاحظة ٢ لما كان $Q^T=Q^{-1}$ فان لدينا أيضاً $QQ^T=I$. عندما تقع Q قبل Q^T، فان الجداء يأخذ الجداءات الداخلية لأسطر Q. (بالنسبة لـ Q^TQ هي الأعمدة). لما كانت النتيجة هي، أيضاً، مصفوفة الوحدة، فاننا نصل إلى نتيجة مفاجئة: ***تكون أسطر مصفوفة مربعة متعامدة نظامية عندما تكون أعمدتها كذلك***. تتجه الأسطر في اتجاهات مختلفة تماماً عن اتجاهات الأعمدة كما في المصفوفة الواردة أدناه، وإنني لاأرى، هندسياً، لماذا يكون على هذه الأسطر أن تكون متعامدة ـ لكنها كذلك.

مثال:

$$Q=\begin{bmatrix}1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6}\end{bmatrix}.$$

المصفوفات المستطيلة ذوات الأعمدة المتعامدة ـ النظامية

يتعلق هذا الباب بالنظام $Ax = b$، إلا أن A ليست بالضرورة مربعة. يدور هذا البند حول النظام $Qx = b$ ونقبل هنا الامكان نفسه ـ يمكن أن توجد أسطر بعدد يزيد على عدد الأعمدة. لدينا n متجهاً متعامدة ـ نظامية q_i وهي أعمدة Q، ولكن، لهذه الأعمدة $m > n$ مركبة. بقول آخر Q مصفوفة من النوع $m \times n$ ولن نتوقع حل $Qx = b$ بصورة صحيحة. *لذا، نحلها بطريقة المربعات الأصغرية*.

إذا كان هناك أي انصاف، فان الأعمدة المتعامدة تجعل المسألة سهلة. لقد عملنا على المصفوفات المربعة وسنعمل الآن على مصفوفات مستطيلة. النقطة الأساسية هي أن نلاحظ *أنه لا يزال لدينا* $Q^TQ = I$:

$$\begin{bmatrix} \text{———} & q_1^T & \text{———} \\ & & \\ \text{———} & q_n^T & \text{———} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & & | \\ q_1 & & q_n \\ | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & . & 0 \\ . & . & . \\ 0 & . & 1 \end{bmatrix}.$$

لم يعد صحيحاً كون Q^T معكوس Q ولكنها تبقى ***المعكوس اليساري***. بالنسبة للمربعات الأصغرية، هذا كل مانحتاجه. تنتج المعادلة النظامية عن ضرب المعادلة $Ax = b$ بمنقول المصفوفة لنحصل على $A^TA\overline{x} = A^Tb$. هنا A هي Q، والمعادلة النظامية هي $Q^TQx = Q^Tb$. لكن Q^TQ هي مصفوفة الوحدة! *لذا فان الحل هو* Q^Tb، سواء أكانت Q مربعة و Q^Tb الحل الصحيح، أو كانت Q مستطيلة وعندهانكون أمام حل مربعات أصغرية.

٣ ق إذا كانت للمصفوفة Q أعمدة متعامدة ـ نظامية فان مسألة المربعات الأصغرية تصبح سهلة جداً :

$Q x = b$ (نظام مستطيل لايوجد حل مقابل أكثر قيم b)

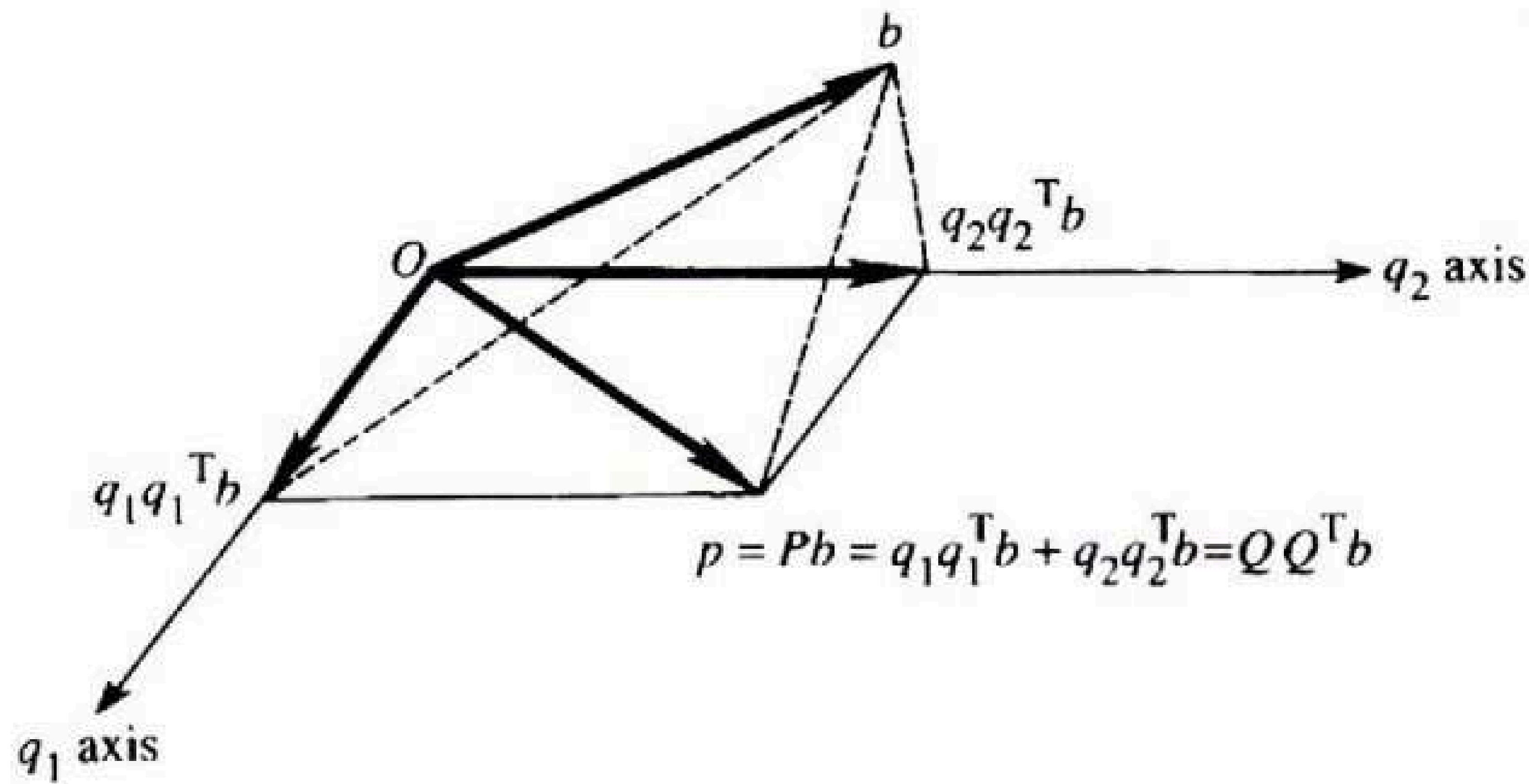
$Q^T Q \overline{x} = Q^T b$ (معادلة نظامية للحل المفضل $\overline{x}$ حيث يكون $Q^T Q = I$)

$\overline{x} = Q^T b$ ($\overline{x}_i$ هو $q_i^T b$)

$p = Q \overline{x}$ (مسقط b على فضاء الأعمدة هو $(q_1^T b)\, q_1 + ... + (q_n^T b)\, q_n$)

$p = Q Q^T b$ (لذا تكون مصفوفة الاسقاط هي $P = Q Q^T$)

يشبه القانونان الأخيران القانونين، $p = A\overline{x}$ و $P = A(A^T A)^{-1} A^T$، اللذين يعطيان المسقط ومصفوفة الاسقاط من أجل أي مصفوفة A. عندما تكون الأعمدة متعامدة و A هي Q فان «مصفوفة الضرب المتصالب» $A^T A$ تصبح مصفوفة الوحدة $Q^T Q = I$.



شكل ٣-١٠ المسقط على مستوٍ = مجموع المسقطين على q_1 و q_2 المتعامدين النظاميين

يختفي الجزء الأصعب من المربعات الأصغرية عندما تكون المتجهات متعامدة - نظامية. تكون المساقط على المحاور منفصلة، و p هو مجموع هذه المساقط وهو ذو بعدٍ واحد $p = (q_1^T b) q_1 + ... + (q_n^T b) q_n$.

نؤكد أن هذه المساقط لاتنشىء b. إنها تنجز ذلك في حالة المصفوفة المربعة $m=n$. ولكنها في الحالة المستطيلة $m>n$، لايمكنها أن تحقق ذلك. إنها تعطي المسقط p ولكنها لاتعطي المتجه الأصلي bـ هذا كل مانقدر على توقعه عندما يوجد عدد من المعادلات يزيد على عدد المجاهيل ولم تعد المتجهات q_i أساساً. مصفوفة الاسقاط هي، عادة، $A(A^TA)^{-1}A^T$ ويمكن هنا اختصارها لتصبح :

$$P = Q(Q^{\mathrm{T}}Q)^{-1}Q^{\mathrm{T}} \quad \text{أو} \quad \boxed{P = QQ^{\mathrm{T}}} \qquad (٤)$$

لاحظ أن Q^TQ هي مصفوفة الوحدة من النوع $n \times n$، بينما QQ^T هي مصفوفة اسقاط P من النوع $m \times m$. إنها تعمل عمل مصفوفة الوحدة على أعمدة Q (P تتركها وحدها) ولكنها تعمل كمصفوفة صفرية على المتمم المتعامد (الفضاء الصفري لـ Q).

مثال ١ الحالة التالية بسيطة لكنها نموذجية : لنفرض أننا أسقطنا نقطة $b=(x,y,z)$ على مستوي x-y. إن مسقطها هو $p=(x,y,0)$ وإنه يساوي مجموع المسقطين المختلفين على محوري x و y :

$$q_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ و } (q_1^{\mathrm{T}}b)q_1 = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad q_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ و } (q_2^{\mathrm{T}}b)q_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$$

وبذا، تكون مصفوفة الاسقاط على العموم :

$$P = q_1q_1^{\mathrm{T}} + q_2q_2^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ و } P\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$$

مثال ٢ هناك حالة تؤدي فيها ملائمة مستقيم إلى أعمدة متعامدة. إذا أخذت القياسات y_1, y_2, y_3 بحيث يكون متوسطها صفراً مثل $t_1=-3, t_2=0, t_3=3$، فان محاولة ملائمة المستقيم $y=C+Dt$ تؤدي إلى ثلاث معادلات بمجهولين :

$$\begin{matrix} C + Dt_1 = y_1 \\ C + Dt_2 = y_2 \\ C + Dt_3 = y_3 \end{matrix} \quad \text{أو} \quad \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

العمودان هنا متعامدان، لذا يمكننا أن نسقط y بصورة منفصلة على كل عمود، ويمكن إيجادالمعاملين المفضلين $\overline{C}$ و $\overline{D}$ كل منهما بمعزل عن الآخر :

$$\overline{C} = \frac{[1 \quad 1 \quad 1][y_1 \quad y_2 \quad y_3]^T}{1^2 + 1^2 + 1^2}, \quad \overline{D} = \frac{[-3 \quad 0 \quad 3][y_1 \quad y_2 \quad y_3]^T}{(-3)^2 + 0^2 + 3^2}.$$

لنلاحظ أن $\overline{C} = (y_1+y_2+y_3)/3$ بسيط بصورة خاصة؛ إنه متوسط المعطيات. إنه يعطي أفضل ملائمة بمستقيم أفقي، بينما $D\,t$ هو أفضل ملائمة بمستقيم مار من نقطة الأصل. *بما أن العمودين متعامدان، فان مجموع هاتين القطعتين المتمايزتين يمثل أفضل ملائمة بأي مستقيم على الإطلاق*. لكن، بما أن العمودين لايساوي كل منهما الوحدة ـ ليسا متعامدين نظاميين ـ فإن قانون الاسقاط يحوي مربع الطول في المقام. الأعمدة المتعامدة ـ النظامية مفضلة جداً بحيث يكون من المستحسن الانتقال إلى هذه الحالة في كل مرة. إذا لم يكن متوسط أزمنة الملاحظات صفراً ـ إنه $\overline{t} = (t_1+...+t_m)/m$ ـ فإنه يمكن تحويل مبدأ الزمن بمقدار $\overline{t}$. عوضاً عن $y = C + D\,t$ نتعامل مع $y = c + d\,(t - \overline{t}\,)$. المستقيم المفضل يبقى كما هو: كما في هذا المثال نجد :

$$\overline{c} = \frac{[1 \,\ldots\, 1][y_1 \,\ldots\, y_m]^T}{1^2 + 1^2 + \ldots + 1^2} = \frac{y_1 + \ldots + y_m}{m} \qquad (٥)$$

$$\mathrm{d} = \frac{\left[(t_1 - \overline{t}\,) \ldots (t_m - \overline{t}\,)\right]\left[y_1 \ldots y_m\right]^T}{(t_1 - \overline{t}\,)^2 + \ldots + (t_m - \overline{t}\,)^2} = \frac{\sum (t_1 - \overline{t}\,) y_i}{\sum (t_1 - \overline{t}\,)^2}.$$

$\overline{c}$ المفضل هو المتوسط، ونتوصل، أيضاً، إلى قانون مناسب لحساب $\overline{d}$. لقد كان للمصفوفة A^TA العناصر غير القطرية $\sum t_i$ وبسحب الزمن بمقدار $\overline{t}$، تصبح هذه العناصر أصفاراً. هذا السحب مثال لطريقة غرام ـ شميدت وهي ***تقويم الأحوال مقدماً***.

تعدُّ المصفوفات القائمة حاسمة في الجبر الخطي الحسابي لأنها لاتدخل عدم استقرار . بينما تبقى الأطوال كما هي ، فان التدوير يبقى تحت المراقبة . لذلك أصبح تقويم الأعمدة تقنية أساسية . إنه يؤدي إلى التحليل $A = QR$ الذي هو قريب من القانون المهم $A = LU$.

طريقة غرام ـ شميدت ***Gram – Schmidt***

نفرض أننا اعطينا ثلاثة متجهات مستقلة a,b,c . إذا كانت متعامدة نظامية فالعمل سهل . لاسقاط متجه v على الأول منها ، نحسب $(a^Tv)a$. لاسقاط المتجه ذاته على مستوي المتجهين الأولين ، يكفيك أن تجمع $(a^Tv)a+(b^Tv)b$. للاسقاط على فضاء جزئي محاوره a,b,c ، نضيف ثلاثة مساقط . تتطلب كل الحسابات الجداءات الداخلية a^Tv,b^Tv,c^Tv فقط . لكن لنجعل ذلك صحيحاً ، يجب علينا أن ننطلق بقولنا« ***إذا*** *كانت متعامدة نظامية* » . ننوي الآن ايجاد طريقة لجعلها متعامدة ـ نظامية .

الطريقة سهلة . لقد أعطينا a,b,c ونريد إيجاد q_1,q_2,q_3 . لاتوجد أي مشكلة مع q_1 ، يمكن أخذه باتجاه a . نقسم على الطول لكي يكون $q_1=a/\|a\|$ متجه وحدة . المسألة الحقيقية تبدأ من q_2 ـ الذي يجب أن يكون متعامداً مع q_1 . الفكرة هي الانطلاق بـ b ، فإذاكان لهذا المتجه مركبة على اتجاه q_1 (الذي هو اتجاه a) ***فاننا نطرح هذه المركبة من*** b :

$$b' = b - (q_1^Tb)q_1 . \qquad (٦)$$

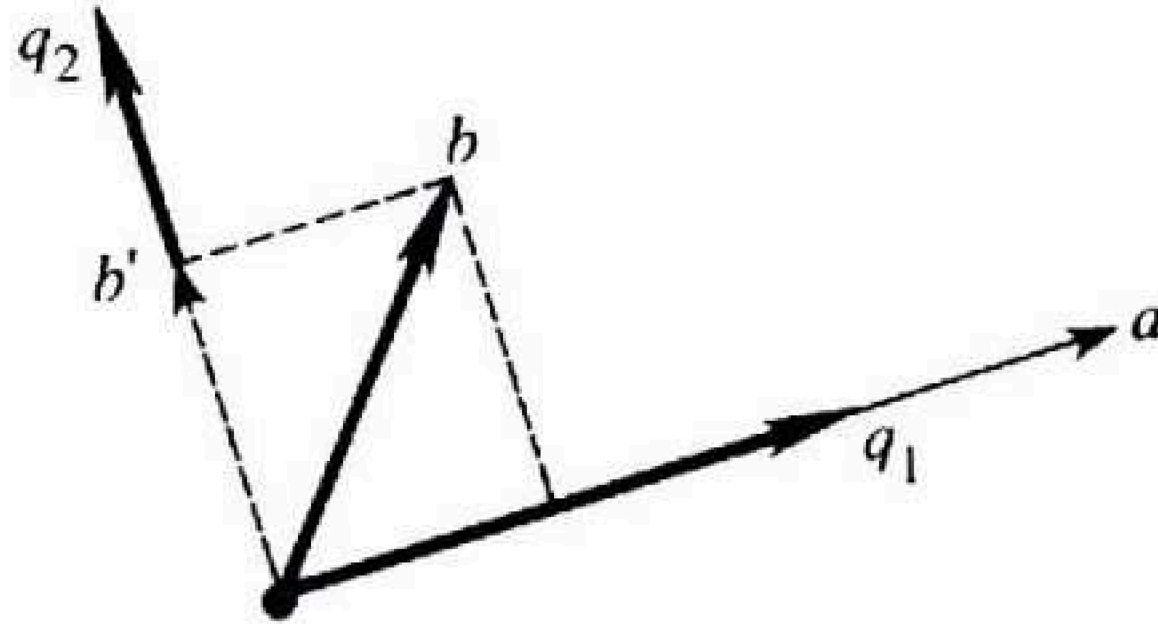
أصبح الآن b' متعامداً مع q_1 . إنه الجزء من b الذي يتجه في الاتجاه الجديد ، وليس في اتجاه a . في الشكل (٣-١١) ، b' متعامد مع q_1 . إنه يهيىء اتجاهاً للمتجه q_2 . لما كان من المطلوب أن يكون q_2 متجه وحدة ، فإننا نقسم b' على طوله : $q_2=b'/\|b'\|$.

حتى هذه النقطة ، فقد عُين كل من q_1 و q_2 . ينطلق الاتجاه الثالث المتعامد بـ

cإنه لايقع في مستوي q_1 و q_2 الذي هو مستوي a و b . عندئذ ، يمكن أن يكون لـ c مركبة في هذا المستوي تطرح من c . (إذا كان الناتج $c' = 0$ فان ذلك يشير إلى أن a,b,c غير مستقلة من الأصل .) مهما كان الامر ، فإننا نريد المركبة c' وهي جزء c الواقع في الاتجاه الجديد المتعامد مع المستوي :

$$c' = c - (q_1^T c) q_1 - (q_2^T c) q_2. \qquad (٧)$$

هذه هي الفكرة الأولى لطريقة غرام ـ شميدت : ***يطرح من أي متجه جديد مركباته على الاتجاهات التي عينت من قبل*** . تستخدم هذه الفكرة مرة بعد مرة[١] .



شكل (٣-١١) . مركبة b على q_1 قد حذفت ، ونظم كل من a و b' .

عندما يكون هناك متجه رابع ، نسقط مركباته على q_1,q_2,q_3 . طبعاً متجه الوحدة q_3 قد كون من c' بعد قسمته على طوله $q_3 = c' / \|c'\|$

---

(١) إذا رأى غرام ذلك أولاً فماذا يبقى لشميت

مثال نفرض المتجهات المستقلة :

$$a=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\quad c=\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}.$$

لايجاد q_1 نجعل المتجه الأول متجه وحدة $q_1=a/\sqrt{2}$. لايجاد q_2 ، نطرح من المتجه الثاني مركبته في الاتجاه الأول :

$$b' = b - (q_1^T b)q_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\1/\sqrt{2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\0\\-\frac{1}{2}\end{bmatrix}.$$

q_2 المنظم هو b' مقسوماً على طول b'، الذي هو $1/\sqrt{2}$:

$$q_2 = \begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\-1/\sqrt{2}\end{bmatrix}.$$

لايجاد q_3، نطرح من c مركبتيه على اتجاهي q_1 و q_2 :

$$c' = c - (q_1^T c)\, q_1 - (q_2^T c)\, q_2$$

$$= \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix} - \sqrt{2}\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\1/\sqrt{2}\end{bmatrix} - \sqrt{2}\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\-1/\sqrt{2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}.$$

إنه، حالياً ، متجه وحدة لذا، فهو q_3. النتيجة هي مجموعة من المتجهات المتعامدة ـ النظامية q_1,q_2,q_3 ستوضع في أعمدة مصفوفة قائمة Q :

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0\end{bmatrix}.$$

من الواضح أن هذه الأعمدة متعامدة ـ نظامية .

٣ ر تنطلق طريقة غرام ـ شميدت بمتجهات مستقلة $a_1,......,a_n$ وتنتهي بالمتجهات المتعامدة ـ النظامية $q_1,.....,q_n$. في الخطوة j ، يطرح من a_j مركباته على الاتجهات التي عينت قبل ذلك :

$$a'_j = a_j - (q_1^T a_j)q_1 - \dots - (q_{j-1}^T a_j)q_{j-1}. \qquad (٨)$$

لذا فإن q_j هو المتجه $a'_j/\|a'_j\|$.

ملاحظة تتعلق بالحسابات من السهل تقويم المتجهات دونما جعل أطوالها مساوية للواحد. الجذر التربيعي يدخل، فقط، في النهاية عندما نقسم على أطوالها . المتجه a'_j يبقى نفسه :

$a'_j = a_j -$(مسقط a_j على a'_1)$- \dots\dots\dots -$(مسقط a_j على a'_{j-1})

إنه، فقط، قانون الاسقاط الذي يظهر مختلفاً، باستخدام المتجه غير المنظم a' عوضاً عن متجه الوحدة q :

مسقط a_j على a'_1 $= \dfrac{(a'_1)^T a_j}{(a'_1)^T a'_1} = (q_1^T a_j)q_1 =$ مسقط a_j على q_1

يعطي المثال الوارد اعلاه الشيء ذاته دون جذر تربيعي :

$$b' = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} \quad \text{ثم} \quad c' = \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\0\\-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

التحليل $\boldsymbol{A=QR}$

نطلق بمصفوفة A أعمدتها a,b,c وننتهي بمصفوفة Q أعمدتها q_1,q_2,q_3 . ماهي العلاقة بين هاتين المصفوفتين ؟ وما هي هذه العلاقة في الأبعاد الكثيرة، عندما ننطلق بـ $a_1,...a_n$ وننتهي بـ $q_1,...q_n$ ؟ المصفوفتان A و Q من النوع $m \times n$، عندما تكون المتجهات من فضاء ذي m بعداً، وتوجد مصفوفة ثالثة تربط بينها .

الفكرة هي كتابة المتجهات a_i كتراكيب في المتجهات q_i. مثال ذلك المتجه b في الشكل (٣-١١) تركيب للمتجهين المتعامدين النظاميين q_1 و q_2 ونحن نعرف ماهو هذا التركيب :

$$b = (q_1^{\mathrm{T}} b)q_1 + (q_2^{\mathrm{T}} b)q_2.$$

يعود ذلك إلى المعادلة المحوطة (١). كل متجه من المستوي هو مجموع مركبتيه على q_1 و q_2. بصورة مشابهة، c هو مجموع مركباته على q_1, q_2, q_3 : $c = (q_1^T c)q_1 + (q_2^T c)q_2 + (q_3^T c)q_3$. إذا عبرنا عن ذلك بشكل مصفوفي نجد ***التحليل الجديد*** $A = QR$:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1^{\mathrm{T}} a & q_1^{\mathrm{T}} b & q_1^{\mathrm{T}} c \\ & q_2^{\mathrm{T}} b & q_2^{\mathrm{T}} c \\ & & q_3^{\mathrm{T}} c \end{bmatrix}$$

لاحظ الاصفار في المصفوفة الأخيرة ! إنها مثلثية . لأنه قد أجريت عليها طريقة غرام ـ شميدت. المتجهان الأولان a و q_1 يقعان على مستقيم واحد. لذا، a,b و q_1,q_2 تقع في مستو واحد. المتجه الثالث c والمتجه q_3 لن يستخدما قبل الخطوة الثالثة.

التحليل مشابه للتحليل $A=LU$ ، ماعدا كون أعمدة العامل الأول Q متعامدة ـ نظامية : العامل الثاني يدعى R ، لأن العناصر غير الصفرية تقع عن يمين القطر (الحرف U قد استخدم من قبل). العناصر غير القطرية في R هي الأعداد $q_1^T b = 1/\sqrt{2}$ و $q_1^T c = q_2^T c = \sqrt{2}$ قد اوجدت من قبل. العناصر القطرية هي الأطوال $1/\sqrt{2}$, 1 , $\sqrt{2}$ التي قسمنا عليها. التفريق الكامل هو :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ & 1/\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ & & 1 \end{bmatrix} = QR.$$

تلاحظ أطوال المتجهات a', b', c' على قطر R. توجد خارج القطر مضاعفات

لـq_1 و q_2 وهما اللذان طرحا وفق طريقة غرام ـ شميدت. المتجهات المتعامدة النظامية التي هي q_1, q_2, q_3 والتي هي الغرض الكامل للتقويم، تقع في العامل الأول Q.

ربما يكون QR أقل جمالاً من LU (بسبب الجذور التربيعية). كل من هذين التحليلين مهم لنظرية الجبر الخطي وهما، قطعاً، في مركز الحسابات.

الحالة العامة مشابهة تماماً ـ المصفوفة R من النوع $n \times n$ وعنصرها i,j هو $q_i^T a_j$. إنه يساوي الصفر عندما يكون i أكبر من j (q_i انشىء متعامداً مع a_j). لذا فان R مثلثية عليا تظهر عناصرها في القانون (٨)، بصورة خاصة، عندما يعوض a'_j بالكسر / $\|a'_j\| q_j$.

$$a_j = (q_1^T a_j)q_1 + \dots + (q_{j-1}^T a_j)q_{j-1} + \|a'_j\| q_j. \qquad (٩)$$

الطرف الأيمن هو جداء Q في R مكتوباً بشكل كامل.

٣ ش يمكن تفريق أي مصفوفة A، أعمدتها مستقلة خطياً، إلى $A=QR$. أعمدة Q متعامدة ـ نظامية و R مثلثية عليا قابلة للعكس. عندما يكون $m=n$ وكل المصفوفات مربعة، تصبح Qمصفوفة قائمة.

يجب علينا أن لاننسى النقطة الأساسية للتقويم. إنه يبسط مسألة المربعات الأصغرية $Ax=b$. تبقى المعادلة النظامية صحيحة، لكن A^TA الذي يسهل إيجاد معكوسها تصبح :

$$A^TA = R^TQ^TQR = R^TR.$$

لذا فإن المعادلة الأساسية $A^TA\bar{x} = A^Tb$ تبسط إلى الصورة :

$$R\bar{x} = Q^Tb \quad \text{أو} \quad R^TR\bar{x} = R^TQ^Tb \qquad (١٠)$$

عوضاً عن حل $QRx = b$ الذي لايمكن اجراؤه، نحل $R\bar{x} = Q^Tb$ الذي يمكن عمله بسرعة تامة ـ لأن R مثلثية. التكلفة الحقيقية هي mn^2 عملية لطريقة غرام ـ شميدت، وهي التي نحتاجها لايجاد Q و R في المرحلة الأولى.

تطبق فكرة التقويم نفسها على الدوال . الجيب وجيب التمام متعامدان ؛ القوى $1,x,x^2,...$ ليست كذلك . عندما تكتب دالة f كتركيب في جيب وجيب تمام نسمي ذلك ***متسلسلة فوريه*** ***Fourier Series*** . كل حد فيها مسقط على مستقيم ـ يحوي المستقيم في فضاء الدوال ، مضاعفات $cos\ nx$ أو $sin\ nx$. إنها موازية ، تماماً ، لحالة المتجهات ومن الأهمية نفسها بحيث تستحق النظر . وأخيراً ، لدينا عمل مع شميدت ؛ تقويم قوى x لانتاج كثيرة حدود لوجاندر *Legendre*

الفضاءات الدالية ومتسلسلات فوريه

هذا المقطع مختصر واختياري ، لكن له أهداف مهمة :

(١) ادخال فضاء المتجهات الشهير الذي له عدد غير منته من الأبعاد ؛

(٢) توسيع مفهوم الطول والجداء الداخلي من المتجهات v إلى الدوال $f(x)$؛

(٣) التعرف على متسلسلة فوريه للدالة f كمجموع مساقط عدد أبعاد كل منها يساوي الواحد ؛ الأعمدة المتعامدة التي تولد هذا الفضاء هي الجيوب وجيوب التمام .

(٤) تطبيق تقويم غرام ـ شميدت على كثيرات الحدود $1,x,x^2,...$ ؛

(٥) ايجاد أفضل تقريب لـ $f(x)$ بخط مستقيم .

سنحاول متابعة هذا المخطط الذي يفتح أمامنا سلسلة من التطبيقات الجديدة للجبر الخطي بطريق نظامي .

١ - بعد أن درسنا كل الفضاءات التي لها أعداد منتهية من الأبعاد $\boldsymbol{R}^n$، فمن الطبيعي أن نفكر بالفضاء $\boldsymbol{R}^\infty$ ـ الذي يحوي كل المتجهات $v = (v_1, v_2, v_3, ...)$ التي لها متتالية لانهائية من المركبات . إن هذا الفضاء متسع جداً ، بحيث لايمكن أن يكون مفيداً حقاً إن لم نوجد ضوابط لمركباته v_i . إن أفضل فكرة هنا هي المحافظة على تعريف الطول المعتاد وهو الجذر التربيعي لمجموع مربعات فيثاغورس ، وأن لايتضمن هذا الفضاء سوى المتجهات التي لها ***طول محدود*** : على المتسلسلات :

$$\|v\|^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \ldots \qquad (١١)$$

أن تتقارب نحو مجموع منته . وهذا يبقي ، مع ذلك ، مجموعة متجهات، عدد أبعادها مالانهاية ، تحوي مثلاً المتجه $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$ ولكنها لاتحوي المتجه $(1, 1, 1, \ldots)$. يمكن جمع أي متجهين محدودي الطول $(\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|)$ ، كما يمكن ضرب أي متجه بعدد ، لذا ، إنها تكون فضاء متجهات . إنه **فضاء هيلبرت** ***Hilbert*** الشهير .

فضاء هيلبرت هو الطريق الطبيعي لجعل عدد الأبعاد مالانهاية مع المحافظة في الوقت ذاته على هندسة الفضاء الإقليدي المعتاد . تصبح فيه القطوع الناقصة مجسمات ناقصة ذوات أبعاد عددها مالانهاية وتصبح القطوع المكافئة مجسمات مكافئة، وتعرف المستقيمات المتعامدة بالطريقة السابقة : يكون المتجهان u و v متعامدين عندما يكون جداؤهما الداخلي مساوياً الصفر :

$$v^T w = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 + \ldots = 0.$$

إن هذا المجموع مضمون التقارب وإن كل متجهين يحققان متراجحة شوارتز $|v^T w| \leq \|v\| \, \|w\|$. كذلك لايمكن لجيب التمام، في فضاء هيلبرت، أن يكون أكبر من الواحد .

هناك أمر آخر مهم يتعلق بهذا الفضاء : لقد ظهر هذا الفضاء بصورة غير صريحة في أبحاث متفرقة ومن الممكن أن تتحول متجهاته إلى دوال وهذا يحملنا إلى النقطة الثانية .

٢ - لنفرض أننا ننظر في الدالة $f(x) = \sin x$ في الفترة $0 \leq x \leq 2\pi$. إن f هذه تشبه متجهاً له مستمر من المركبات هي قيم $\sin x$ على طول الفترة كاملة . لإيجاد طول مثل هذا المتجه، من المستحيل تطبيق قاعدة الجمع المعتاد لمربعات المركبات . لقد استعيض عن التجميع *بالتكامل* وهو الطريقة الطبيعية والحتمية لذلك :

(١٢)
$$\|f\|^2 = \int_0^{2\pi} (f(x))^2\, dx = \int_0^{2\pi} (\sin x)^2\, dx = \pi.$$

لقد اصبح فضاء هيلبرت ***فضاء دوال*** ، متجهاته دوال ولدينا طريقة لقياس أطوالها . يحوي هذا الفضاء جميع الدوال التي لها طول منته كما هو في العلاقة (11) أعلاه . إنه لايحوي الدالة $F(x) = 1/x$ لأن تكامل $1/x^2$ مالانهاية .

الفكرة ذاتها التي استبدلت ، التكامل بالتجميع ، ***أوجدت الجداء الداخلي لدالتين :*** إذا كان $f(x) = \sin x$ و $g(x) = \cos x$ فإن :

(١٣)
$$(f,g) = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\, dx = \int_0^{2\pi} \sin x \cos x\, dx = 0.$$

إن ذلك مثل الجداء الداخلي لمتجهين $f^T g$. إنه يرتبط بالطول وفق العلاقة $(f,f) = \|f\|^2$ وتتحقق من جديد متراجحة شوارتز $|(f,g)| \le \|f\|\,\|g\|$. من الطبيعي أنه إذا كان الجداء الداخلي لدالتين مثل $\cos x$ و $\sin x$ مساوياً الصفر ، فانهما تدعيان متعامدتين وتصبحان ، أيضاً ، متعامدتين نظاميتين بعد تقسيمهما على طولهما المشترك $\sqrt{\pi}$.

(٣) ***متسلسلة فورية*** لدالة هي نشر وفق الجيوب وجيوب التمام :

$$y(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots .$$

لحساب معامل نموذجي مثل b_1 ، *نضرب* الطرفين بالدالة المقابلة $\sin x$ ثم *نكامل* من الصفر إلى 2π . بقول آخر نأخذ الجداء الداخلي للطرفين بـ $\sin x$:

$$\int_0^{2\pi} y(x) \sin x\, dx = a_0 \int_0^{2\pi} \sin x\, dx + a_1 \int_0^{2\pi} \cos x \sin x\, dx + b_1 \int_0^{2\pi} (\sin x)^2 dx + \dots .$$

كل تكامل ، في الطرف الأيمن ، يساوي الصفر سوى واحد منها وهو الذي يكون فيه $\sin x$ مضروباً بنفسه . *الجيوب جيوب التمام متعامدة فيما بينها* كما في

(١٣). لذا يكون b_1 مساوياً الطرف الأيسر مقسوماً على تكامل لايساوي الصفر :

$$b_1 = \frac{\int_0^{2\pi} y(x)\ \sin x\, dx}{\int_0^{2\pi} (\sin x)^2\ dx} = \frac{(y,\ \sin x)}{(\sin x,\ \sin x)}\ .$$

على معامل فوريه a_1 أن يحوي $\cos x$ عوضاً عن $\sin x$ وسيستخدم a_2 الدالة $\cos 2_x$.

النقطة الأساسية في هذا الحساب هي ادراك التوافق بين المساقط . وقد حسبت مركبة المتجه b على المستقيم المولد بـ a من قريب :

$$\bar{x} = \frac{b^{\mathrm{T}} a}{a^{\mathrm{T}} a}\ .$$

لقد اسقطنا ، في متسلسلة فوريه ، ***الدالة*** y على ***الدالة*** $\sin x$ فكانت مركبتها p على هذا الاتجاه ، هي بالضبط الحد $b_1 \sin x$ (كان في المتجهات $\bar{x}\, a$) . المعامل b_1 هو حل المربعات الأصغرية للمعادلة غير المتسقة $b_1 \sin x = y$ ؛ بقول آخر ، إن ذلك يجعل الدالة $b_1 \sin x$ قريبة بقدر الإمكان من y . ذلك صحيح لكل حد آخر من المتسلسلة ؛ كل حد منها يمثل مسقط y على جيب أو جيب تمام . لما كانت هذه الجيوب وجيوب التمام متعامدة ، *فان متسلسلة فوريه تعطي إحداثيات المتجه y على مجموعة غير منتهية من المحاور المتعامدة .*

٤- هناك كثير من الدوال المفيدة غير الجيوب وجيوب التمام والتي ليست دائماً متعامدة . أبسط ذلك كثيرات الحدود ، ومما يؤسف له ، أنه لاتوجد فترة تكون عليها الاحداثيات الثلاثة الأوائل ـ الدوال $1, x, x^2$ ـ متعامدة . (الجداء الداخلي لـ $1, x^2$ موجب دوماً لأنه تكامل x^2) . لذا ، القطع المكافىء الأشد قرباً من الدالة $y(x)$ ليس مجموع مساقطها على $1, x, x^2$. سنجد هنا حدوداً متزاوجة مشابهة تماماً لـ $(A^TA)^{-1}$ في حالة المصفوفة . وبالفعل ، فإن هذا التزاوج يعطى بواسطة مصفوفة هيلبرت سيئة الشروط . على الفترة $0 \le x \le 1$ ،

$$A^TA = \begin{bmatrix} (1,1) & (1,x) & (1,x^2) \\ (x,1) & (x,x) & (x,x^2) \\ (x^2,1) & (x^2,x) & (x^2,x^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int 1 & \int x & \int x^2 \\ \int x & \int x^2 & \int x^3 \\ \int x^2 & \int x^3 & \int x^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

لهذه المصفوفة معكوس ضخم لأن $1, x, x^2$ بعيدة من أن تكون متعامدة. اضف إلى ذلك أن هذا الوضع يصبح مستحيلاً بالنسبة لحاسوب حديث فيما لو أضفنا إلى ذلك بعض المحاور الأخرى. *من المستحيل عملياً، حل المعادلة النظامية* $A^TA\overline{x} = A^Tb$ *من أجل كثيرة الحدود الشديدة القرب من الدرجة العاشرة.*

زيادة في الدقة، نقول، إنه من المستحيل حل تلك المعادلة بواسطة الحذف الغاوسي؛ كل خطأ في التدوير سيتضخم باكثر من $(10)^{13}$. من ناحية أخرى، لايمكننا التخلي عن ذلك؛ لقد كان من الممكن التقريب بكثيرة حدود. الفكرة الصحيحة هي التحول إلى محاور متعامدة، وهذا يعني اجراء تقويم غرام شميدت: نبحث عن تراكيب متعامدة لـ $1, x, x^2$.

من الملائم العمل ضمن فترة متناظرة مثل $-1 \le x \le 1$ لأن ذلك يجعل كل قوة فردية لـ x متعامدة مع كل قوة زوجية لـ x:

$$(1, x) = \int_{-1}^{1} x\,dx = 0, \qquad (x, x^2) = \int_{-1}^{1} x^3\,dx = 0.$$

لذلك، يمكن لطريقة غرام ـ شميدت أن تبدأ بفرض $v_1 = 1$ و $v_2 = x$ محورين متعامدين أولين ويبقى علينا أن نصحح زاوية 1 مع x^2. بواسطة القانون (7)، نجد كثيرة الحدود الثالثة المتعامدة مع السابقتين:

$$v_3 = x^2 - \frac{(1, x^2)}{(1, 1)}\,1 - \frac{(x, x^2)}{(x, x)}\,x = x^2 - \frac{\int_{-1}^{1} x^2\,dx}{\int_{-1}^{1} 1\,dx} = x^2 - \frac{1}{3}.$$

كثيرة الحدود التي كوناها بهذه الطريقة هي **كثيرة حدود لوجاندر** *Legendre* وهي متعامدة مع كل واحدة أخرى على الفترة $-1 \le x \le 1$.

تحقيق

$$(1,\ x^2 - \tfrac{1}{3}) = \int_{-1}^{1} (x^2 - \tfrac{1}{3})\ dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x}{3}\right]_{-1}^{1} = 0.$$

تصبح الآن كثيرة الحدود ذات الدرجة العاشرة ، الأشد قرباً ، قابلة للحساب دون كارثة ، بالاسقاط على كل من كثيرات حدود لوجاندر العشر (أو الإحدى عشرة) الأول .

٥- نفرض أننا نريد تقريب $y = x^5$ بواسطة مستقيم $C + Dx$ بين $x = 0$ و $x = 1$. هناك على الأقل ، ثلاث طرائق لايجاد المستقيم المفضل وإذا قارنتها يصبح الفصل بكامله واضحاً!

(١) لنحل $[1\ x]\begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = x^5$ بالمربعات الاصغرية . المعادلة $A^TA\bar{x} = A^Tb$ هي :

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{7} \end{bmatrix} \quad \text{أو} \quad \begin{bmatrix} (1,\ 1) & (1,\ x) \\ (x,\ 1) & (x,\ x) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1,\ x^5) \\ (x,\ x^5) \end{bmatrix}$$

(٢) لنبحث عن النهاية الصغرى لـ

$$E^2 = \int_0^1 (x^5 - C - Dx)^2\ dx = \tfrac{1}{11} - \tfrac{2}{6}C - \tfrac{2}{7}D + C^2 + CD + \tfrac{1}{3}D^2.$$

تظهر المشتقتان بالنسبة لـ C و D، بعد القسمة على (٢) ، المعادلة النظامية للطريقة (١) :

$$-\tfrac{1}{6} + C + \tfrac{1}{2}D = 0 \quad \text{و} \quad -\tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{2}C + \tfrac{1}{3}D = 0.$$

(٣) نطبق طريقة غرام ـ شميدت لاستبدال $x - (1, x)/(1,1)$ بـ x . إن $x - \frac{1}{2}$ متعامد

مع (١). تعطي الآن المساقط التي لها بعد واحد، أفضل مستقيم :

$$C + Dx = \frac{(x^5, 1)}{(1, 1)}\, 1 + \frac{(x^5, x - \frac{1}{2})}{(x - \frac{1}{2}, x - \frac{1}{2})}\, (x - \tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{6} + \tfrac{5}{7}\, (x - \tfrac{1}{2}).$$

تمارين

٣-٤-١ (أ) اكتب المعادلات الأربعة لكي يتلاءم المستقيم $y = C + Dt$ مع المعطيات :

$t = -1$ عند $y = -3$ $t = -2$ عند $y = -4$

$t = 2$ عند $y = 0$ $t = 1$ عند $y = -1$

بين أن الأعمدة متعامدة .

(ب) أوجد المستقيم المفضل و ارسم شكلاً واكتب الخطأ E^2 .

(جـ) فسر كون الخطأ مساوياً الصفر في النظام الاصلي ذي المعادلات الأربع بمجهولين . أين يقع الطرف الأيمن b بالنسبة لفضاء الأعمدة، ماهو مسقطه p؟

٣-٤-٢ اسقط $b = (0,3,0)$ على كل من المتجهين النظاميين، $a_1^T = (2/3, 2/3, -1/3)$, $a_2^T = (-1/3, 2/3, 2/3)$ ثم أوجد مسقطه p على مستوي a_1, a_2 .

٣-٤-٣ أوجد ، أيضاً ، مسقط $b^T = (0,3,0)$ على $a_3^T = (2/3, -1/3, 2/3)$ ثم اجمع المساقط الثلاثة الأحادية البعد وفسر الناتج . لماذا تساوي $a_1 a_1^T + a_2 a_2^T + a_3 a_3^T$ مصفوفة الوحدة ؟

٣-٤-٤ إذا كانت Q_1, Q_2 مصفوفتين قائمتين فهما تحققان $Q^T Q = I$. برهن أن $Q_1 Q_2$ مصفوفة قائمة ، أيضاً . إذا كانت Q_1 دوراناً بزاوية θ و Q_2 دوراناً

بزاوية φفماذا تمثل Q_1Q_2 ؟ هـل يمكنـك أن تجـد المطابقتـين المثلثيتـين المتعلقتـين بـ $(\theta+\varphi)$ cos و $(\theta+\varphi)$ sin من خلال الجداء Q_1Q_2 ؟

٣-٤-٥ إذا كان u متجه وحدة، برهن أن $Q = I - 2uu^T$ مصفوفة قائمة (يعرف ذلك باسم تحويل هاوسهولدر *Householder*) احسب Q بصورة صريحة عندما يكون $u^T = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

٣-٤-٦ أوجد عموداً ثالثاً للمصفوفة التالية :

$$Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{14} & \\ 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{14} & \\ 1/\sqrt{3} & -3/\sqrt{14} & \end{bmatrix}$$

لتصبح مصفوفة قائمة. من الواجب أن يكون هذا العمود متجه وحدة متعامداً مع العمودين الآخرين؛ ماهي الاختيارات في ذلك. برهن أن الأسطر تصبح بصورة آلية متعامدة نظامية.

٣-٤-٧ برهن بتشكيل b^Tb مباشرة، أن قانون فيثاغورس صحيح لكل تركيب $b = x_1q_1 + \ldots x_nq_n$ في متجهات متعامدة نظامية : $\|b\|^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2$. في التعبير المصفوفي، سيكون $b = Qx$ وهذا مايعطي برهاناً جديداً لحقيقة حفظ الأطوال : $\|Qx\|^2 = \|x\|^2$.

٣-٤-٨ اسقط المتجه $b = (1,2)$ على المتجهين غير المتعامدين $a_1 = (1,0)$ و $a_2 = (1,1)$. برهن، خلافاً للحالة المتعامدة، أن مجموع المسقطين اللذين لهما بعد واحد، لايساوي b.

٣-٤-٩ إذا كانت المتجهات q_1, q_2, q_3 متعامدة ـ نظامية ماهو تركيب q_1 و q_2 الأكثر قرباً من q_3 ؟

٣-٤-١٠ إذا كان q_1, q_2 متعامدين ـ نظاميين، فماهو تركيبهما الأكثر قرباً من b ؟ حقق كون متجه الخطأ متعامد مع q_1 و q_2.

٣-٤-١١ برهن أن مصفوفة قائمة ومثلثية عليا يجب أن تكون قطرية.

٣-٤-١٢ ماهو مضاعف $a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ الذي يجب طرحه من $a_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ ليكون الناتج عموداً على a_1؟ حلل $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ وفق QR حيث أعمدة Q متجهات متعامدة ـ نظامية.

٣-٤-١٣ طبق طريقة غرام ـ شميدت على :

$$a = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

واكتب الناتج على الصورة $A = QR$

٣-٤-١٤ نفرض أننا اعطينا المتجهات :

$$a = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

أوجد المتجهات المتعامدة النظامية q_1,q_2,q_3.

٣-٤-١٥ أوجد مجموعة متعامدة ـ نظامية q_1,q_2,q_3 بحيث يولد المتجهان q_1,q_2 فضاء أعمدة المصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

ماهو الفضاء الجزئي الأساسي الذي يحوي q_3؛ ماهو حل المربعات الأصغرية لـ $Ax=b$ حيث $b = [\begin{matrix} 1 & 2 & 7 \end{matrix}]^T$ ؟

٣-٤-١٦ اكتب تقويم غرام ـ شميدت لـ :

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

بالصورة $A=QR$. إذا أعطيت n متجهاً a_i لكل منها m مركبة ، ماهو نوع كل من المصفوفات A,Q,R .

٣-٤-١٧ بمصفوفة التمرين السابق A نفسها و $b=[\ 1\ \ 1\ \ 1\ ]^T$ ، استخدم $A=QR$ لحل مسألة المربعات الأصغرية $Ax=b$.

٣-٤-١٨ إذا كان $A=QR$ ، أوجد قانوناً بسيطاً لمصفوفة الإسقاط P على فضاء أعمدة A .

٣-٤-١٩ برهن أن خطوات *غرام ـ شميدت المطورة* :

$$c' = c'' - (q_2^T c'')q_2 \quad \text{و} \quad c'' = c - (q_1^T c)\, q_1$$

تنتج المتجه c' كما في (7) . إن ذلك أكثر ثباتاً من طرح مسقط واحد في كل مرة .

٣-٤-٢٠ أوجد طول المتجه $v=(1/\sqrt{2}\ ,1/\sqrt{4}\ ,1/\sqrt{8}\ ,....)$ وطول الدالة $f(x)=e^x$ (على الفترة $0\le x\le 1$) . ماهو الجداء الداخلي على هذه الفترة للدالتين e^{-x} و e^x؟

٣-٤-٢١ ماهي الدالة $a\cos x + b\sin x$ الأكثر قرباً من الدالة $p(x)=\sin 2x$ على الفترة $(-\pi,+\pi)$. ماهو المستقيم $c+dx$ الأكثر قرباً .

٣-٤-٢٢ بوضع المشتقة مساوية الصفر ، أوجد قيمة b_1 التي تجعل مايلي أصغرياً :

$$\left\| b_1 \sin x - y \right\|^2 = \int_0^{2\pi} (b_1 \sin x - y(x))^2\, dx.$$

قارن ذلك مع معامل متسلسلة فوريه b_1 . إذا كان $y(x)=\cos x$ فما هي b_1؟

٣-٤-٢٣ أوجد معاملات فوريه a_0,a_1,b_1 للدالة المدرجة التي تساوي الواحد على الفترة $0\le x\le\pi$ والصفر على بقية الفترة $\pi<x<2\pi$:

$$a_0 = \frac{(y,\ 1)}{(1,\ 1)}, \quad a_1 = \frac{(y,\ \cos x)}{(\cos x,\ \cos x)}, \quad b_1 = \frac{(y,\ \sin x)}{(\sin x,\ \sin x)}.$$

٣-٤-٢٤ أوجد كثيرة حدود لوجاندر التالية ـ رباعي حدود متعامد مع $1, x, x^2-\frac{1}{3}$ على الفترة $-1 \le x \le 1$.

٣-٤-٢٥ ماهو المستقيم الأشد قرباً من القطع المكافىء $y = x^2$ على الفترة $-1 \le x \le 1$.

٣-٤-٢٦ في قانون غرام ـ شميدت (٧) تحقق من أن c' متعامد مع q_1 و q_2.

٣-٤-٢٧ أوجد أساساً متعامداً ـ نظامياً للفضاء الجزئي المولد بالمتجهات $a_1=(1,-1,0,0)$ ، $a_2=(0,1,-1,0)$ ، $a_3=(0,0,1,-1)$.

٣-٤-٢٨ طبق طريقة غرام ـ شميدت على المتجهات $(1,0,-1),(0,1,-1),(1,-1,0)$ وذلك لإيجاد أساس متعامد نظامي للمستوي $x_1+x_2+x_3=0$. ماهو عدد أبعاد هذا الفضاء الجزئي، وماهو عدد المتجهات غير الصفرية التي تظهر بعد تطبيق طريقة غرام ـ شميدت.

٣-٥ تحويل فوريه السريع

في نهاية البند السابق ذكرنا متسلسلة فوريه. لقد كانت جبراً خطياً في فضاء ذي مالانهاية من الأبعاد. كانت "المتجهات" دوالاً $f(x)$؛ ولقد اسقطت على الجيوب وجيوب التمام، فانتج ذلك معاملات فوريه، من هذه المتتالية اللانهائية من الجيوب وجيوب التمام مضروبة بمعاملات فوريه، تمكنا من تكوين $f(x)$ من جديد. هذه هي الحالة التقليدية التي حلم بها فوريه. إلاأنه في الحسابات الحالية، سيكون التحويل الذي سنحسبه ***هو تحويل فوريه المتقطع***. لايزال فوريه حياً ولكن بعدد منته من الأبعاد.

النظرية جبر خطي صرف قائمة على التعامد. الداخل متتالية أعداد $y_0,\ldots,y_{n-1}$، عوضاً عن الدوال. الخارج متتالية أخرى من الطول ذاته ـ مجموعة مكونة من معاملات فوريه $c_0,\ldots,c_{n-1}$ التي عددها n، عوضاً عن متتالية لانهائية. العلاقة بين y و c خطية، لذا، يجب تقديمها بمصفوفة. إنها ***مصفوفة فوريه*** F، تعتمد عليها تقنية طريقة الاشارات العددية كاملة. تحول الاشارات إلى أرقام، سواء أتت من حديث أو صورة أو موجة صوتية أو اتصال سلكي (أو حتى عن البحث عن البترول). يمكن تحويلها بالمصفوفة

F ، وبعد ذلك يمكن اعادتها ـ لتنشىء ، من جديد ، الصورة الأصلية . إضافة إلى كون هذين التحولين حاسمين فانه يمكن اجراءهما بسرعة :

(١) يجب أن تكون المصفوفة العكسية F^{-1} بسيطة .

(٢) يجب أن يكون الضرب بـ F أو بـ F^{-1} سريعاً .

هذان الشرطان صحيحان . لقد عرفت المصفوفة F^{-1} منذ سنوات وتبدو مشابهة تماماً لـ F . في الحقيقة ، F متناظرة وقائمة (بإهمال عامل $\sqrt{n}$) ، ولها نقيصة واحدة هي كون عناصرها ***أعداداً مركبة*** . يخفف هذه الصعوبات كون جميع عناصر F و F^{-1} قوى عدد فريد w . عوضاً عن عرض كامل للأعداد المركبة ، سنكتفي بدراسة المعادلة المتميزة $w^n=1$ ـ التي تحوي جيوباً وجيوب تمام ودوال أسية وتقع في صميم تحليل فوريه المنقطع .

يلاحظ أنه من السهل عكس F . لو كان ذلك كل شيء (لقد كان كل شيء حتى ١٩٦٥) فإن التحويل المنقطع سيأخذ مكانة مهمة . يوجد الآن ماهو أكثر من ذلك . يمكن إجراء الضرب في F أو في F^{-1} بسرعة كبيرة وطريقة ذات مهارة شديدة . عوضاً عن n^2 من عمليات الضرب المنفصلة الناتجة عن عناصر المصفوفة التي عددها n^2 ، فإن جداء مصفوفة بمتجه مثل $F^{-1}y$ يحتاج ، فقط ، إلى $\frac{1}{2}n\log n$ خطوة . إنها عمليات الضرب ذاتها ولكنها مرتبة بطريقة جيدة . تدعى اعادة الترتيب هذه ، ***تحويل فوريه السريع .***

يبدأ البند بالعدد w وخواصه ويتحرك نحو F^{-1} وينتهي بـ FFT – التحويل السريع وتطبيقاته ، *the fast transform and its applications* . يدعى التطبيق الضخم لذلك *إلتفافاً* وأساس نجاحه هو *قاعدة الإلتفاف* .

الجذور المركبة للوحدة

يمكن أن يكون لمعادلة حقيقية جذور مركبة . لقد أدت المعادلة $x^2+1=0$ إلى ابتكار i (و إلى $-i$ أيضاً) . ولقد اعتبر ذلك حلاً وانتهت المسألة . إذا تساءل أحدهم حول

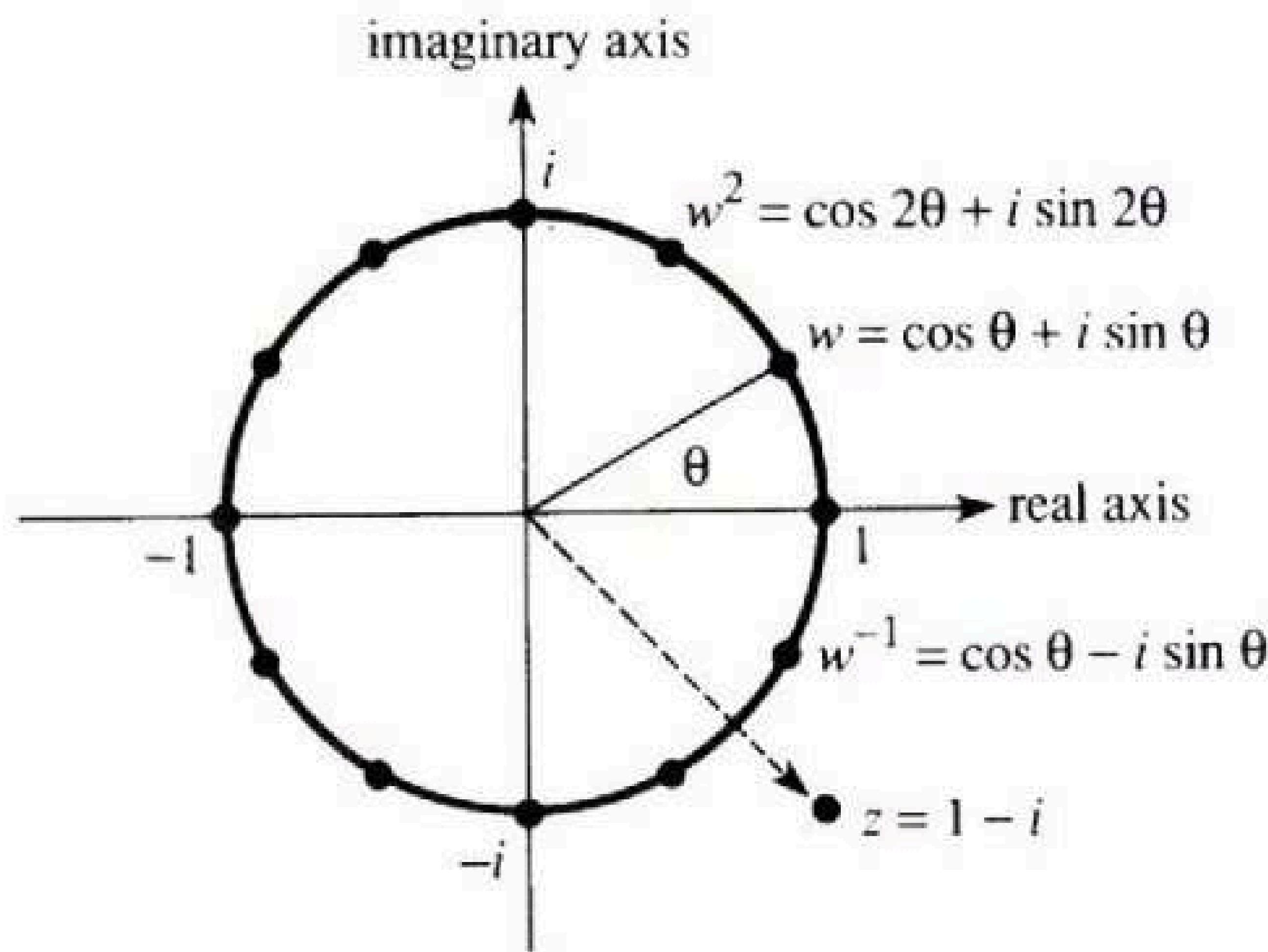
$x^2-i=0$ لقد وجد جواباً لذلك : إن الجذور التربيعية لعدد مركب هي ، أيضاً ، أعداد مركبة . عليك أن تسلم بالتركيب $x+iy$ ، حيث x الجزء الحقيقي و y الجزء التخيلي وليس هناك ضرورة لابتكار إضافي . لكل كثيرة حدود من الدرجة n مجموعة كاملة من n جذراً (من الممكن أن تكون مركبة ومن الممكن أن تكون مكررة) . هذه هي النظرية الأساسية في الجبر ، وكلمة مركبة تسمح باحتمال كون الجزء التخيلي $y=0$ ويصبح عندئذ العدد حقيقياً .

لنهتم الآن بالمعادلة $x^4=1$. من الضروري أن يكون لها أربعة جذور ـ يجب أن يوجد أربعة جذور ، «***الجذر الرابع للوحدة***» . الجذران التربيعيان للواحد هما 1 و 1- . الجذور الأربعة هي الجذور التربيعية لهذه الجذور التربيعية ، إنها 1 و 1- و i و $-i$. العدد i يحقق $i^4=1$ لأنه يحقق $i^2=-1$. بالنسبة للجذور الثمانية للوحدة ، نحتاج إلى الجذر التربيعي للعدد i وهذا يقودنا إلى العدد المركب $w=(1+i)/\sqrt{2}$. تربيع w يعطي $(1+2i+i^2)/2$ وهذا هو i نفسه لأن $1+i^2$ يساوي الصفر . وبما أن المربع هو $w^2=i$ ، لذا تكون القوة الثامنة $w^8=i^4=1$.

الأعداد المركبة في مصفوفة فوريه خاصة تماماً . الأجزاء الحقيقية منها هي جيوب تمام والأجزاء التخيلية منها هي جيوب :

$$w=\cos\theta+i\sin\theta \qquad (١)$$

لنفرض أن الجزء الحقيقي x قد حمل على محور x وحمل الجزء التخيلي على محور y (شكل ٣-١٢) . لذا ، فان العدد w يقع على ***دائرة الوحدة*** ؛ بعده عن نقطة الأصل هو $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$. يصنع زاوية قدرها θ مع المحور الأفقي . يدعى المستوي الذي يقع فيه الشكل ***المستوي المركب*** ، ولكل عدد مركب من الشكل $z=x+iy$ موضع في هذا المستوي . يظهر المستوي كاملاً في الفصل الخامس ، حيث تظهر الأعداد المركبة كقيم ذاتية (حتى للمصفوفات الحقيقية) . نحتاج هنا إلى نقاط خاصة ، فقط ، (w) ، تقع جميعها على دائرة الوحدة بسبب كونها تحل المعادلة $w^n=1$.



شكل (٣-١٢) . المستوي المركب ودائرة الوحدة .

كيـف يمكننـــا حساب القـــوة النونيـــة لـ w؟ حتمـــاً ، يمكـــن إيجـــاد التربيع مباشــــــرة :

$$w^2 = (\cos\theta + i\ \sin\ \theta)^2 = \cos^2\theta - \sin^2\theta + 2i\ \sin\ \theta i\ \cos\theta .$$

يبدو ذلك سيئاً إلى أن يوضح بالقانون المثلثي المتعلق بضعفي الزاوية . الجزء الحقيقي $\cos^2\theta - \sin^2\theta$ يســاوي $\cos 2\theta$ و الجزء التخيلي $2\sin\theta\cos\theta$ ، يساوي $\sin 2\theta$ (لاحـظ أن i لـم يدخـل ؛ الجـزء التخيـلي عـدد حقيـقي) . لــذا ، يكـون

$w^2 = \cos\ 2\theta + i\sin 2\theta$. بقي مربع w على دائرة الوحدة ، لكنه ***بضعفي الزاوية*** 2θ . يحدث ذلك توقعاً بأن للعدد w^n الزاوية $n\theta$، وهذا صحيح .

هناك طريق أفضل لإيجاد قوى w . تركيب جيب التمام مع الجيب هو قوة مركبة سعتها الواحد وزاويتها θ :

$$\boxed{\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}} \qquad (٢)$$

قاعدة ضرب وتقسيم القوى مثل $(e^2)(e^3) = e^5$ أو $e^2/e^3 = e^{-1}$ ، تبقى صحيحة عندما يكون الأس تخيلياً ، لذا ، فان قوى $w = e^{i\theta}$ هي ، تماماً ، كما سبق :

(٣)
$$w^2 = e^{i2\theta}, w^n = e^{in\theta}, \frac{1}{w} = e^{-i\theta}$$

للقـوة n الزاويـة $n\theta$. عندمـا يكـون $n=-1$ **فإن للمعكوس** $1/w$ **الزاوية** θ- . إذا ضربنا $\cos\theta + i\sin\theta$ بـ $\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$ فـإن النـاتج سيكـون 1 . لما كـــان $\cos\theta$ يســاوي $\cos(-\theta)$ (جيب التمام زوجي) و $\sin(-\theta)$ يساوي $-\sin\theta$ (الجيب فردي)، فان هذا الضرب يعطي :

$$e^{i\theta} e^{-\theta} = (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta - i\sin\theta) = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1.$$

ملاحظة أذكر ذلك اليوم حين ورد إلى *MIT* رسالة من مسجون في نيويورك يسأل هل قانون أيولر (٢) صحيح . إنه حقاً مذهل عندما تفكر فيه ، حيث ثلاثة من الدوال الأساسية في الرياضيات تلتقي معاً من هذا الطريق الجميل . أفضل جواب لنا هو أن ننظر في متسلسلة القوى :

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \dots .$$

الجزء الحقيقي $1-\theta^2/2+\dots$ هو جيب التمام . الجزء التخيلي $\theta-\theta^3/6+\dots$ هو الجيب . القانون صحيح وأتمنى أن نكون قد ارسلنا البرهان الأكثر جمالاً .

بهذا القانون ، يمكن حل المعادلة $w^n=1$. إنها تصبح من الشكل $e^{in\theta}=1$ ، لذا ، فإن هذه الزاوية $n\theta$ ستنقلنا حول دائرة الوحدة ، وتعود بنا ثانية إلى نقطة الانطلاق . الحل هو أن نختار $\theta=2\pi/n$: *الجذر النوني الاصلي* هو :

(٤)
$$w_n = e^{2\pi i/n} = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n} .$$

القوة النونية هي $e^{2\pi i}$ وهي تساوي الواحد . في حالة $n=4$ و $n=8$ ، الجذران الأصليان هما :

$$w_4 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$$
$$w_8 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

للجذر الرابع الزاوية $\theta = 90^o$ وللجذر الثامن الزاوية $\theta = 45^o$. إنهما $\frac{1}{4}(360^o)$ و $\frac{1}{8}(360^o)$ ، إلا أنهما ليسا الجذرين الوحيدين من الدرجة الرابعة والدرجة الثامنة للوحدة . بقية الجذور من الدرجة الرابعة هي القوى $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$. بقية الجذور من الدرجة الثامنة هي القوى $w_8^2, w_8^3, ..., w_8^8$. هذه الجذور موزعة ، أيضاً ، على دائرة الوحدة بفواصل قدرها $2\pi/n$. هناك ملاحظة أخرى هي أن مربع w_8 هو w_4 الأمر الذي سيكون أساسياً في تحويل فوريه السريع . لاحظ ، أيضاً ، أن **مجموع *الجذور يساوي الصفر*** . بالنسبة لـ $w_4 = i$ ، ذلك صحيح $1+i-1-i=0$ وبالنسبة لـ w_8 هو :

$$1 + w_8 + w_8^2 + ... + w_8^7 = 0. \qquad (٥)$$

أحد البراهين ضرب الطرف الأيسر بـ w_8 الذي لايغير فيه شيئاً . (يصبح $w_8 + w_8^2 + w_8^3 + ... + w_8^8$ ولكن $w_8^8 = 1$. كل نقطة من النقاط الثمانية قد دارت زاوية قدرها 45^o ولكنها بقيت ضمن النقاط الثماني التي كانت فيها . لأن الصفر هو العدد الوحيد الذي لايتغير عندما يضرب بـ w_8 ، لذا فانه يجب أن يكون المجموع صفراً (١) .

مصفوفة فوريه وعكسها

في الحالة المتصلة ، يمكن لمتسلسلة فوريه أن تعيد تكوين $f(x)$ على فترة كاملة . وهي تستخدم عدداً غير منته من الجيوب وجيوب التمام (أو دوال أسية) . في الحالة المنقطعة ، بـ n من المعاملات فقط ، يكون ذلك كافياً من أجل التوقع . نطلب ، فقط ، *المساواة عند* n من النقاط الأمر الذي يعطي n معادلة . في مسألة نموذجية بـ $n = 4$ المعادلات التي توجد ثانية القيم الأربع 2,4,6,8 هي :

---

(١) في هذه الحالة $w^5=-w$, $w^6=-w^2$, $w^7=-w^8$, $w^8=-w^4$. عندما يكون n شفعاً فان الجذور تأتي متزاوجة . ش مجموع الجذور التكعيبية الثلاثة للوحدة يساوي الصفر أيضاً دون اختصار بين الأزواج .

(٦)
$$\begin{aligned} c_0 + c_1 + c_2 + c_3 &= 2 \\ c_0 + ic_1 - c_2 - ic_3 &= 4 \\ c_0 - c_1 + c_2 - c_3 &= 6 \\ c_0 - ic_1 - c_2 + ic_3 &= 8. \end{aligned}$$

المتتالية الداخلة هي 2,4,6,8 . المتتالية الخارجة c_0, c_1, c_2, c_3 . تبحث المعادلات عن الحدود الأربعة لمتسلسلة فورية المتلائمة مع الداخل في النقاط الموزعة بالتساوي على الفترة من 0 إلى 2π :

$$c_0 + c_1 e^{ix} + c_2 e^{2ix} + c_3 e^{3ix} = \begin{cases} 2 , & x = 0 \quad \text{عند} \\ 4 , & x = \pi/2 \quad \text{عند} \\ 6 , & x = \pi \quad \text{عند} \\ 8 , & x = 3\pi/2. \quad \text{عند} \end{cases}$$

تلك هي المعادلات الواردة في (٦) . عند $x = 2\pi$ تعود المتسلسلة إلى القيمة الأولى $y_0=2$ وتتابع بصورة دورية .

لاحظ أن متسلسلة فوريه تكتب بالشكل المركب ، كتركيب في دوال أسية من الشكل e^{ikx} ، وذلك مفضل على الجيب وجيب التمام . الأمران متكافئان بسبب التكافؤ :

(٧)
$$c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx} = a_k \cos kx + b_k \sin kx .$$

من الممكن البقاء مع المتسلسلة الحقيقية ، إلا أنه عندما تتوقف بعد أربعة حدود ، نحتاج عندئذ عناية خاصة ويصبح القانون غير رائع . القرار المفضل هو استخدام الصورة المركبّة وحل المعادلات (٥) لإيجاد المعاملات c_0,c_1,c_2,c_3 .

ليس من الصعب إيجاد ذلك . إذا جمعنا هذه المعادلات الأربع ، يحصل اختصار ضخم في الطرف الأيسر . الناتج هو $4c_0 = 20$ لذا ، فإن c_0 هو 5 وهو متوسط المعطيات 2,4,6,8 .

هناك طريقة ، أيضاً ، لايجاد c_1 . اضرب المعادلات على الترتيب بالأعداد

$1,-i,-1,i$ ثم اجمع النتائج . كل شيء يختصر في الطرف الأيسر سوى $4c_1$ الذي يساوي $2-4i-6+8i$. لذا، فان $c_1=-1+i$. (لاحظ أنه مركب) . هناك طريقة مشابهة لحساب c_2 و c_3 .

يتوضح النموذج بالمعادلات ذوات الشكل المصفوفي . نكتب المعادلات الأربع بالصورة $Fc=y$ والمصفوفة هي :

$$F=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & i^2 & i^3 \\ 1 & i^2 & i^4 & i^6 \\ 1 & i^3 & i^6 & i^9 \end{bmatrix}.$$

هذه العناصر الستة عشر هي نفسها المعاملات في (6) . عوضاً عن i^9 ، كتبنا سابقاً i و i^6 يساوي 1- و i^3 هو $-i$. في الشكل الحاضر سيكون من السهل التعرف على F^{-1} بمعزل عن العامل $\frac{1}{4}$ ، لمعكوس المصفوفة الشكل ذاته !

$$F^{-1}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & (-i) & (-i)^2 & (-i)^3 \\ 1 & (-i)^2 & (-i)^4 & (-i)^6 \\ 1 & (-i)^3 & (-i)^6 & (-i)^9 \end{bmatrix}.$$

ضرب مباشر يعطي $FF^{-1}=I$. مثلاً، جداء السطر الثاني من F بالعمود الثاني من F^{-1} هو $\frac{1}{4}(1+1+1+1)$. نجد بقية العناصر القطريةالتي يساوي كل منها الواحد بالطريقة ذاتها . بالنسبة للعناصر غير القطرية، ضرب نموذجي يعطينا $1+i+i^2+i^3=0$. (تذكر أن مجموع الجذور الأربعة يساوي الصفر) . بالنسبة للسطر الأخير من $c=F^{-1}y$ ، نلاحظ، أيضاً، أن c_0 هو متوسط القيم الأربع، $c_0=\frac{1}{4}(y_0+y_1+y_2+y_3)$.

ملاحظة بالنسبة لمصفوفة فوريه، من الطبيعي أن نرقم الأسطر والأعمدة من 0 إلى n - 1 بدلاً من 1 إلى n .

النموذج الذي وجدناه أعلاه، ليس خاصاً بـ $n=4$. لكل n ، يمكن كتابة المصفوفة

التي تربط y بـ c وإيجاد معكوسها . إنها تمثل n معادلة كل واحدة منها تتطلب متسلسلة منتهية ....+$c_0+c_1e^{ix}$ (***n حداً***) لكي تتوافق مع y (***في n نقطة***) .

التوافق الأول هو عند $x = 0$:

$$c_0 + c_1 + \ldots + c_{n-1} = y_0.$$

النقطة التالية عند $x = 2\pi/n$ ، التي تدخل العدد $w = e^{2\pi i/n}$:

$$c_0 + c_1 w + \ldots + c_{n-1} w^{n-1} = y_1.$$

النقطة الثالثة عند $x = 4\pi/in$ تشمل على $e^{4\pi i/n}$ الذي هو w^2 :

$$c_0 + c_1 w^2 + \ldots + c_{n-1} w^{2(n-1)} = y_2.$$

تقدم بقية النقاط قوى عالية من w والمسألة كاملة هي :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdot & 1 \\ 1 & w & w^2 & \cdot & w^{n-1} \\ 1 & w^2 & w^4 & \cdot & w^{2(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & w^{n-1} & w^{2(n-1)} & \cdot & w^{(n-1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ c_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ y_{n-1} \end{bmatrix}. \qquad (٨)$$

هنا تبدو مصفوفة فوريه F .

في حالة $n = 4$ ، يكون الجذر w هو i ، الجذر من الدرجة 4 للوحدة . بصورة عامة ، w هو $e^{2\pi i/n}$ وهو الجذر n الأصلي للوحدة . العنصر الواقع في السطر j والعمود k من F هو قوة لـ w :

$$\boxed{F_{jk} = w^{jk}.}$$

عند السطر الأول يكون $j = 0$ وعند العمود الأول يكون $k = 0$ ، وتكون جميع عناصره

$$w^0 = 1 .$$

لإيجاد الأعداد c ، نحتاج إلى عكس F . في الحالة 4×4 ، يحوي المعكوس

قوى i-؛ بقول آخر F^{-1} قد بنيت انطلاقاً من $1/i$. تلك هي القاعدة العامة، ليصدر F^{-1} عن العدد المركب w^{-1}، فإنه يصنع زاوية قدرها $-2\pi/n$ عندما يصنع w زاوية قدرها $+2\pi/n$:

٣ ت تبنى المصفوفة المعكوسةمن النوع $n\times n$ انطلاقاً من $w^{-1}=1/w$:

$$F^{-1}=\frac{1}{n}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & \cdot & 1\\ 1 & w^{-1} & w^{-2} & \cdot & w^{-(n-1)}\\ 1 & w^{-2} & w^{-4} & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 1 & w^{-(n-1)} & w^{-2(n-1)} & \cdot & w^{-(n-1)^2}\end{bmatrix}. \qquad (٩)$$

في حالة $n=2$ و $n=3$، يعني ذلك أن :

$$F^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix} \quad \text{لها} \quad F=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$F^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & e^{-2\pi i/3} & e^{-4\pi i/3}\\ 1 & e^{-4\pi i/3} & e^{-8\pi i/3}\end{bmatrix} \quad \text{لها} \quad F=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & e^{2\pi i/3} & e^{4\pi i/3}\\ 1 & e^{4\pi i/3} & e^{8\pi i/3}\end{bmatrix}$$

نحتاج إلى التحقق من أن FF^{-1} يساوي مصفوفة الوحدة.

تعد الأمور على القطر الأساسي واضحة. جداء السطر j من F بالعمود j من F^{-1} هو $1/n\ (1+1+....+1)$ وهذا يساوي الواحد. الجزء الأكثر صعوبة هو مايقع خارج القطر وذلك لبيان أن جداء السطر jمن F بالعمود k من F^{-1} يساوي الصفر :

$$1\,.\,1+w^{j}w^{-k}+w^{2j}w^{-2k}+\ldots+w^{(n-1)j}w^{-(n-1)k}=0 \quad \text{إذا كان} \quad j\neq k \qquad (١٠)$$

مفتاح ذلك هو أن نلاحظ أن هذه الحدود هي قوى الجذر الأصلي $W=w^{j}w^{-k}$:

$$\boxed{1+W+W^{2}+\ldots+W^{n-1}=0.} \qquad (١١)$$

العدد W يبقى واحداً من جذور الوحدة : $W^{n}=w^{nj}w^{-nk}$ يساوي $1^{j}1^{-k}=1$. بما أن j مختلف عن k، فان W مختلف عن الواحد. إنه واحد من بقية الجذور الواقعة على

دائرة الوحدة بأبعاد متساوية فيما بينها . جميع هذه الجذور تحقق $1+W+...+W^{n-1}=$.
0الطريقة مطابقة تماماً لما في (٥) أعلاه : الضرب بـW لايغير الطرف الأيسر (لأن W^n الواقعة في النهاية اليمنى تساوي 1 كما كان في النهاية اليسرى) . لم يتغير هذا المجموع عندما ضربنا بـW . لذا ، فان عليه أن يساوي الصفر .

ملاحظة إليك برهاناً آخر مباشراً انطلاقاً من المتطابقة :

$$1 - W^n = (1 - W)(1 + W + W^2 + \ldots + W^{n-1}). \quad (١٢)$$

لما كان $W^n = 1$ ، فان الطرف الأيسر يساوي الصفر . لكن W لاتساوي 1 ، لذا ، فإن العامل الأخير يساوي الصفر . ***أعمدة F متعامدة ـ نظامية*** . باستثناء أخذ الأعداد المرافقة ($w^{jk} \longrightarrow w^{-jk}$) والقسمة على n، فان منقول F هو F^{-1} .

تحويل فوريه السريع

تحليل فوريه نظرية رائعة ، إلا أن مايجعله مهماً كونه أيضاً عملياً جداً . وأفضل طريقة لتحليل شكل موجي إلى مركباته هو تفكيكه ، والطريقة العكسية كفيلة بإعادته إلى أصله . الدالة الأسية مميزة بالنسبة للفيزياء والرياضيات ويمكننا أن نبرهن ذلك ، بدقة ، بسبب جوهري : ***إذا اشتققت e^{ikx} أو كاملتها أو نقلت x إلى $x+h$ فإن الناتج هو ، أيضاً ، مضاعف لـ e^{ikx}*** . الدالة الأسية ملائمة ، تماماً ، لمعادلة تفاضلية أو معادلة تكاملية أو معادلة فروق . تأخذ كل مركبة للتواتر طريقها الخاص ثم تتركب ضمن الحل . لذا ، فإن تحليل وتركيب المعطيات ـ حساب c انطلاقاً من y و y انطلاقاً من c ـ جزء أساسي تماماً من الحسابات العلمية .

نريد أن نبين أنه من الممكن إنجاز ذلك بسرعة . المفتاح هو في العلاقة بين F_4 و F_2 ـ والأفضل بين نسختين لـ F_2 يقعان في المصفوفة F_2^* :

$$F_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & i^2 & i^3 \\ 1 & i^2 & i^4 & i^6 \\ 1 & i^3 & i^6 & i^9 \end{bmatrix} \quad \text{قريبة من} \quad F_2^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ 1 & -1 & & \\ & & 1 & 1 \\ & & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

تحوي F_4 قوى $w_4=i$، *الجذر الرابع للوحدة*. وتحوي F_2^* قوى $w_2=-1$، الجذر التربيعي للوحدة. لاحظ بصورة خاصة، أن نصف عناصر F_2^* أصفار. يحتاج التحويل 2×2، حتى عندما يعمل مرتين، إلى نصف مايحتاجه التحويل 4×4 من عمليات. بصورة مشابهة، إذا أمكن تعويض تحويل 64×64 إلى تحويلين من النوع 32×32، فإن العمل سينخفض إلى النصف (إضافة إلى تكلفة تجميع النتائج). بقدر ماهو صحيح وممكن عملياً، فانه يمثل صلة بسيطة بين w_{64} و w_{32} :

$$(e^{2\pi i/64})^2 = e^{2\pi i/32} \quad \text{أو} \quad (W_{64})^2 = W_{32}$$

يساوي البعد بين الجذرين من الدرجة ٣٢ على الدائرة ضعفي مايقابل ذلك من جذور الدرجة ٦٤. إذا كان $w^{64}=1$ فان $(w^2)^{32}=1$. بصورة عامة، الجذر من الدرجة m هو مربع الجذر من الدرجة n وذلك إذا كان m نصف n :

$$w_n^2 = w_m \quad \text{إذا كان} \quad m = \tfrac{1}{2} n \qquad (١٣)$$

سرعة FFT (تحويل فوريه السريع) في الشكل القياسي الوارد هنا، تتعلق بالعمل على الأعداد المركبة العالية الأساس $2^{12}=4096$. سيكون في مصفوفة فوريه n^2 من العناصر، لذا سنحتاج، بدون التحويل السريع إلى $(4096)^2=2^{24}$ عملية ضرب لإيجاد جداء F في x : يصبح تكرار الضرب بالمصفوفة F كبير التكلفة. على العكس، يمكن لتحويل سريع أن ينفذ كل ضرب في 6×2^{12} خطوة، فقط. إنه ***أسرع بأكثر من*** 680 **مرة** من المعتاد، لأنه يستعيض عن العامل 4096 بـ 6. بصورة عامة، يستعيض عن n^2 من عمليات الضرب بـ $\frac{1}{2}nl$ حيث n هو 2^l. يربط المصفوفة F_n بنسختين لـ $F_{n/2}$ ومن ثم باربع نسخ من $F_{n/4}$ وأخيراً بـ n نسخة من F_1 (التي هي تافهة)، لذا، ستختزل العمليات التي عددها n^2 إلى $\frac{1}{2}n\log_2 n$ عملية.

نحتاج إلى معرفة لماذا يمكن تكوين $y=F_nc$ (متجه بـ n مركبة) من متجهين لهما، فقط، نصف الطول. الخطوة الأولى هي أن نقسم c نفسه. لقد قسم المتجه

$(c_0, c_1, ..., c_{n-1})$ إلى نصفين أقل طولاً وذلك بالتفريق بين المركبات الزوجية والمركبات الفردية :

$$c' = (c_0, c_2, ..., c_{n-2}) \ , \quad c'' = (c_1, c_3, ..., c_{n-1}).$$

تتوزع المعاملات بالتناوب بين c' و c''. عندئذ، انطلاقاً من هذين المتجهين، نكون $y' = F_m c'$ و $y'' = F_m c''$. هاتان هما *عمليتا الضرب بالمصفوفة الصغرى* F_m (تذكر أن $m = \frac{1}{2}n$). كما في الحالة التي استبدلنا فيها F_2^* بـ F_4، فإن العمل قد انخفض إلى النصف. المسألة الأساسية هي تركيب y بمتجهين لهما نصف الطول y' و y''، ولقد ذكر Cooley و Tukey ماذا يجب أن نعمل :

٣ ث المركبات الـ m الأول والمركبات الـ m الأخر للمتجه $y = F_n c$ هي :

$$\begin{aligned} y_j &= y'_j + w_n^j y''_j \ , \quad j = 0, ..., m-1 \\ y_{j+m} &= y'_j - w_n^j y''_j \ , \quad j = 0, ..., m-1. \end{aligned} \quad (١٤)$$

لذا، فان الخطوات الثلاث هي تجزئة c إلى c' و c''، وتحويلهما بواسطة F_m إلى y' و y'' ثم اعادة بناء y انطلاقاً من المعادلات(١٤).

سنتحقق بعد فترة ماإذا كان يعطي ذلك y الحقيقي. (يمكنك تفضيل بيان جريان على الجبر). إن ذلك يعني أن حساب F_n يحتاج إلى مثلي ماتحتاجه F_m من الخطوات، بالإضافة إلى m عملية ضرب بالأعداد w_n^j الواردة في (١٤). يمكن تكرار هذه الفكرة. ننتقل من F_{1024} إلى F_{512} إلى F_{256}. تعداد الحساب النهائي هو $\frac{1}{2}nl$، وذلك عندما ننطلق بالقوة $n=2^l$ ونتابع الطريق كله حتى $n=1$ ـ حيث لاتكون هناك حاجة إلى عمليات ضرب. يتفق هذا العدد مع القاعدة التي أوردناها أعلاه : مثلا *العدد المتعلق بـ* m *زائداً* m عملية ضرب إضافية، يعطي *العدد المتعلق بـ* n :

$$2\left(\tfrac{1}{2}m\ (l-1)\right) + m = \tfrac{1}{2}nl.$$

التكلفة أكثر قليلاً من تكلفة الحالة الخطيــة، ويظهر لوغــارتم l عمليــات الضـــرب $w_n^j y''_j$ الواردة في (١٤). مع ذلك، فان $\frac{1}{2}nl$ أصغر كثيراً من n^2 وأن تحليل فوريه المنقطع فد تحول بصورة كاملة، بواسطة FFT.

تحقيق القانون (١٤) *المتعلق بـ* y: فرق كل مركبة لـ $y=Fc$ إلى جزء من c' (المركبات الزوجية e_{2k}) وجزء من c'' (المركبات الفردية c_{2k+1}). إن ذلك يجزئ قانون y_j إلى جزأين:

$$y_j = \sum_{k=0}^{n-1} w_n^{jk} c_k \quad \text{تطابق} \quad \sum_{k=0}^{m-1} w_n^{2kj} c_{2k} + \sum_{k=0}^{m-1} w_n^{(2k+1)j} c_{2k+1}$$

لكل مجموع في اليمين $m=\frac{1}{2}n$ حداً. بما أن $w_m^2 = w_m$ فان المجموعين هما:

$$y_j = \sum_{k=0}^{m-1} w_m^{kj} c'_k + w_n^j \sum_{k=0}^{m-1} w_m^{kj} c''_k. \qquad (١٥)$$

هذان المجموعان هما بالضبط y'_j و y''_j اللذان أتيا من نصفي التحويلين $F_m c'$ و $F_m c''$. الجزء الأول من (١٤) هو تماماً كما في (١٥). بالنسبة للجزء الثاني، نحتاج إلى $j+m$ بدلاً من j و هذا يؤدي إلى تغيير الاشارة:

داخل المجموعين، $w^{k(j+m)}$ يبقي w_m^{kj} لأن $w_m^{km}=1^k=1$.

في الخارج $w^{j+m}=-w_n^j$ لأن $w_n^m=e^{2\pi im/n}=e^{\pi i}=-1$.

يعطي تغيير الاشارة للجزء الثاني من (١٤) وبذلك يتحقق قانون FFT. لقد عدلت الفكرة لتضم عوامل أخرى أولية لـ n (ليس فقط قوى 2). إذا كان n ذاته أولياً، فان هناك ضرورة لطريقة مختلفة تماماً.

مثال الخطوات من $n=4$ إلى $m=2$ هي:

$$\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} c_0 \\ c_2 \\ c_1 \\ c_3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} F_2 c' \\ \\ F_2 c'' \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} y \end{bmatrix}$$

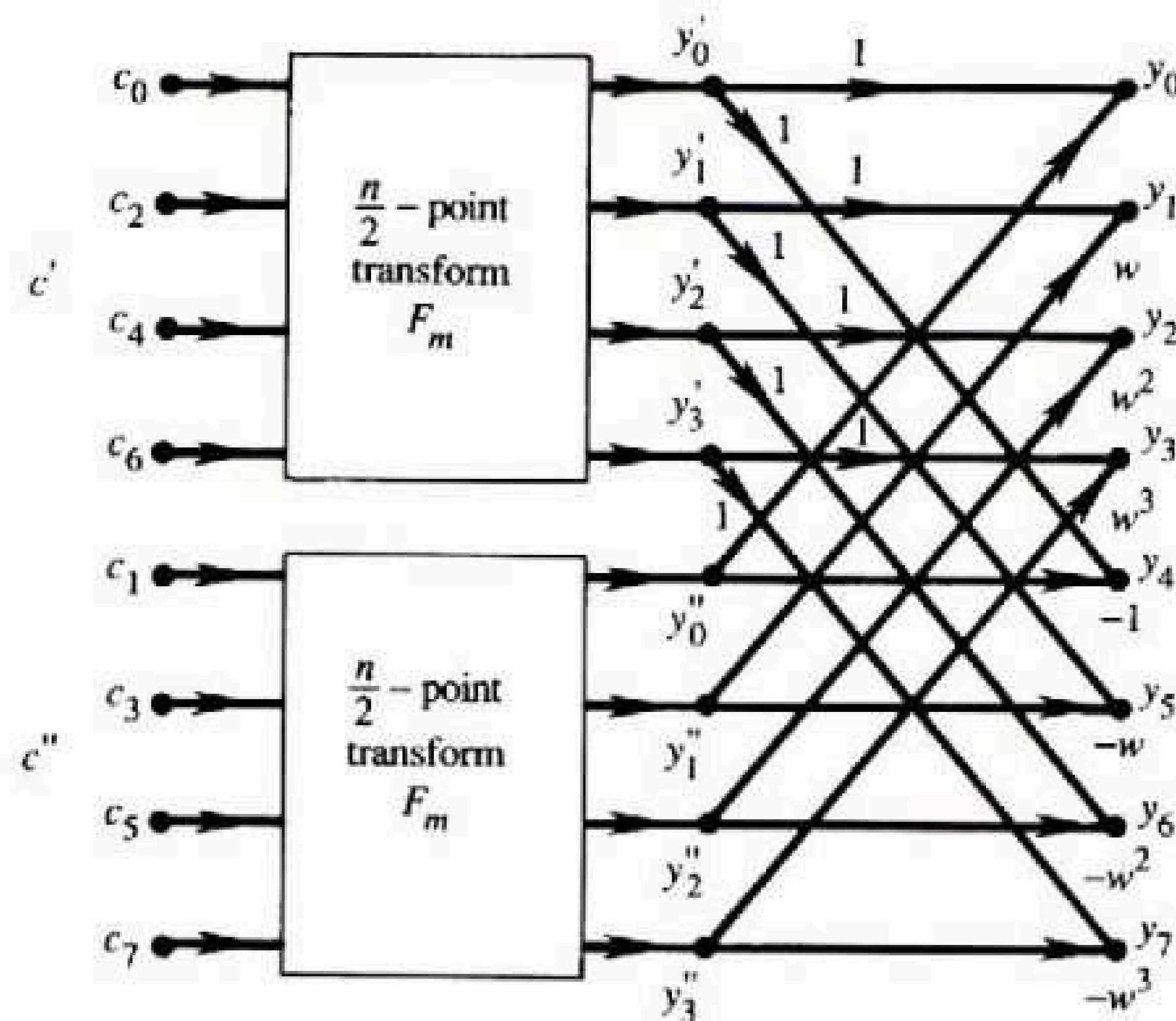
تركب هذه الخطوات الثلاث بضرب c في F_4 ليعطي y. لما كانت كل خطوة خطية، فإنها يجب أن تنتج عن مصفوفة، ومن الواجب أن يكون جداء هذه المصفوفات هو F_4 : (١٦)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & i^2 & i^3 \\ 1 & i^2 & i^4 & i^6 \\ 1 & i^3 & i^6 & i^9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & 1 & \\ & 1 & & i \\ 1 & & -1 & \\ & 1 & & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ 1 & -1 & & \\ & & 1 & 1 \\ & & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ & & & 1 \end{bmatrix}.$$

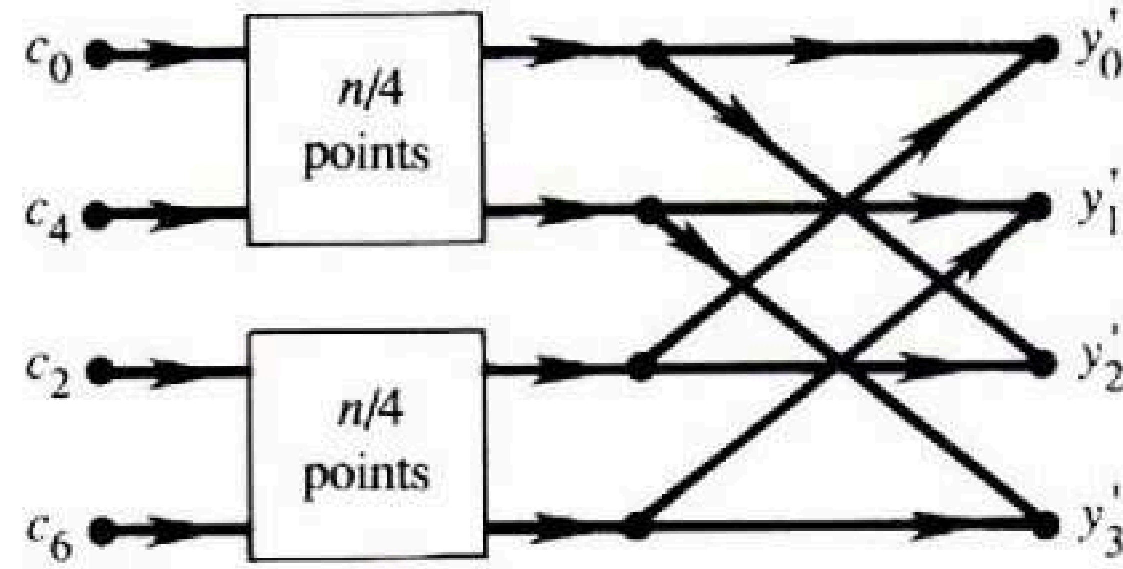
يمكنك أن تتعرف على نسختين لـ F_2 في الوسط. تظهر في الطرف الأيمن مصفوفة المبادلة التي تفرق c إلى c' و c''. في اليسار تظهر المصفوفة التي تضرب بـ w_n^j. إذا انطلقنا بـ F_8، فان على المصفوفة المتوسطة أن تحوي نسختين لـ F_4. ***كل واحدة منهما ستجزأ كما ورد أعلاه***. لذا، تعادل FFT تحليلاً ضخماً لمصفوفة فوريه! المصفوفة الوحيدة F ذات العناصر غير الصفرية التي عددها n^2 قد نتجت عن $l = log_2 n$ مصفوفة تقريباً، بعناصر غير صفرية عددها nl فقط.

FFT الكاملة و الفراشة

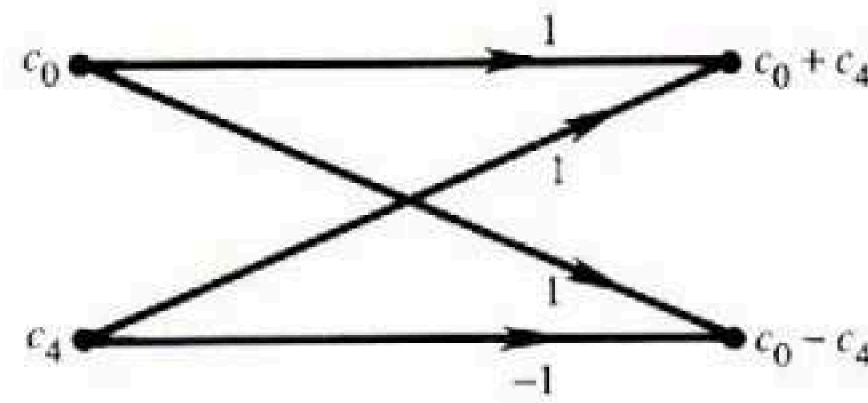
الخطوة الأولى من FFT تغير الضرب بـ F_n بضربين بـ $F_m = F_{n/2}$. لقد تحولت المركبات المرقمة زوجياً $(c_0, c_2, ...)$ بصورة منفصلة عن $(c_1, c_3, ...)$. نقدم فيما يلي بيان جريان يتعلق بـ $n = 8$:



الفكرة الأساسية ***هي تعويض كل إطار لـ F_4 بشكل مشابه يحوي إطارين لـ F_2*** . العامل الجديد $w_4 = i$ هو مربع العامل القديم $w = w_8 = e^{2\pi i/8} = (1+i)/\sqrt{2}$. يتغير النصف الأعلى من البيان من F_4 إلى :



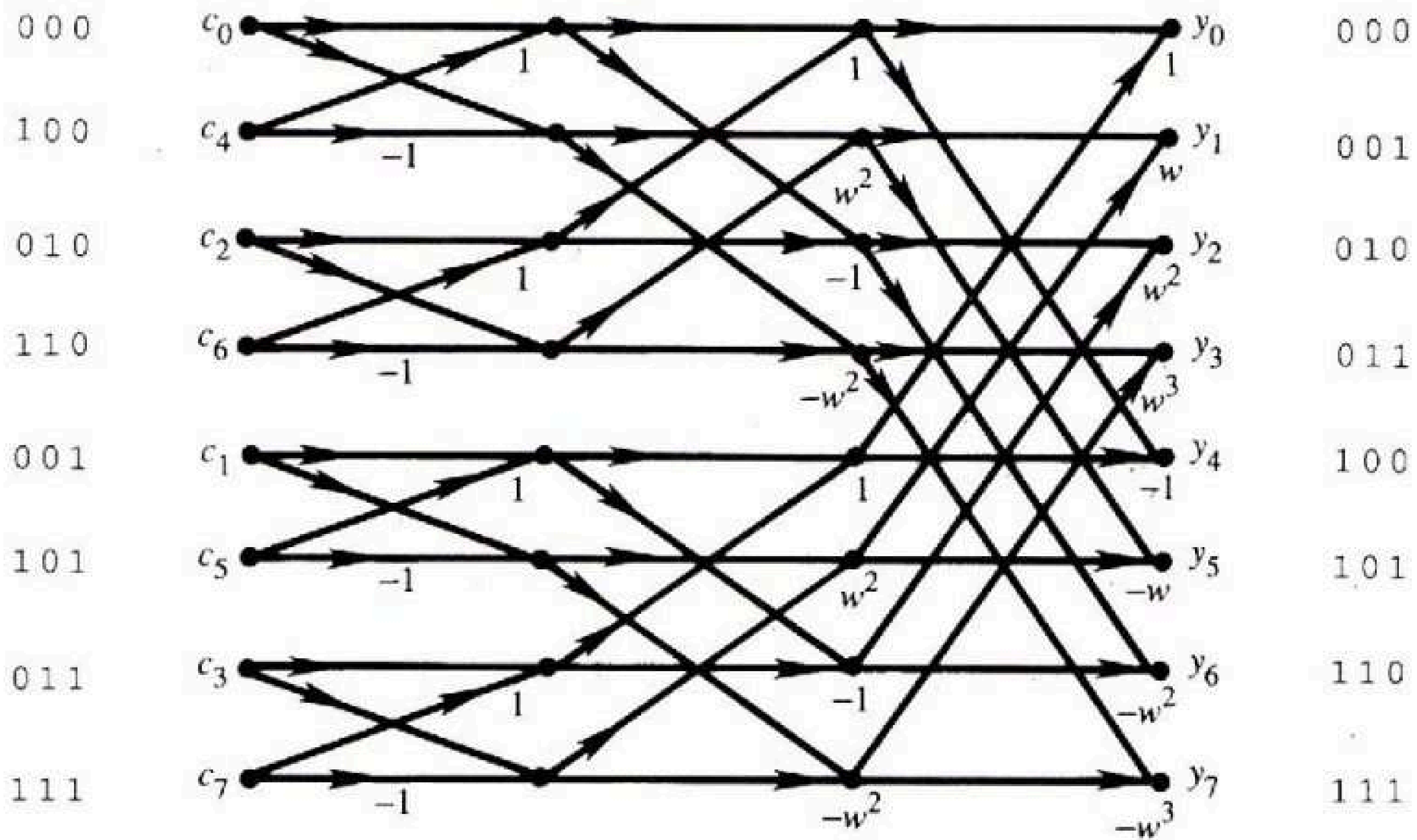
لذا يكون كل واحد من هذه الإطارات بالنسبة لـ $F_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ فراشة فريدة :



بتركيب هذه البيانات ، يمكنك أن ترى الصورة كاملة . إنها تبين الترتيب الذي تدخل بموجبه الأعداد c إلى FFT وكذلك المراحل التي عددها $\log n$ التي تدخل هذه الأعداد معها ـ وهي تبين ، أيضاً ، بساطة المنطق :

تحتاج كل مرحلة إلى $\frac{1}{2}n$ من عمليات الضرب ، لذا ، يكون التعداد الأخير هو $\frac{1}{2}n\log n$. توجد قاعدة مدهشة لمبادلة الأعداد c_i قبل أن تدخل في FFT : أكتب الأدلة الدنيا $0,\ldots,7$ بالتعداد الثنائي . اعكس ترتيب *الأعداد الناتجة* . تظهر الأدلة الدنيا «بترتيب معكوس» في الطرف الأيسر من البيان . الأعداد الزوجية تأتي قبل الأعداد الفردية (الأعداد التي تنتهي بـ 0 تأتي قبل الأعداد التي تنتهي بـ 1) ويتكرر ذلك في كل مرحلة .

يوجد نظام جاهز بدون تكلفة في مصلحة البريد الإلكتروني netlif (تعليماته في الملحق جـ).



تمـاريـن

٣-٥-١ ماهما F^2 و F^4 المتعلقان بمصفوفة فوريه ذات النوع 4×4 ؟

٣-٥-٢ ماهما الجزءان الحقيقي والتخيلي للجذور التكعيبية الثلاثة للوحدة ؟

٣-٥-٣ إذا شكلتَ مصفوفة جزئية من النوع 3×3 للمصفوفة F^6 من النوع 6×6 وذلك بأن نبقي عناصر الأسطر الأول والثالث والخامس في مكانها وكذلك الأمر من أجل الأعمدة، ماهي هذه المصفوفة الجزئية ؟

٣-٥-٤ ضع في المستوي المركب الجذور الستة للوحدة. ماهو الجذر الأصلي w_6 (أوجد جزأيه الحقيقي والتخيلي) ؟ ماهي قوة w_6التي تساوي $1/w_6$ ، ماهي قيمة المجموع $1+w+w^2+w^3+w^4+w^6$ ؟

٣-٥-٥ أوجد جميع حلول المعادلة $e^{ix}=-1$ وجميع حلول المعادلة $e^{i\theta}=i$.

٣-٥-٦ ماهو مربع العدد w_{128} وجذره التربيعي الذي هو الجذر الأصلي ذي الدرجة 128 للواحد؟

٣-٥-٧ حل النظام (٦) ذا النوع 4×4 إذا كانت الأطراف اليمنى $y_0 = 2, y_1 = 0, y_2 = 2, y_3 = 0$. بقول آخر حل $F_4 c = y$.

٣-٥-٨ حل النظام السابق ذاته إذا كان $y = (2,0,-2,0)$، بمعرفة F_4^{-1} وحساب $c = F_4 y$. تحقق من أن $c_0 + c_1 e^{ix} + c_2 e^{2ix} + c_3 e^{3ix}$ تأخذ القيم 2,0,-2,0 في النقاط $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$.

٣-٥-٩ (أ) إذا كان $y = (1,1,1,1)$ برهن أن $c = (1,0,0,0)$ يحقق $F_4 c = y$.

(ب) لنفرض الآن $y = (1,0,0,0)$، أوجد c .

٣-٥-١٠ إذا كان $n = 2$، اكتب y_0 انطلاقاً من السطر الأول من (١٤) و y_1 من السطر الثاني . إذا كان $n = 4$ ، استخدم السطر الأول لإيجاد y_0 و y_1 والثاني لايجاد y_2 و y_3، كل ذلك بدلالة y' و y'' .

٣-٥-١١ احسب $y = F_4 c$ بالخطوات الثلاث لطريقة فوريه السريعة، إذا كان $c = (1,0,1,0)$.

٣-٥-١٢ احسب $y = F_8 c$ بالخطوات الثلاث لطريقة فوريه السريعة، إذا كان $c = (1,0,1,0,1,0,1,0)$. اعد الحساب بفرض $c = (0,1,0,1,0,1,0,1)$.

٣-٥-١٣ بالنسبة للمصفوفة 4×4 ، اكتب القوانين المتعلقة بـ c_0, c_1, c_2, c_3 وحقق أنه إذا كان f فردياً فإن c فردي . يكون المتجه f فردياً إذا كان $f_{n-j} = -f_j$؛ بالنسبة لـ $n = 4$ ، هذا يعني $f_0 = 0, f_3 = -f_1, f_2 = 0$. يستنتج ذلك قبل c و $(\sin 0, \sin\frac{\pi}{2}, \sin\pi, \sin\frac{3\pi}{2})$ ويؤدي ذلك إلى تحويل الجيب السريع .

٣-٦ مراجعة وعرض

لقد انتهى «النصف الأول» من الجبر الخطي، وقد كان مركزاً على $Ax=b$ وهو

يغطي أكثر من نصف فصل (على الأقل، في صف المؤلِّف). لقد انطلق بالمصفوفة المربعة، واندفع متقدماً نحو المصفوفات المستطيلة وعاد إلى المصفوفة المربعة A^TA.

الفصل الأول حل النظام $Ax=b$ بمصفوفة مربعة A (بالحذف)

الفصل الثاني حل النظام $Ax=b$ بأي مصفوفة (بالمصفوفات الجزئية الأربع)

الفصل الثالث حل المربعات الأصغرية (بالإسقاط و بـ $A^TA\overline{x}=A^Tb$)

إنني حزين بسبب اختصار هذا الموضوع بهذه القائمة القصيرة. إنك لاشك مدرك أن في هذه الأسطر الثلاثة كمية كبيرة من الرياضيات ـ وأقوال كثيرة قيلت حول كل منها. بالعودة إلى ماقدم، ستكون لي فرصة لعمل روابط جديدة توضحت من جهة أخرى. إنها اختيارية لكنها متفاوتة بالأهمية ـ إن الفضاء الجزئي أساسي، فعلاً، ويمكن للأفكار التي جاءت خلفه أن تأتي ضمنه عندما نعالج الاتحاد والتقاطع.

تنطلق هذه المراجعة، كما فعل الكتاب، بالحسابات. النقطة الأساسية هي أن كل حل ينتج عن تحليل مصفوفة:

الفصلان الأول والثاني : $A=LU$ الفصل الثالث $A = QR$

وسواء أكانت المصفوفة مربعة أم مستطيلة، فإن النظام $Ax=b$ يرد إلى مرحلتين سهلتين:

أولاً $Lc = b$، ثم، $Ux = c : x = U^{-1}L^{-1}b$

أولاً $Q\overline{c} = b$، ثم، $R\overline{x} = c : \overline{x} = R^{-1}Q^Tb$

ثلاث من هذه المصفوفات ـ L,U,R ـ مثلثية. المخالفة منها هي Q. إنها ذات m سطراً و n عموداً فقط، إنها ذات هيئة خاصة هي كون أعمدتها متعامدة. لذا فان Q^TQ هي مصفوفة الوحدة. حل المربعات الأصغرية لـ $Qc=b$ هو $\overline{c} = Q^Tb$. هندسياً، ينتج $\overline{c}$ من المسقط ذي البعد الواحد على كل عمود بمفرده. $\overline{x}$ النهائي مطابق لحل $A^TA\overline{x}=A^Tb$.

وهكذا يؤدي بنا النظام $Ax=b$ (بصورة لا إرادية تقريباً) إلى LU و QR. ينتج

هذان التحليلان عن مراحل الحل . لقد كنا قريبين من التحليلات الثلاثة الأخرى وجرينا بها بهدف جعل النص واضحاً . لقد ذكر الأول مبكراً وكان مهماً في التطبيقات . إنه الشكل الخاص $A=LU$ أو الشكل الآخر $A=LDU$ وذلك عندما A تكون متناظرة .

الفصل الأول تحليل شولسكي ***Cholesky*** للمصفوفة المتناظرة A :

$$A = LDL^{\mathrm{T}} = (LD^{1/2})(LD^{1/2})^{\mathrm{T}}$$

الفصل الثاني التحليل المختزل ـ $m \times r$ مضروباً بـ $r \times m$ لكل A : $A=\underline{L}\ \underline{U}$

الفصل الثالث تحليل القيمة الشاذة لكل مصفوفة A :

$$A = Q_1 \sum Q_2^{\mathrm{T}}$$

لننظر في كل واحد منها بمفرده .

١ – عندما تكون A متناظرة ، فان U مطابقة لـ L^T . في هذه الحالة ، يكون التحليل LDU هو $A=LDL^T$ ويكون الطرف الأيمن متناظراً تماماً . يأخذ شولسكي مرحلة إضافية ويقسم المصفوفة القطرية D بأخذ الجذور التربيعية للمحاور . (بفرض أنها موجبة ؛ تلك هي حالة «المعرّفة إيجابياً» الواردة في الباب السادس) . لذا ، تظهر A بشكل جداء عاملين مثلثيين ، $(LD^{1/2})(LD^{1/2})^T$.

توجد هنا واقعة مثيرة : إذا انطلق شولسكي بـ A^TA (التي لها محاور موجبة) فان عامليه سيكونان ، تماماً ، مصفوفتي غرام ـ شميدت R^T و R . بقول آخر :

$$Q^{\mathrm{T}}Q = I \quad \text{و} \quad A^{\mathrm{T}}A = R^{\mathrm{T}}Q^{\mathrm{T}}QR \quad \text{لأن} \quad A^{\mathrm{T}}A = R^{\mathrm{T}}R$$

٣ خ المضاريب l_{ij} الناتجة عن الحذف الغاوسي في A^TA مطابقة للمضاريب التي تقوم أعمدة A .

مثال (مصفوفتنا المفضلة لطريقة غرام ـ شميدت)

$$A^{\mathrm{T}}A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

أنظر أولاً في A^TA . يضيف الحذف $\frac{1}{2}$ السطر الأول إلى السطر الثاني ثم $\frac{2}{3}$ السطر الثاني إلى السطر الثالث . المحاور هي $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}$. ماذا يفعل غرام شميدت بـ A؟

إذا كانت القضية (٣ – خ) صحيحة ، فان $\frac{1}{2}$ العمود الأول من A قد أضيف إلى العمود الثاني ، النتيجة هي $a'_2=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1,0)$ ، ***وهومتعامد مع العمود الأول*** . ثم نضيف $\frac{2}{3}$ العمود الثاني الجديد إلى العمود الثالث . النتيجة هي $a'_3=(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},-1)$ وهو *متعامد مع العمودين الأولين* . هذه هي خطوات طريقة غرام ـ شميدت وهي تؤدي إلى مصفوفة ذات أعمدة متعامدة :

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & -1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

في مصفوفة أكبر ، سيبدأ العمود الثاني بـ $\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},-1$. ذلك نموذج لم أره أبداً من قبل ، بأعمدة متعامدة يبدو جيداً .

بقي علينا أن نقسم الأعمدة على أطوالها . الأمر الخاص هنا هو أن مربعات *الأطوال مطابقة لمحاور* A^TA :

$$1^2+(-1)^2=2, \quad (\tfrac{1}{2})^2+(\tfrac{1}{2})^2+(-1)^2=\tfrac{3}{2}, \quad (\tfrac{1}{3})^2+(\tfrac{1}{3})^2+(\tfrac{1}{3})^2+(-1)^2=\tfrac{4}{3}\ .$$

لايمكن أن يكون ذلك صدفة ! فأعمدة $A'=A(L^T)^{-1}$ متعامدة فيما بينها وتظهر مربعات أطوالها في D :

إذا كان $A^TA=LDL^T$ فإن $(A')^TA' = L^{-1}A^TA\ (L^T)^{-1}=D$

في المرحلة الأخيرة نقسم على الجذر التربيعي للمحاور وذلك لتنظيم الأعمدة :

$Q=A\ (L^T)^{-1}\ D^{-1/2}$ أو $A=QD^{1/2}L^T=QR$

يعيدنا ذلك إلى مصفوفة شولسكي $D^{1/2}L^T$ المطابقة لمصفوفة غرام ـ شميدت R .

الشكل المثلثي لـ R يعكس الترتيب : طرحت مضاعفات الأعمدة المتقدمة

من الأعمدة المتأخرة. إن ذلك مشابه للحذف: طرحت مضاعفات الأسطر المتقدمة من الأسطر المتأخرة. L تسجل خطوات الحذف في A^TA و R تسجل خطوات التقويم في A.

٢- «التحليل المختزل» هو $A = \underline{L}\ \underline{U}$. مثل التحليل المتناظر LDL^T، فإنه أكثر توازناً من التحليل القديم $A=LU$ ولكن من طريق آخر. عندما يكون لـ A الرتبة r، فاننا نحتاج، فعلاً، إلى r عموداً في L و r سطراً في U. فالأسطر الـ$m-r$ الأخيرة في U يمكن اهمالها (لإنها جميعها أصفار). الأعمدة الـ $n - r$ الأخيرة من L يمكن، أيضاً، إهمالها (لإنها تضرب هذه الأسطر الصفرية الواقعة في U ولن يكون لها أي تأثير). بقينا مع $\underline{L}$ و $\underline{U}$ وسيكون جداؤهما أيضاً هو المصفوفة A:

يمكن لمصفوفة رتبتها r أن تحلل إلى جداء مصفوفة من النوع $m \times r$ في مصفوفة من النوع $r \times n$.

في الحالة التي تحتاج A إلى مبادلة أسطر مثل $PA=LU$، سيكون هنا بعض التغيير: $\underline{L}$ تتكون من الأعمدة الـr الأولى لـ$P^{-1}L$ عوضاً عن L. في كل حالة، ستكون أعمدة $\underline{L}$ التي عددها r أساساً لفضاء أعمدة A وأسطر $\underline{U}$ التي عددها r أساساً لفضاء أسطر A.

٣- يعدُّ *تفريق القيمة الشاذة* أكثر أهمية بحيث قدِّم في فقرة خاصة وسيكون موضوع الملحق (أ). إنه يضع مصفوفة قطرية Σ بين مصفوفتين قائمتين، تعطيان أسساً للفضاءات الأربعة وتؤديان إلى المعكوس الكاذب A^+ وإلى «العدد الشرطي». لقد أصبح SVD (تفريق القيمة الشاذة) أساسياً في علم الحاسوب.

فضاءات المتجهات والفضاءات الجزئية

ننتقل من الحساب إلى الجبر الذي يبدأ بمفهوم فضاءات المتجهات حيث هناك عمليتان ممكنتان:

جمع المتجهات $x+y$ وضرب متجه بعدد cx

هاتان العمليتان سهلتان في فضاء عدد أبعاده n ـ الذي هو المثال الواضح لفضاء المتجهات. إن ذلك ممكن داخل مجموعة أصغر مثل المستقيمات والمستويات المارة من نقطة الأصل **في** R^3. المجموعات الجزئية، التي هي فضاءات متجهات بحد ذاتها، هي ***فضاءات جزئية*** والفضاءات الجزئية الأربعة هي مفتاح $Ax = b$:

وجود x : يجب أن يقع b في فضاء الأعمدة $\mathscr{R}(A)$: يجب أن يكون b متعامداً مع الفضاء الصفري الأيسر $\mathscr{N}(A^T)$

وحدانية x : يجب أن لايحوي الفضاء الصفري $\mathscr{N}(A)$ سوى المتجه الصفري : يجب أن يقع فضاء الأسطر في R^n

عندما يكون هناك حل لكل b، تكون الأسطر مستقلة وتكون الرتبة $r = m$. وعندما يكون الحل وحيداً، تكون الأعمدة مستقلة وتكون الرتبة $r = n$. لكل مصوفة، الرتبة هي عدد أبعاد كل من فراغ الأعمدة وفراغ الأسطر. إذا كان $r = m = n$ فان A مربعة وقابلة للعكس.

من الواضح أن هذه الفصول قد تابعت هدفاً واحداً هو فهم النظام $Ax=b$. فكل فكرة جديدة أو تعريف ـ بما في ذلك فضاء المتجهات والاستقلال الخطي، الأساس والسعة، الرتبة والفضاء الصفري. الجداء الداخلي والتعامد ـ قدمت لأنها ضرورية لهذا الغرض. سننظر الآن، من جديد، في الأفكار ذاتها لايجاد بعض العلاقات التي أغفلت.

١ – **تقاطع فضائي متجهات**. الفكرة الأساسية هي العودة إلى تعريف فضاء المتجهات والفضاء الجزئي. ستظهر مسائل تحتاج إلى نظر، لاتتعلق بفضاء جزئي فريد أو مصفوفة A فريدة، بل تتعلق بالصلات بين فضاءين جزئيين أو مصفوفتين. النقطة الأولى هي الأكثر أهمية :

٣ ذ إذا كان V و W فضاءين جزئيين من فضاء متجهات معلوم، فان ***تقاطعهما*** $V \cap W$

كذلك فضاء جزئي . المتجهات المنتمية إلى كل من الفضاءين الجزئيين ، تكوّن فضاءً جزئياً أيضاً .

البرهان مباشر . نفرض x و y واقعين في $V \cap W$ ، بقول آخر إنهما متجهان في V وأيضاً في W . لذا ، لما كان كل من V و W فضاء متجهات بحد ذاتهما فان $x+y$ و cx يقعان في V و W . ***ناتجا الجمع والضرب بعدد يبقيان في التقاطع .*** هندسياً تقاطع مستويين يمران من نقطة الأصل (أو "مستويين زائدين" من R^n) هو أيضاً فضاء جزئي . الأمر ذاته صحيح بالنسبة لتقاطع فضاءات جزئية متعددة أو أي عدد منها مهما كان كبيراً .

مثال ١ تقاطع فضاءين جزئيين متعامدين فيما بينهما هو الفضاء الجزئي ذو النقطة الواحدة $\{0\}$ ـ المتجه الصفري هو الوحيد المتعامد مع نفسه .

مثال ٢ إذا كانت مجموعتا المصفوفات المثلثية العليا والسفلى من النوع $n \times n$ على الترتيب ، الفضاءين الجزئيين V و W ، فان تقاطعها هو مجموعة المصفوفات القطرية . إن ذلك حتماً ، فضاء جزئي . جمع مصفوفتين قطريتين وضرب مصفوفة قطرية بعدد ينتجان مصفوفتين قطريتين .

مثال ٣ نفرض أن V فضاء A الصفري و W فضاء B الصفري ، يكون عندئذٍ $V \cap W$ أصغر فضاء صفري للمصفوفة :

$$C = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}.$$

$Cx = 0$ يتطلب $Ax = 0$ و $Bx = 0$. لذا ، فإن على x أن يقع في كل من الفضاءين الصفريين .

٢ – مجموع *فضائي متجهات* جرت العادة بعد دراسة وتوضيح تقاطع مجموعتين أن يدرس اتحادهما . إلاأن الأمر غير طبيعي مع فضاء المتجهات . *ليس من الضروري بصورة عامة أن يكون اتحاد فضاءين جزئيين* $V \cup W$ ، *فضاءً جزئياً* . لننظر في محور x

ومحور y في المستوي . كل محور بمفرده فضاء جزئي ، ولكن إذا أخذا معاً فان اتحادهما ليس كذلك . مجموع $(1,0)$ مع $(0,1)$ لاينتمي إلى أي منهما . يقع هذا الأمر دائماً مالم يكن أحد الفضائين الجزئيين حاوياً للأخر . لذا ، يكون الاتحاد فضاءً جزئياً ، فقط ، في هذه الحالة (الاتحاد يتطابق مع أكبرهما) .

رغم ذلك ، نريد أن نركب فضاءين جزئيين ولكن عوضاً عن اتحادهما . ننتقل إلى جمعهما .

تعريف إذا كان V و W فضاءين جزئيين لفضاء معلوم ، فان **مجموعهما** $V+W$ كذلك . يتكون هذا المجموع من جميع المتجهات التي من الشكل $v+w$ حيث v أي متجه اختياري من V ، و w أي متجه اختياري من W .

ليس ذلك سوى الفضاء المولد بالاتحاد $V \cup W$. إنه أصغر فضاء متجهات يحوي كلاً من Vو W . مجموع المحور x مع المحور y هو المستوي x -y كاملاً وهو مجموع أي مستقيمين مختلفين منه (مارين من نقطة الأصل) ، سواء كانا **متعامدين أم لا** . إذا كان V هو محور x و W هو المنصف للربع الأول $x=y$ ، فانه يمكن توزيع أي متجه مثل $(5,3)$ إلى $v+w = (2,0) + (3,3)$. لذا ، فإن $V+W$ هو R^2 كاملاً .

مثال ٤ لنفرض أن V و W متتامان متعامدان في R^n . لذا ، يكون مجموعهما $V+W=R^n$. كل x يساوي مجموع مسقطيه v على V و wعلى W .

مثال ٥ إذا كان V فضاء المصفوفات المثلثية العليا و W فضاء المصفوفات المثلثية الدنيا ، فإن $V+W$ هو فضاء جميع المصفوفات . يمكن كتابة كل مصفوفة كمجموع مصفوفة مثلثية عليا مع مصفوفة مثلثية دنيا ـ بطرق عديدة لأن الأقطار لاتتعين بصورة وحيدة ـ (المصفوفات المثلثية العليا والمثلثية الدنيا من نوع واحد وجميع المصفوفات مربعة ومن نفس النوع . المترجم) .

مثال ٦ إذا كان V فضاء أعمدة A **و** W فضاء أعمدة B ، فإن $V+W$ هو فضاء أعمدة

المصفوفة الموسعة $D=[\,A\ \ B\,]$. عدد أبعاد $V+W$ أقل من مجموع عددي أبعاد V و W (لأنه يمكن لهذين الفضاءين أن يتداخلا)، لكن من السهل ايجاد :

عدد أبعاد $(V+W)$ يساوي رتبة D (١)

الشيء المهم **هو أن حساب** $V \cap W$ **أكثر دقة** . لنفرض أننا أعطينا الأساسين $v_1,\dots,v_k$ و $w_1,\dots,w_l$؛ نريد الآن أساساً لتقاطع هذين الفضاءين الجزئيين . حتماً لا يكفي أن نبحث عن المتجهات v المساوية لمتجهات w . يمكن لهذين الفضاءين أن يكونا متساويين $v=w$ وأن يكون أساساهما مختلفين .

إليك الطريقة الأكثر فعالية . نكون المصفوفة D التي أعمدتها $v_1,\dots,v_k$ و $w_1,\dots,w_l$ ونبحث عن فضائها الصفري $\mathcal{N}(D)$. نريد أن نبرهن أن أساساً للفضاء الصفري يؤدي إلى أساس لـ $V \cap W$ ، **وأن لهذين الفضاءين عدد الأبعاد نفسه** . يدعى عدد أبعاد الفضاء الصفري "بالصفرية" لذا

عددأبعاد$(V \cap W)$ = صفرية D (٢)

يؤدي ذلك إلى قانون مهم بصفته الخاصة . لنجمع (1) و (2)،
عدد أبعاد $(V+W)$ + عدد أبعاد $(V \cap W)$= رتبة D + صفرية D .

انطلاقاً من حساباتنا المتعلقة بالفضاءات الجزئية الأربعة ، نعلم أن الرتبة زائداً الصفرية يساوي عدد الأعمدة . في هذه الحالة ، يكون عدد أعمدة D هو $l+k$ وبما أن k يساوي عدد أبعاد V و l عدد أبعاد W فاننا نصل إلى النتيجة التالية :

عدد أبعاد $(V+W)$ + عدد أبعاد $V \cap W$ = عدد أبعاد V + عدد أبعاد W (٣)

إنه قانون غير سيء .

مثال ٧ للفضاءين W و V اللذين هما مجموعة المصفوفات المثلثية العليا ومجموعة المصفوفات المثلثية الدنيا (من نوع واحد) عدد الأبعاد المشترك $n(n+1)/2$. للفضاء $V+W$ الذي يمثل جميع مصفوفات هذا النوع عدد الأبعاد n^2 وإن عدد أبعاد

الفضاء $W \cap V$ الذي يمثل المصفوفات القطرية يساوي n كما يوحي القانون (٣) بذلك $n^2+n=n(n+1)/2+n(n+1)/2$

سننظر الآن في برهان القانون (٣) . للمرة الوحيدة في هذا الكتاب، سيكون اهتمامنا بالحسابات الفعلية أقل من اهتمامنا بتقنية البرهان. إنها المرة الوحيدة التي علينا أن نستخدم فيها الحيلة من أجل التعرف على فضاء بمطابقته مع فضاء آخر. لنذكر أولاً أن الفضاء الصفري للمصفوفة D هو فضاء جزئي من $\boldsymbol{R}^{k+l}$ ، بينما $W \cap V$ فضاء جزئي من الفضاء الكلي $\boldsymbol{R}^{m}$. سنبرهن أن لهذين الفضاءين عدد الأبعاد ذاته. الحيلة هنا أن نبين أن هذين الفضاءين الجزئيين هما، بالفعل، متكافئان وفق التقابل التالي :

لنفرض أن x متجه من الفضاء الصفري للمصفوفة D ولنكتب المعادلة $Dx = 0$ بدلالة الأعمدة كما يلي :

$$x_1 v_1 + \ldots + x_k v_k + x_{k+1} w_1 + \ldots + x_{k+1} w_1 = 0, \qquad (٤)$$

أو

$$x_1 v_1 + \ldots + x_k v_k = -x_{k+1} w_1 - \ldots - x_{k+1} w_1. \qquad (٥)$$

الطرف الأيسر من هذه المعادلة واقع في V إذ هو تركيب خطي في المتجهات v_k بينما الطرف الأيمن واقع في W بما أن هذين المتجهين متساويان فانهما يمثلان متجهاً y من $W \cap V$. إن ذلك يوجد تقابلاً بين $\mathcal{N}(D)$ و $W \cap V$. من السهل أن نتحقق أن هذا التقابل يحافظ على الجمع والضرب بعدد : إذا x قابل y^1 و x قابل y^1 فان $x+x^1$ يقابل $y+y^1$ و cx يقابل cy . علاوة على ذلك، فإن كل y من $W \cap V$ ينتج عن متجه وحيد x من $\mathcal{N}(D)$ (التمرين ٣-٦-١٨)

إن ماسيق توضيح جيد لمفهوم **التشاكل التقابلي** بين فضاءي متجهات. هذان الفضاءان مختلفان **ولكن أي أثر جبري سيكون عليهما واحداً**. إنهما متكافئان تماماً. كل مجموعة مستقلة خطياً من الأول تقابل مجموعة مستقلة خطياً من الثاني وأي

أساس للأول يقابل أساساً للثاني . لذا، فإن عددي أبعادهما متساويان وبذلك يتم برهان (٢) و (٣) . هذا مثال من النتائج التي يسعى إليها علماء الجبر وهو المطابقة بين كائنين رياضيين مختلفين، كما لو كانا في الأصل شيئاً واحداً[١] . في الواقع أي فضاءين لهما مجموعة المؤثرات (الأعداد) ذاتها وعدد الأبعاد المنتهي ذاته، هما دوماً متشاكلان تقابلياً . ولكن ذلك شديد العمومية بحيث يثير اهتماماً كبيراً . تظهر فائدة ذلك عند مطابقة فضاءين مختلفين ظاهرياً مثل $V \cap W$ و $\mathcal{N}(D)$.

مثال ٨ لنفرض أن V المستوي x-y و W المستوي x-z :

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

العمودان الأوليان أساس لـ V
السطران الأخيران أساس لـ W

رتبة D تساوي (٣) و $V+W$ هو R^3 . يحوي الفضاء الصفري $x = (1,0,-1,0)$ وعدد أبعاده يساوي الواحد . المتجه y المقابل لذلك هو (العمود ١) + صفر (العمود ٢)، ويتجه وفق محور x ـ الذي هو التقاطع $V \cap W$. يصبح القانون (٣) المتعلق بابعاد V و $W+$ ، $V \cap W$ ، $2 + 2 = 3 + 1$.

الفضاءات الأساسية للجداء AB

ننتقل من أزواج الفضاءات الجزئية إلى جداءات المصفوفات . كما هو الحال دائماً ، لن نهتم بعناصر AB بصورة منفردة ، إذ إنه من المحتمل أن لايكون هناك تشابه بين عناصر A وعناصر B . بل نهتم ، عوضاً عن ذلك ، بمستوى المتجهات ـ متجهات الأسطر و متجهات الأعمدة عوضاً عن العناصر ـ لأن بعض خواص A و B ستنتقل إلى جدائهما AB . وإن تأثير الأسطر والأعمدة منفردة لايكافىء تأثير الفضاءات التي تولدها هذه الأسطر أو تلك الأعمدة . تعكس هذه الفضاءات الجزئية خواص

---

(١) هناك تشاكل تقابلي آخر بين فضاء الأسطر وفضاء الأعمدة، عدد أبعاد كل منها r .

المصفوفة كاملة دفعة واحدة. مسألتنا الأساسية هنا: ماهي العلاقة بين الفضاءات الجزئية الأساسية الأربعة المرافقة للمصفوفة A والأربعة المرافقة للمصفوفة B مع الجداء AB؟ يمكن لكل هذه المصفوفات أن تكون مستطيلة وإن هناك أربع علاقات رئيسية:

(١) *الفضاء الصفري للمصفوفة* AB *يحوي الفضاء الصفري للمصفوفة* B

(٢) *فضاء أعمدة المصفوفة* AB *محتوى في فضاء أعمدة* A

(٣) *الفضاء الصفري اليساري لـ* AB *يحوي الفضاء الصفري اليساري لـ* A

(٤) فضاء أسطر AB محتوى في فضاء أسطر B .

البرهان سهل للغاية

(١) إذا كان $Bx = 0$ فإن $ABx = 0$. كل x من الفضاء الصفري لـ B هو، أيضاً، في $\mathcal{N}(AB)$..

(٢) كل عمود في AB تركيب لأعمدة A.

(٣) إذاكان $y^TA = 0$ فان $y^TAB = 0$.

(٤) كل سطر من AB تركيب لأسطر B.

بمعرفتنا لهذه الكمية الكبيرة من المعلومات حول الفضاءات الجزئية المرتبطة مع AB، نعرف أيضاً حدوداً لأعداد أبعاد ثلاثة منها:

نتيجة تحقق رتبة وصفرية AB العلاقات:

$$r(AB) \leq r(A) \quad r(AB) \leq r(B) \quad \dim \mathcal{N}(AB) \geq \dim \mathcal{N}(B).$$

ليس هناك محاولة لبرهان كون الفضاء الصفري لـ AB أوسع من الفضاء الصفري لـ A الذي هو غير مؤكد. في الحقيقة، يمكن لـ A و B أن تكونا من النوع 3×2 و 2×3 وعناصرهما أصفار. إن ذلك يجعل R^3 أصغر فضاء صفري لـ AB في حين أن A أكبر فضاءصفري لـ R^3. أخيراً، لنذكر أنه إذا تكونت مصفوفة جزئية C بحذف بعض

أسطر A (أولاشيء) وبعض أعمدتها (أولاشيء) فليس من الصعب تخمين حدود لرتبة C.

٣ ض إذا فرضنا **A** مصفوفة من النوع $m \times n$ رتبتها r ، فان :

(١) رتبة كل مصفوفة جزئية لها تصغر أو تساوي r.

(٢) توجد على الأقل ، مصفوفة جزئية واحدة من النوع $r \times r$ رتبتها تساوي r.

البرهان : سنرد A إلى C على مرحلتين : الأولى تبقي عدد الأعمدة ثابتاً ونحذف الأسطر التي لانريدها في C . فضاء أسطر هذه المصفوفة الوسيطة B محتوى ، كما سبق ، في فضاء أسطر A ، لذا $rank\,(B) = rank\,(A) = r$. في المرحلة الثانية ، ترد B إلى C بحذف الأعمدة غير المرغوبة . لذا ، فإن فضاء أعمدة C محتوى في فضاء أعمدة B وإن $r \geq rank\,B \geq rank\,C$ وهذا يحقق (١)

لبرهان الجزء (٢) ، نفرض أن B كونت من r سطراً مستقلة من أسطر A . لذا ، فان عدد أبعاد فضاء أسطر B يساوي r ؛ أي أن $rank\,(B) = r$ وأن على عدد أبعاد فضاء أعمدة B أن يكون مساوياً r أيضاً . لنفرض بعد ذلك أن C مكونة من r عموداً ، من أعمدة B المستقلة ، فيكون عدد أبعاد فضاء أعمدة C مساوياً r وتكون $rank\,(C) = r$. وهذا مايتم برهان (٢) : كل مصفوفة رتبتها r تحوي مصفوفة جزئية غير شاذة من النوع $r \times r$.

مثال لننظر مرة أخرى في المصفوفة ذات النوع 3×4

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{بالمصفوفة الجزئية} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$$

كل مصفوفة جزئية من A من النوع 3×3 شاذة أما C فليست كذلك .

هذه النظرية لاتستحق المغالاة في الاهتمام . إنها تشبه ، ظاهرياً ، نظرية مهمة

هي تلك النظرية التي تلي الشكل (٣-٤). لقد برهنا هناك أن كل مصفوفة A تمثل تحويلاً قابلاً للعكس، من فضاء أسطرها الذي عدد أبعاده r إلى فضاء أعمدتها الذي عدد أبعاده r أيضاً . يعطي هذان الفضاءان وهذا التحويل معلومات كاملة عن A. يمكن اعادة تجميع المصفوفة الكلية عند معرفة هذا التحويل. القضية هنا هي ايجاد مصفوفة جزئية قابلة للعكس C هناك أمور خاصة تتعلق بتلك المصفوفة التي اخترناها. هذا الأمر ممكن ويوجد في هذا المثال العديد من المصفوفات الجزئية القابلة للعكس ومن الرتبة r. الشيء الوحيد الذي حصلنا عليه هو تعريف مكافىء جديد *للرتبة*. إنها رتبة أوسع مصفوفة جزئية غير شاذة.

المربعات الأصغرية المحملة

لنفرض أننا عدنا قليلاً إلى الحالة الأكثر سهولة من مسألة المربعات الأصغرية وهي ايجاد $\overline{x}$، وهو تقدير وزن مريض، استناداً إلى ملاحظتين $x = b_1$, $x = b_2$. مالم يكن هذان القياسان متساويين، فاننا نواجه نظاماً غير متسق بمعادلتين في مجهولين :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}[x] = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

حتى الآن، كنا ننظر إلى هاتين الملاحظتين بدرجة واحدة من الثقة ونبحث عن القيمة $\overline{x}$ التي تجعل $E^2 = (x-b_1)^2+(x-b_2)^2$ أصغرياً :

$$\overline{x} = \frac{b_1 + b_2}{2} \quad \text{عند} \quad \frac{dE^2}{dx} = 0$$

القيمة المفضلة $\overline{x}$ هي هنا متوسط القياسين، وتأتي النتيجة ذاتها من المعادلة $A^TA\overline{x} = A^Tb$. بالفعل، A^TA مصفوفة من النوع 1×1 وتأخذ المعادلة الصورة $2\overline{x} = b_1+b_2$.

كملاحظة اضافية، انتبه إلى مسقط b على المستقيم الحامل للمتجه $a = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. هذا المسقط هو $p = a\overline{x}$ ، حيث $\overline{x} = a^Tb/a^Ta$ ـ هذه النسبة هي ، أيضاً، الوسط

$\frac{1}{2}(b_1+b_2)$. ذلك هو الجواب الطبيعي، باستثناء التحول التالي المهم من الناحية العملية.

لنفرض أن الملاحظتين لا تتمتعان بالدرجة ذاتها من الثقة . يمكن، مثلاً، الحصول على القيمة $x = b_1$ بواسطة مقياس دقته أعلى ـ أو في مسألة إحصائية من عينة أوسع ـ من دقة القيمة الثانية $x = b_2$. مع ذلك، إذا حوت الملاحظة الثانية معلومات مهمة لا تحويها الأولى، فاننا لا نستطيع أن نثق كلياً في $x = b_1$. إن أبسط تسوية لذلك هو أن نربط هاتين الملاحظتين بحملين مختلفين w_i وأن نختار $\overline{x}$ الذي يجعل مجموع المربعات المحملة أصغرياً :

$$E^2 = w_1^2 (x - b_1)^2 + w_2^2 (x - b_2)^2 .$$

إذا كان $w_1 > w_2$، فان الأهمية العظمى مرتبطة بالملاحظة الأولى وإن طريقة البحث عن القيمة الأصغرية تحاول ما أمكن جعل $(x-b_1)^2$ صغيراً . يمكننا أن نحسب بسهولة :

$$\frac{dE^2}{dx} = 2\left[w_1^2 (x - b_1) + w_2^2 (x - b_2)\right],$$

وبجعل هذا المقدار مساوياً الصفر نحصل على الحل $\overline{x}_w$:

$$\boxed{\overline{x} = \frac{w_1^2 b_1 + w_2^2 b_2}{w_1^2 + w_2^2}} \qquad (٦)$$

عوضاً عن متوسط b_1 و b_2 الذي أخذناه عندما كان $w_1 = w_2 = 1$، فإن $\overline{x}_w$ هو **المعدل المحمل** للمعطيات . إنه أقرب إلى b_1 منه إلى b_2 .

من السهل ايجاد مسألة المربعات الأصغرية العادية التي تؤدي إلى $\overline{x}_w$. إنها تصدر عن تغيير $Ax=b$ بالنظام الجديد $WAx=Wb$. **يغير ذلك الحل من $\overline{x}$ إلى $\overline{x}_w$** في مثالنا :

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} , \quad W = \begin{bmatrix} w_1 & 0 \\ 0 & w_2 \end{bmatrix} .$$

يظهر فى المعادلة النظامية للمسألة الجديدة، WA عوضاً عن A و Wb عوضاً عن

b. ولا يوجد خلاف ذلك أي جديد، وتظهر المصفوفة W^TW في كل من طرفي المعادلة النظامية المحملة :

ينتج حل المربعات الأصغرية للمعادلة $WAx = Wb$ من :

$$(A^TW^TWA)\,\overline{x}_w = A^TW^TWb.$$

ماذا يحدث للشكل الهندسي حيث أسقط b على $A\overline{x}$ ؟ يجب أن يتغير ذلك أيضاً. المسقط، أيضاً، هو نقطة فضاء الأعمدة الأكثر قرباً من b. لكن، لكلمة "أكثر قرباً" معنى جديدعندما يشمل الطول الحمل W . لقد عملنا بطول محمل لـ x معادلاً لطول Wx المعتاد. لم يعد التعامد يعني أن $y^Tx = 0$؛ في النظام الجديد؛ يصبح المعيار هو $(Wy)^T(Wx) = 0$. وتظهر المصفوفة W^TW في الوسط. في المعنى الجديد، المسقط Ax_w والخطأ $b - Ax_w$ متعامدان أيضاً.

يصف هذا البند الأخير **جميع الجداءات الداخلية** التي تنتج عن مصفوفة قابلة للعكس W . إنها تشمل التركيب المتناظر $C=W^TW$ فقط؛ الجداء الداخلي لـ x في y هو y^TCx. لاحظ أنه بالنسبة لمصفوفة قائمة $W = Q$، حيث التركيب $C = Q^TQ = I$، لن يكون الجداء الداخلي جديداً أو مختلفاً. ليس لمصفوفة أحمال قائمة أي تأثير، لأن دوران الفضاء يترك الجداء الداخلي ثابتاً. أي مصفوفة أخرى W تغير الطول والجداء الداخلي. *لكل مصفوفة قابلة للعكس W، تعرف القاعدة التالية جداءً داخلياً وطولاً جديدين :*

$$(x, y)_w = (Wy)^T(Wx) \quad , \quad \|x\|_w = \|Wx\|. \qquad (٧)$$

لما كانت W قابلة للعكس فإنه لايمكن أن يخصص الطول الصفري لأي متجه (سوى المتجه الصفري). يمكن إيجاد أي جداء داخلي باعتباره تركيباً خطياً في x و y وكونه موجباً عندما يكون $y=x\neq0$ ، من مصفوفة معينة W .

عملياً، السؤال المهم هو اختيار W (أو C). يأتي أفضل جواب من الإحصائيين، وأصلاً من غاوس. يمكننا أن نعرف أن معدل الخطأ صفر. تلك هي "القيمة المتوقعة"

للخطأ في b ـ رغم أنه من غير المتوقع أن يكون الخطأ صفراً ! ـ يمكننا ، أيضاً ، أن نعرف معدل **مربع** الخطأ الذي هو **التباين** . إذا كانت الأخطاء في القياسات b_i مستقلة فيما بينها وكان تباينها σ_i^2 فإن الأحمال الصحيحة هي $w_i = 1/\sigma_i$. الشيء الإضافي الذي نعلمه عن القياسات هو أنها تنعكس في تباين صغير ، والأمر الجدي أنها محملة .

بالاضافة إلى اختلاف الثقة ، **يمكن للملاحظات أن لاتكون مستقلة** . إذا ما تداخلت الأخطاء ـ التصويت للرئيس غير مستقل عن التصويت لمجلس النواب وحتماً ، غير مستقل عن التصويت لنائب الرئيس ـ فان W تحوي عناصر غير قطرية . أفضل مصفوفة غير متحيزة $C=W^TW$ هي معكوس **مصفوفة التغاير** ـ عنصرها i,j هو القيمة المتوقعة لجداء الخطأ في b_i بالخطأ في b_j . يحوي قطرها الرئيسي التباين σ_i^2 الذي هو معدل (الخطأ في b_i) ².

مثال : نفرض أنه قد خمن كل من لاعبي البريدج (بعد المزايدة) العدد الكلي للبستوني واستمرا في اللعبة ، يمكن لاحتمالات الأخطاء 1 ,0 ,1- المتعلقة بكل تخمين أن تكون متساوية ويساوي كل منها $\frac{1}{3}$ لذا فإن توقع الخطأ صفر وإن التباين يساوي $\frac{2}{3}$:

$$E(e) = \frac{1}{3}(-1) + \frac{1}{3}(0) + \frac{1}{3}(1) = 0$$
$$E(e^2) = \frac{1}{3}(-1)^2 + \frac{1}{3}(0)^2 + \frac{1}{3}(1)^2 = \frac{2}{3}.$$

التخمينان مترابطان لأنهما يقومان على المزايدة نفسها - إلا أنهما غير متساويين ، لأنهما ينظران إلى قبضتين مختلفتين . أي يحتمل أن يكون كل منهما الأعلى أو كل منهما الأدنى وهوا الصفر إلا أن احتمال نقيض الخطأ يساوي $\frac{1}{3}$. إذن ، $E(e_1e_2) = \frac{1}{3}(-1)$ وإن معكوس مصفوفة التغاير هو المصفوفة :

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = C = W^TW.$$

ندخل هذه المصفوفة في وسط المعادلات النظامية المحملة .

تمــاريــن

٣-٦-١ نفرض أن S و T فضاءان جزئيان من $\boldsymbol{R}^{13}$ حيث عدد أبعاد S هو 7 وعدد أبعاد T هو 8 .

(أ) ماهو أكبر عدد أبعاد ممكن لـ $S \cap T$ ؟

(ب) ماهو أصغر عدد أبعاد ممكن لـ $S \cap T$ ؟

(جـ) ماهو أصغر عدد أبعاد ممكن لـ $S+T$ ؟

(د) ماهو أكبر عدد أبعاد ممكن لـ $S+T$ ؟

٣-٦-٢ ماهو تقاطع أزواج الفضاءات الجزئية التالية ؟

(أ) المستوي x-y مع المستوي y-z في $\boldsymbol{R}^3$.

(ب) المستقيم الحامل لـ (1,1,1) والمستوي الحاوي لـ (1,0,0) و (0,1,1) .

(جـ) المتجه الصفري والفضاء الكلي $\boldsymbol{R}^3$.

(د) المستوي العمودي على (1,1,0) والمستوي العمودي على (0,1,1) في $\boldsymbol{R}^3$.

ماهي **مجاميع** هذه الأزواج من الفضاءات الجزئية ؟

٣-٦-٣ في فضاء المصفوفات من النوع 4×4 ، نفرض أن V الفضاء الجزئي للمصفوفات **الثلاثية الأقطار** و W الفضاء الجزئي للمصفوفات **المثلثية العليا**. صف الفضاء الجزئي $V+W$ الذي عناصره مصفوفات هيسنبرغ *Hessenburg*، والفضاء الجزئي $V \cap W$. حقق القانون (3) .

٣-٦-٤ إذا كان $V \cap W$ حاوياً فقط المتجه الصفري فإن (٣) تصبح $\dim(V+W) = \dim V + \dim W$. تحقق من ذلك، إذا كان V فضاء أسطر A و W قضاءها الصفري و A من النوع $m \times n$ والرتبة r . ماهي أبعاد هذه الفضاءات ؟

٣-٦-٥ اعط مثالاً من R^3 بحيث لايحوي $V \cap W$ سوى صفر المتجهات و V غير متعامد مع W .

٣-٦-٦ إذا كان $V \cap W = \{0\}$ فإن $V + W$ يدعى **المجموع المباشر** لـ V و W ويمثل بصورة خاصة، بالرمز $V \oplus W$. إذا كان V مولداً بالمتجهين (1,1,1) و (1,0,1)، اختر فضاءً جزئياً W بحيث يكون $V \oplus W = R^3$.

٣-٦-٧ فسر لماذا يمكن كتابة أي متجه x من المجموع المباشر $V \oplus W$ ، **بصورة واحدة ، فقط** من الشكل $x = v + w$ (حيث v من V و w من W) .

٣-٦-٨ جد أساساً للمجموع $V + W$ حيث V هو الفضاء المولد بالمتجهين $v_1 = (1,1,0,0)$ ، $v_2 = (1,0,1,0)$ و W المولد بالمتجهين $w_1 = (0,1,0,1)$ ، $w_2 = (0,0,1,1)$. جد أيضاً عدد أبعاد الفضاء $V \cap W$ وأساساً له .

٣-٦-٩ بين بمثال، أنه ليس من الضروري أن يحوي الفضاء الصفري لـ AB الفضاء الصفري لـ A، وأنه ليس من الضروري أن يكون فضاء أعمدة AB محتوى في فضاء أعمدة B .

٣-٦-١٠ أوجد أوسع مصفوفة جزئية قابلة للعكس وعين رتبتها لكل من :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad , \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

٣-٦-١١ نفرض أن A من النوع $m \times n$ و B من النوع $n \times m$ ، حيث $n < m$. برهن أن جداءهما AB شاذ .

٣-٦-١٢ برهن استناداً إلى (٣)، أن رتبة $(A + B)$ ٣ رتبة (A) + رتبة (B) .

٣-٦-١٣ إذا كانت A مربعة وقابلة للعكس، برهن أن لـ AB فضاء B الصفري نفسه، (وفضاء الأسطر نفسه والرتبة ذاتها) . إرشاد : طبق العلاقة أيضاً

على جداء A^{-1} بـ AB.

٣-٦-١٤ حلل A إلى جداء مصفوفة $\underline{L}$ من النوع $m \times r$ في مصفوفة $\underline{U}$ من النوع vxn:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \end{bmatrix} \text{ وكذلك } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

٣-٦-١٥ اضرب كل عمود من $\underline{L}$ بالسطر المقابل من $\underline{U}$ ثم اجمع لتحصل على الجداء $A = \underline{L}\ \underline{U}$ كمجموع r مصفوفة من الرتبة واحد. انشىء $\underline{L}$ و $\underline{U}$ والمصفوفتين ذواتي الرتبة واحد اللتين مجموعهما:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

٣-٦-١٦ برهن أن تقاطع ثلاثة فضاءات جزئية من R^8 بعدد أبعاد قدره(٦) لن يكون النقطة {0}. إرشاد: إلى أي مدى يكون صغر تقاطع الفضاءين الأولين bc ؟

٣-٦-١٧ أوجد التحليل $A = LDL^T$ ثم عاملي شولسكي في $(LD^{1/2})(LD^{1/2})^T$ للمصفوفة:

$$A = \begin{vmatrix} 4 & 12 \\ 12 & 45 \end{vmatrix}.$$

٣-٦-١٨ حقق القضية "كل متجه y من $V \cap W$ يأتي من متجه x واحد، فقط، من $\mathcal{N}(D)$" وذلك بوصف كيف يمكن، انطلاقاً من y ، العودة إلى المعادلة(٥) وإيجاد x.

٣-٦-١٩ ماذا يحصل للمعدل المحمل $\bar{x}_w = (w_1^2 b_1 + w_2^2 b_2) / (w_1^2 + w_2^2)$ إذا سعى الحمل الأول w_1 إلى الصفر ؟ القياس b_1 غير موثوق أبداً.

٣-٦-٢٠ انطلاقاً من m من القياسات المستقلة $b_1,....,b_n$ لمعدل نبضك، محملة بالاحمال $w_1,....,w_n$ ، ماهو المعدل المحمل الذي يقع محل (٦)؟ إنه أفضل تقدير عندما يكون التباين الاحصائي $\sigma_i^2 = 1/w_i^2$.

٣-٦-٢١ إذا كانت $W = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، أوجد الجداء الداخلي وفق W للمتجهين $x = (2,3)$ و $y = (1,1)$ وطول x وفق W . ماهو المستقيم المتعامد وفق W مع y ؟

٣-٦-٢٢ أوجد حل المربعات الأصغرية المحملة $\overline{x}_w$ لـ $Ax = b$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad W = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

تحقق من أن المسقط $A\,\overline{x}_w$ يبقى عمودياً (في الجداء الداخلي وفق W) على الخطأ $b - A\,\overline{x}_w$.

٣-٦-٢٣ (أ) أفرض أنك خمنت عمر أستاذ لك مرتكباً الاخطاء $e = -2, -1, 5$ بالاحتمالات $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{2}$. تحقق من أن خطأ التقدير $E(e)$ يساوي الصفر وأوجد التباين $E(e^2)$.

(ب) إذا خمن الاستاذ أيضاً (أو حاول التذكر) مرتكباً الاخطاء $-1, 0, 1$ بالاحتمالات $\frac{1}{8}$ ، $\frac{6}{8}$ ، $\frac{1}{8}$ ، ماهما الحملان w_1 و w_2 اللذان يعطيان للثقة بتقديراتك وتقديرات الاستاذ؟

٣-٦-٢٤ نفرض أننا أخذنا معاً r سطراً و q عموداً تحوي جميع العناصر غير الصفرية من مصفوفة A. برهن أن الرتبة لاتزيد على $r + q$. ما أضخم كتلة مربعة من الاصفار يمكن أن تقع في قرنة مصفوفة من النوع 9×9 ليمكنك أن تؤكد كون المصفوفة شاذة ؟

تمــاريــن مراجعة

٣-١ أوجد طول $a = (2,-2,1)$ وأوجد متجهين مستقلين متعامدين مع a .

٣-٢ أوجد جميع المتجهات المتعامدة مع $(1,3,1)$ و $(2,7,2)$ اجعل منها مصفوفة Aوحل النظام $Ax = 0$.

٣-٣ ماهي زاوية المتجهين $a = (2,-2,1), b = (1,2,2)$ ؟

٣-٤ ماهي p مسقط $b = (1,2,2)$ على $a = (2,-2,1)$ ؟

٣-٥ أوجد جيب تمام زاوية المتجهين $(4,3)$ و $(3,4)$.

٣-٦ أين يقع مسقط $b = (1,1,1)$ على المستوي المولد بالمتجهين $(1,1,0)$ و $(1,0,0)$؟

٣-٧ هل صحيح أن النظام $Ax = b$ يكون قابلاً للحل إذا وإذا فقط، كان b متعامداً مع كل من الفضاءات الجزئية الاساسية الأربعة ؟

٣-٨ ماهو المستقيم الأكثر ملاءمة للمعطيات التالية : $b=0$ عند $t=0$ و $b=0$ عند $t=1$ و $b=12$ عند $t=3$ ؟

٣-٩ انشيء مصفوفة الإسقاط P على الفضاء المولد بالمتجهين $(0,1,3)$ و $(1,1,1)$.

٣-١٠ ماهي الدالة الثابتة الأكثر قرباً من $y = x^4$ ، وفق مفهوم المربعات الأصغرية، على الفترة ٢٥ x ١٢ ؟

٣-١١ إذا كانت Q قائمة، فهل يتحقق الامر ذاته من أجل Q^3 ؟

٣-١٢ أوجد جميع المصفوفات القائمة من النوع 3×3 التي كل عنصر فيها يساوي الصفر أو الواحد .

٣-١٣ أي مضاعف لـ a_1 يجب طرحه من a_2 ليكون الناتج متعامداً مع a_1؟ارسم شكلاً .

٣-١٤ فرق المصفوفة التالية بالصورة QR . لاحظ أن العمود الأول متجه وحدة

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & 0 \end{bmatrix}$$

٣-١٥ إذا كان كل عنصر من مصفوفة قائمة يساوي 1/4 أو 1/4- فما هي ضخامة هذه المصفوفة ؟

٣-١٦ افرض أن المتجهات $q_1,....,q_n$ متعامدة نظامية وإذا كان $b = c_1q_1 +.....+ c_nq_n$ اعط قانوناً يعطي المعامل الأول c_1 بدلالة b والمتجهات q_i .

٣-١٧ بأي كلمات تصف المعادلة $A^TA\,\overline{x} = A^Tb$ والمتجه $p = A\,\overline{x}$ $=pb$ والمصفوفة $P = A\,(A^TA)^{-1}A^T$ ؟

٣-١٨ إذا كان المتجهان المتعامدان النظاميان $q_1 = (\frac{1}{3}-, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ و $q_2 = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}-)$ عمودي Q ، فما هما المصفوفتان Q^TQ و $Q\,Q^T$ ؟ برهن أن $Q\,Q^T$ مصفوفة إسقاط (على مستوي q_1,q_2) .

٣-١٩ إذا كان $v_1,....,v_n$ أساساً متعامداً نظامياً لـ $\boldsymbol{R^n}$، برهن أن :

$v_1v_1^T +......+ v_nv_n^T = I$.

٣-٢٠ *خطأ أم صواب* : إذا كان المتجهان x,y متعامدين وكانت P مصفوفة إسقاط فإن px,Py متعامدان أيضاً .

٣-٢١ حاول إيجاد مستقيم $b = C + Dt$ مار من النقطتين $b = 0, t = 2$ و $b = 6, t = 2$ وبرهن أن المعادلة النظامية تتعطل في هذه الحالة . ارسم جميع المستقيمات المفضلة ، مصغراً مجموع مربعي الخطأين .

٣-٢٢ ماهي أقرب نقطة في المستوي $x + y - z = 0$ من $b = (2,1,0)$ ؟

٣-٢٣ أوجد أساساً قائماً للفضاء R^3 منطلقاً من المتجه $(1,1,-1)$.

٣-٢٤ يفحص جهاز أشعة X الجديد (*CT scanners*) المريض من اتجهات مختلفة ويقدم مصفوفة تعطي كثافة العظم والنسيج في كل نقطة . رياضياً تهدف

هذه المسألة إلى استخلاص مصفوفة من مساقطها . هل يمكنك في الحالة 2×2 استخلاص المصفوفة A إذا علمت المجموع على كل سطر وكل عمود؟

٣-٢٥ هل يمكنك أن تستخلص مصفوفة من النوع 3×3، إذا عرفت مجاميع أسطرها ومجاميع أعمدتها بالإضافة إلى مجموع قطرها الرئيسي والأقطار الأخرى الأربعة الموازية ؟

٣-٢٦ أوجد أساساً متعامداً نظامياً للمستوي $x - y + z = 0$ وأوجد المصفوفة P التي تسقط على هذا المستوي . ماهو الفضاء الصفري لـ P ؟

٣-٢٧ نفرض $A = [\ 3\ \ 1\ \ -1\ ]$ وV الفضاء الصفري لـ A .

(أ) أوجد أساساً لـ V وآخر لـ $V^{\perp}$.

(ب) اكتب أساساً متعامداً نظامياً لـ $V^{\perp}$ وأوجد P_1 المصفوفة التي تسقط متجهات $\boldsymbol{R}^3$ على $V^{\perp}$.

(جـ) أوجد المصفوفة P_2 التي تسقط متجهات $\boldsymbol{R}^3$ على V .

٣-٢٨ استخدم طريقة غرام شميدت وأنشىء متجهين q_1 ، q_2 متعامدين نظاميين انطلاقاً من $a_1 = (4,5,2,2)$ و $a_2 = (1,2,0,0)$. عبر عن a_1 و a_2 كتركيبين في q_1 وq_2 واكتب المصفوفة المثلثية R بالصورة $A = QR$.

٣-٢٩ لأي A,b,x,y برهن أن :

(١) إذا كان $Ax = b$ و $y^T A = 0$ فان $y^T b = 0$ ؛

(٢) إذا كان $Ax = 0$ و $A^T y = b$ فان $x^T b = 0$.

ماهي النظرية التي تقوم بهذا البرهان من أجل الفضاءات الجزئية الأساسية؟

٣-٣٠ هل توجد مصفوفة يحوي فضاء أسطرها $(1,1,0)$ ويحوي فضاؤها الصفري $(0,1,1)$ ؟

٣-٣١ البعد بين نقطة الأصل والمستوي $a^Tx = c$ في فضاء ذي m بعداً يساوي $|c| / \|a\|$ ماهو بعد المستوي $x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 8$ عن نقطة الأصل؟ وماهو أقرب نقطة منها ؟

٣-٣٢ برهن في متوازي أضلاع تقع رؤوسه في $0, v, w, v + w$ ، أن مجموع مربعات أطوال أضلاعه الأربعة يساوي مجموع مربعي طولي قطريه .

٣-٣٣ (أ) أوجد أساساً متعامداً نظامياً لفضاء أعمدة :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 6 \\ 4 & 8 \\ 5 & 0 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

(ب) اكتب A بالصورة QR حيث أعمدة Q متعامدة نظامية و R مثلثية عليا .

(جـ) أوجد حل المربعات الأصغرية للنظام $Ax = b$ إذا كان $b = (-3,7,1,0,4)$

٣-٣٤ أوجد التقاطع $V \cap W$ والمجموع $V + W$ إذا كان :

(أ) V هو الفضاء الصفري للمصفوفة A و W فضاء أسطرها .

(ب) V المصفوفات المتناظرة من النوع 3×3 و W المصفوفات المثلثية العليا من هذا النوع .

٣-٣٥ إذا كانت $W = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ مصفوفة أحمال فماهو الجداء الداخلي وفق W للمتجهين $(1,0)$ و $(0,1)$ ؟

٣-٣٦ لحل نظام مستطيل، نعوض A^{-1} (غير الموجودة) بالمصفوفة $(A^TA)^{-1}A^T$ (وهي موجودة إذا كان لـ A أعمدة مستقلة) . برهن أن هذه المصفوفة معكوس يساري لـ A ولكنها ليست معكوساً يمينياً . بالضرب من اليسار في A، تنتج مصفوفة الوحدة؛ بالضرب من اليمين ، تعطى مصفوفة إسقاط P .

٣-٣٧ أوجد المستقيم $C + Dt$ الذي هو أفضل ملائم للقياسات $b = 0,1,2,5$ في الأزمنة $t = 0,1,3,4$.

٣-٣٨ أوجد المنحني $y = C + D2^t$ الذي يعطي ملاءمة مربعات أصغرية للقياسات :

$y = 6$ في $t = 0$ ، $y = 4$ في $t = 1$ ، $y = 0$ في $t = 2$. اكتب المعادلات الثلاث التي يمكن حلها إذا مر المنحني من النقاط الثلاث وأوجد أفضل C و D .

٣-٣٩ إذا كانت أعمدة A متعامدة فيما بينها ، ماذا يمكنك أن تقول حول شكل A^TA؟ وإذا كانت الأعمدة متعامدة نظامية فماذا يمكنك أن تقول عندئذٍ ؟

٣-٤٠ تحت أي شرط على أعمدة A (التي يمكن أن تكون مستطيلة) تكون A^TA قابلة للعكس ؟

الفصل الرابع

المحددات

٤-١ تمهيد

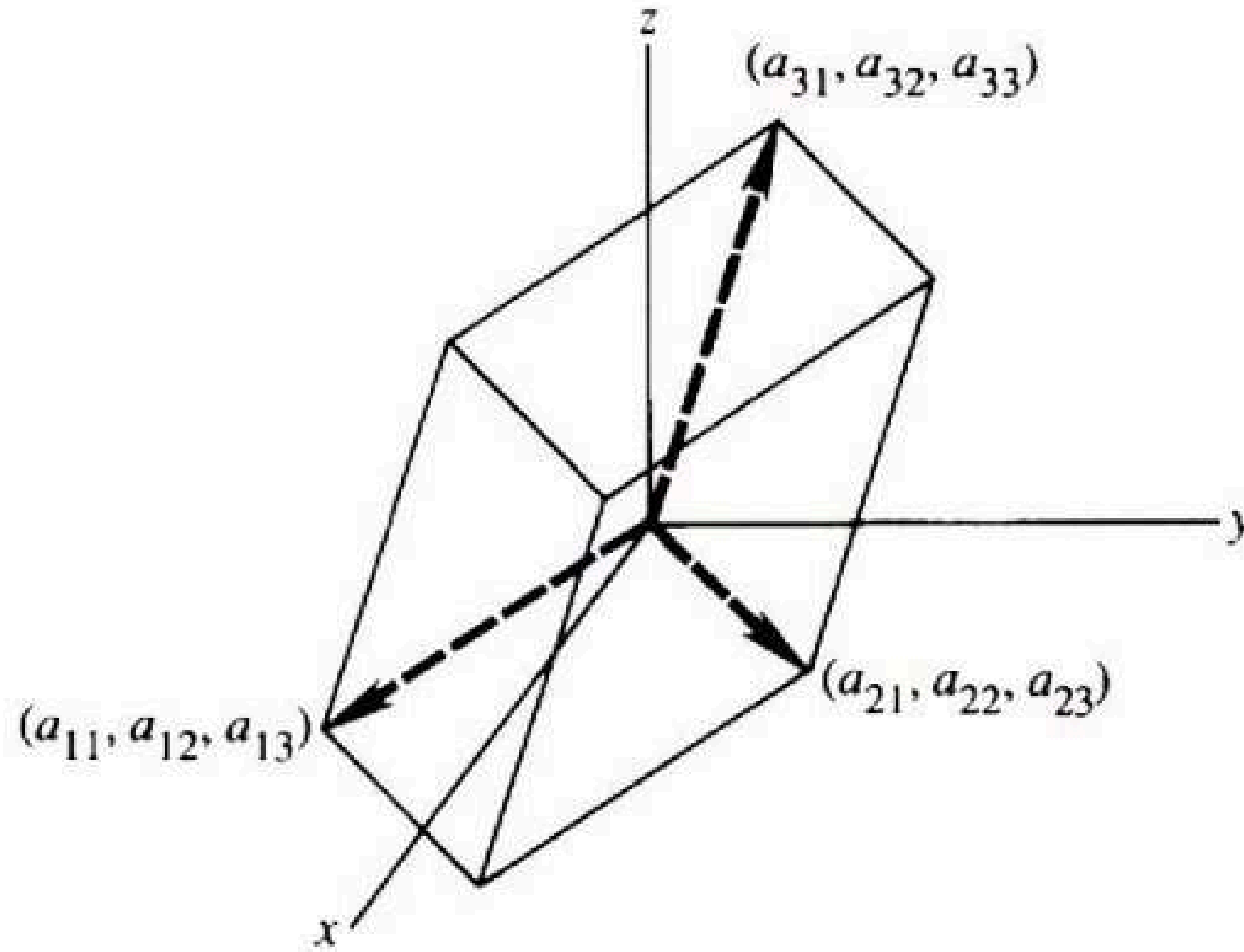
من الصعب معرفة ماذا علينا أن نقول عن المحددات. قبل سبعين سنة مضت كان لها أهمية واهتمام أكثر من المصفوفات التي نتجت عنها. لقد شغل تاريخ المحددات لـ *Muir* أربع مجلدات. تابعت الرياضيات، رغم ذلك، تغير هذا الاتجاه، فالمحددات تقع، حالياً، في موقع بعيد عن مركز الجبر الخطي. رغم ذلك، فإنه يمكن لعدد واحد، هو قيمة المحددة، أن يعطيك معلومات ليست قليلة عن المصفوفة. ولايزال مايقدر هذا العدد على عمله أمراً مدهشاً.

إليك إحدى وجهات النظر: توفر المحددة «قانوناً» صريحاً مختصراً ومحدداً بصورة محكمة لأشياء رياضية مثل A^{-1}. لايتغير هذا القانون سواء أردنا حساب A^{-1} أو $A^{-1}b$، رغم أن المحددة ذاتها قد وجدت نتيجة لطريقة الحذف. في الحقيقة، يمكن اعتبار طريقة الحذف انجع طريقة للتعويض بعناصر مصفوفة معينة A في هذا القانون. الأمر المهم هنا هو كون القانون العام يبين كيف تتعلق هذه الكمية التي تريدها بعناصر المصفوفة التي عددها n^2، كما يوضح كيف تتحول هذه الكمية عندما تتحول تلك العناصر.

يمكننا أن نقدم، فيما يلي، قائمة بالاستعمالات الأساسية للمحددات:

(١) تعطي معياراً لقابلية العكس. *إذا كانت محددة مصفوفة* A *مساوية الصفر*

فان A شاذة وإذا كانت $det\ A \neq 0$ فان A قابلة للعكس. إن أهم تطبيق للمحددة هو طائفة المصفوفات $A - \lambda I$، وإن ذلك سبب اعتبار هذا الباب باباً أساسياً في هذا الكتاب. لقد طرح الوسيط λ من كل عنصر من عناصر القطر الرئيسي وستكون المسألة هي إيجاد قيم λ (*القيم الذاتية*) التي تجعل المصفوفة $A - \lambda I$ شاذة. المعيار هنا هو معرفة ما إذا كانت محددة هذه المصفوفة صفراً. سنرى أن $det\ (A - \lambda I)$ كثيرة حدود من الدرجة n في λ. لذا، فإن لها n جذراً بتعداد المضاعف منها؛ أي أن للمصفوفة n من القيم الذاتية. ينتج ذلك عن قانون المحددة وليس عن حسابها.



شكل (٤-١). متوازي السطوح المكون من أسطر A.

(٢) تساوي محددة A حجم متوازي سطوح P في فضاء ذي n بعداً، شرط أن تنتج أضلاع P عن أسطر A (شكل ٤-١)[1]. عملياً، غالباً مايكون P عنصر حجم لامتناه في الصغر، يظهر في تكامل مضاعف. أبسط هذه العناصر حجم مكعب صغير $dV = dxdydz$، كما في $\iiint f(x, y, z)\, dV$. لنفرض، من أجل تبسيط هذا التكامل، أننا

---

(١) يمكن لهذه الأضلاع أن تنتج عن أعمدة A، فنحصل على متوازي سطوح مختلف ولكنه من الحجم ذاته.

قررنا تبديل المتغيرات إلى المتغيرات الاسطوانية r,θ,z ، حيث. $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = z$ كما نذكر، من أجل حالة المتغير الواحد، حيث يمدد التفاضل dx ليصبح $du\ (dx/du)$ - عندما نضع u مكان x في التكامل الأحادي - كذلك يتمدد العنصر الحجمي $dV = dxdydz$ في فضاء الأبعاد الثلاثة لكي يصبح $J\, dr\, d\theta\, dz$ ، حيث *المحددة اليعقوبية* ذات أبعاد ثلاثة مشابهة لمعامل التمدد dx/du :

$$J = \begin{bmatrix} \partial x/\partial r & \partial x/\partial \theta & \partial x/\partial z \\ \partial y/\partial r & \partial y/\partial \theta & \partial y/\partial z \\ \partial z/\partial r & \partial z/\partial \theta & \partial z/\partial z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

قيمة هذه المحددة هي $J = r$. يساوي العنصر الحجمي في الإحداثيات الاسطوانية العنصر الحجمي $r\, d r\, d\theta\, d z$. هذا العنصر هو حجم متوازي السطوح الصغير. (يظهر منحنياً إذا حاولنا رسمه ولكن من المقبول اعتبار أضلاعه مستقيمة عندما تكون لامتناهية في الصغر).

(٣) تعطي المحددة قانوناً للمحاور. نظرياً، يمكننا أن نستخدم المحددة للتنبؤ عن وجود محور صفري وما إذا كان من الضروري إجراء مبادلة سطرية. والأمر الأكثر أهمية الذي ينتج عن قانون المحددة هو : *(جداء المحاور)* $\det A = \pm$ ؛ هذا يعني، *مهما كان ترتيب الحذف، أن جداء المحاور يبقى نفسه، دون النظر في الإشارة*. قبل سنين عديدة، كان يقود ذلك إلى الاعتقاد بأنه ليس هناك جدوى من التهرب من محور صغير جداً باجراء مبادلة سطرية لأن هذا المحور سيلاحقنا. إلا أن مايحدث عادة في التطبيق، إذا لم نتحاش محوراً صغيراً بصورة غير عادية، فانه سينتج عن ذلك مباشرة محور آخر غير عادي في الكبر؛ إن ذلك يبقي الجداء ثابتاً ولكنه يحبط الحل العددي.

(٤) تقيس المحددة ارتباط $A^{-1}b$ بكل عنصر من b. إذا استبدل وسيط في اختبار أو إذا صلح رصد، فان 'معامل التأثير' في $x = A^{-1}b$ هو نسبة محددتين.

هناك مسألة أخرى تتعلق بالمحددة. ليس من الصعب تحديد أهميتها ووضعها الخاص في نظرية الجبر الخطي، فقط، بل من الصعب، أيضاً، تحديد تعريفها. من

الواضح أن $det\,A$ لن تكون دالة شديدة البساطة في n^2 من المتغيرات؛ خلافاً لذلك، سيكون من السهل جداً اكتشاف كون A^{-1} متمتعة بذلك. يتطلب القانون الصريح الوارد في (٤-٣) إلى شرح كثير، كما أن علاقته بالمعكوس بعيدة عن أن تكون واضحة.

ليست الأشياء البسيطة المتعلقة بالمحددة هي القوانين الصريحة التي تعبر عنها، بل تلك الخواص التي تتمتع بها. ذلك مايفرض علينا المكان الملائم للبدء. يمكن تعريف المحددة (وسيكون ذلك) بخواصها الثلاث الاساسية. المسألة هي إذاً، معرفة كيف يمكن حساب قيمة محددة باستخدام هذه الخواص بصورة نظامية. يعيدنا ذلك إلى الحذف الغاوسي وإلى إيجاد المحاور. المسألة النظرية الأكثر صعوبة هي أن نبين أنه مهما كان الترتيب الذي تستخدم به هذه الخواص، فإن النتيجة تبقى ذاتها ـ هذه الخواص مستقلة فيما بينها.

يقدم البند التالي خواص المحددة ونتائجها الأكثر أهمية. ثم يعطي البند (٤-٣) عدداً من قوانين المحددة ـ أحدها قانون صريح ذو $n!$ حداً، وآخر قانون "استقرائي" والثالث هو ذلك القانون الذي يشمل المحاور (التي بها تحسب عادة محددة مصفوفة كبيرة). في البند ٤-٤، تستخدم المحددة لإيجاد A^{-1} ومن ثم لإيجاد الحل $x = A^{-1}b$؛ أخيراً، نقدم *قاعدة كرامر* *Cramer*. في النهاية، نبرهن بملاحظة اختيارية تتعلق بالتباديل، أن هذه الخواص منسجمة فيما بينها ـ أي أنه ليس هناك أي التباس في التعريف

٤ - ٢ خواص المحددة

سيكون ذلك قائمة طويلة ولكن لحسن الحظ، هذه الخواص سهلة الفهم وسهلة التوضيح بمثال من النوع 2×2. لذا، فإننا سنحقق أن التعريف المعتاد للمحددة ذات النوع 2×2،

$$\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc,$$

يمتلك كل خاصة في هذه القائمة. (هناك رمزان مقبولان لمحددة مصفوفة A هما $|A|$ أو $\det A$.) سنبين أيضاً أنه يمكن استنتاج الخاصة الرابعة وما بعدها، من الخواص السابقة. أي أن كل خاصة للمحددة تنتج عن الخواص الثلاث الأول[1] .

(١) *المحددة دالة خطية في عناصر السطر الأول*. هذا يعني أنه إذا كانت المصفوفات A,B,C متطابقة من السطر الثاني وما بعده نزولاً ـ وكان السطر الأول من A تركيباً خطياً للسطرين الأولين من B,C، فإن القاعدة تقول: $\det A$ هي التركيب الخطي ذاته في $\det C$، $\det B$.

التركيب الخطي يحوي عمليات ـ ضرب بعدد بالاضافة إلى جمع متجهات. لذا، يمكن تجزئة هذه القاعدة إلى جزءين:

$$\begin{vmatrix} a + a' & b + b' \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} ta & tb \\ c & d \end{vmatrix} = t\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

نريد أن نؤكد أن الجزء الأول لايمثل العلاقة الخاطئة $\det(B + C) = \det B + \det C$. لايمكنك جمع كل الأسطر: يمكن لسطر واحد فقط أن يتغير. يعطي الطرفان معاً الجواب $ad + a'd - bc - b'c$.

بصورة مشابهة الجزء الثاني لايمثل العلاقة الخاطئة $\det(tA) = t \det A$. للمصفوفة tA العامل t في كل سطر (وأخيراً كل واحد منها يضرب المحددة بـ t). يشبه ذلك حجم صندوق عندما نضرب كل حرف فيه بالعدد (٤). في n بعداً، يضرب

---

١) نؤكد أن القواعد التالية تطبق على المصفوفات المربعة من كل حجم وبصورة خاصة، القاعدة الأولى التي هي حيلة بارعة ولكنها دقيقة.

الحجم والمحددة بـ 4^n . إذا ضرب حرف واحد بالعدد (٤) فان الحجم والمحددة يضربان بـ ٤ . هذه هي القاعدة الأولى .

القاعدة التالية تبين أنه لايوجد شيء خاص بالسطر الأول .

(٢) *تغير المحددة إشارتها عندما نبادل بين سطرين منها* :

$$\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = cb - ad = - \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

ينتج عن ذلك أن المحددة تتعلق خطياً *بكل سطر منفرداً* . إذا ضرب السطر ٢ بالعدد ٤ ، فانه يمكننا مبادلته مع السطر الأول (مبدلين إشارة المحددة)، ثم نخرج العامل ٤ إلى الخارج (القاعدة ١) ثم نبادل بين السطرين مرة ثانية (مبدلين الإشارة إلى التي انطلقنا منها) . لذا، يمكن تطبيق القاعدة الأولى على كل سطر .

للقاعدة (٢) أهمية ذاتية؛ إنها تؤدي إلى محددة مصفوفة المبادلة . بمتسلسلة من المبادلات السطرية ، يمكننا أن نعيد مصفوفة المبادلة إلى مصفوفة الوحدة . تحول كل مبادلة سطرية إشارة المحددة ـ لذا، فإننا نحتاج إلى محددة مصفوفة الوحدة . إنها أبسط القواعد .

(٣) *محددة مصفوفة الوحدة تساوي الواحد* :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad \text{و} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad \text{و} \quad \ldots$$

تترك القاعدتان الأولى والثانية سلم القياس غير محدد؛ القاعدة ٣ تحدد ذلك . يوجد «فضاء ذو بعد واحد» للمحددات الممكنة ، تختار هذه القاعدة واحدة منها بتنظيم $\det I = 1$.

لقد توضحت الآن دعائم المحددة ولكن هذا الأمر ليس واضحاً بصورة كاملة . لذا نستخدم بالتدريج هذه القواعد لإيجاد محددة مصفوفة .

(٤) *إذا كان سطران من A متساويين فان* $\det A = 0$.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = ab - ba = 0.$$

ينتج هذا عن القاعدة (٢)، لأنه إذا بادلنا بين السطرين المتساويين، فإنه من المفروض أن تغير المحددة إشارتها. ولكن عليها، أيضاً، أن تبقى كما هي لأن المصفوفة لم تتغير. من المعلوم أن الصفر هو العدد الوحيد الذي يمكن أن يكون له إشارتان مختلفتان، لذا، لابد أن يكون $\det A = 0$. (تصبح هذه المحاكمة خاطئة إذا كان $1 = -1$ كما هو الحال في الجبر البولياني. لذا فان (٤) يجب أن تأخذ مكان (٢) كواحدة من الخواص الاساسية.)

(٥) *العملية الأولية التي تقوم بطرح مضاعف سطر من سطر آخر لا تغير شيئاً في قيمة المحددة.*

$$\begin{vmatrix} a - lc & b - ld \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

في هذه الحالة، تظهر القاعدة الأولى حداً إضافياً $\begin{vmatrix} c & d \\ c & d \end{vmatrix}$ $l-$ ، لكن القاعدة (٤) تؤكد أن هذا الحد الإضافي يساوي الصفر. ليس لخطوات الحذف المعتادة أي تأثير على المحددة.

(٦) *إذا* حوت A ***سطراً صفرياً فإن*** $\det A = 0$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{vmatrix} = 0.$$

أحد البراهين هو اضافة أحد الأسطر الأخرى إلى السطر الصفري، الأمر الذي لايغير قيمة المحددة وفق (٥)، وبما أن المحددة ستحوي، عندئذ، سطرين متطابقين، فإن $\det A = 0$ وفق (٤) .

(٧) *إذا كانت A مثلثية فان $det\ A$ تساوي الجداء $a_{11}a_{22}...a_{nn}$ لعناصر القطر الرئيسي*. بصورة خاصة، *إذا كان كل عنصر من هذا القطر يساوي الواحد فإن* $det\ A = 1$.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d \end{vmatrix} = ac, \quad \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & d \end{vmatrix} = ad.$$

البرهان : لنفرض أن عناصر القطر ليست جميعها أصفاراً، لذا، فإن العمليات الأولية ستحذف جميع العناصر غير القطرية دون أن يتغير شيء في قيمة المحددة (وفق ٥). إذا كانت A مثلثية دنيا فإن الخطوات، كما هو المعتاد، تبدأ من المحور الأول. أما إذا كانت مثلثية عليا فإن العمود الأخير هو الذي يفرغ أولاً ـ مستخدمين a_{nn} الواقع في القرنة الدنيا. بكل من هاتين الطريقتين، نصل إلى المصفوفة القطرية.

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & & \\ & \cdots & \\ & & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

لإيجاد المحددة، نطبق بصبر القاعدة (١) : نخرج a_{11} خارج المحددة ثم a_{22} وأخيراً a_{nn}، فتبقى لدينا مصفوفة الوحدة التي نعرف قيمة محددتها.

$$\det\ D = a_{11}\, a_{22}\ \dots\ a_{nn}\ \det I = a_{11}\, a_{22}\ \dots\ a_{nn}\,.$$

بالمقابل، *إذا كان عنصر في القطر صفراً فان الحذف ينتج سطراً من الأصفار*. استناداً إلى القاعدة (٥)، خطوات الحذف لاتغير المحددة؛ واستناداً إلى (٦) يؤدي السطر الصفري إلى محددة صفرية. وبذلك تكون (٧) قد برهنت.

عندما تكون مصفوفة مثلثية شاذة (بسبب صفر على قطرها الرئيسي) فإن محددتها تساوي الصفر. القاعدة التالية تبين أن هذه المحددة هي محددة كل مصفوفة شاذة.

(٨) *إذا كانت A شاذة فان $det\ A = 0$ وإذا كانت A قابلة للعكس فإن* $det\ A \neq 0$.

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ شاذةإذا و إذا فقط كان $ad - bc = 0$

إذا كانت A شاذة فان العمليات الأولية تؤدي إلى مصفوفة U تحوي سطراً صفرياً، ينتج عن (٥) و (٦)، أن $det\, A = 0$. لنفرض العكس، أن A غير شاذة، إن العمليات الأولية والمبادلات بين الأسطر تؤدي إلى مصفوفة U لا يحوي قطرها الرئيسي أصفاراً. هذه العناصر هي المحاور $d_1,...,d_n$ ونتيجة للقاعدة (٧) نجد: $det\, A = \pm\, det\, U = d_1 d_n$ ..... d_n. **حصلنا هنا على أول قانون للمحددة**. تتعلق إشارة الزائد أو الناقص، استناداً إلى (٢)، بكون عدد المبادلات السطرية زوجياً أم فردياً.

الخاصة التالية أكثرها مفاجأة

(٩) لكل مصفوفتين من النوع $n \times n$، تساوي محددة جدائهما جداء محددتيهما: $det\,(AB) = (det\, A)\,(det\, B)$.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{vmatrix}.$$

حالة خاصة لهذه القاعدة تعطي محددة A^{-1}على أنها $1/det\, A$:

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} \quad \text{لذا} \quad (\det A)(\det A^{-1}) = \det AA^{-1} = \det I = 1$$

في الحالة 2×2، تكون قاعدة الضرب كما يلي

$$(ad - bc)(eh - fg) = (ae + bg)(cf + dh) - (af + bh)(ce + dg).$$

في الحالة $n \times n$، سنقدم لهذه القاعدة التي هي، بحق، أقل القواعد التي قدمناها حتى الآن وضوحاً، برهانين مختلفين نفرض في كل منهما أن A و Bغير شاذتين؛ إذا لم يكن ذلك، فإن AB شاذة ومن السهل، في هذه الحالة، التحقق من المعادلة $det\, AB = det\, A\,.\, det\, B$ وذلك استناداً إلى (٨) حيث تصبح $0 = 0$.

(أ) لننظر في النسبة $d\,(A) = det\, AB / det\, B$ ولنبرهن أنها تتمتع بالخواص (١) إلى (٣). بما أن هذه الخواص تعرف المحددةفإن على $d\,(A)$ أن تكون

مساوية $\det A$. كمثال، نفرض أن A مصفوفة الوحدة، فيكون بالتأكيد $d(I) = \det B / \det B = 1$؛ لذا، تكون القاعدة (٣) محققة بواسطة $d(A)$. إذا بادلنا بين سطرين من Aفان ذلك يتحقق أيضاً من أجل السطرين نفسهما من AB وتتغير بذلك إشارة d كما تتطلب القاعدة (٢) . وإن وجود تركيب خطي في السطر الأول من A يؤدي إلى وجود التركيب الخطي ذاته في السطر الأول من AB. لذا ، فإن تحقق القاعدة (١) على محددة AB مقسومة على العدد الثابت $\det B$ يؤدي إلى تحقق القاعدة (١) على النسبة $d(A)$. لذا فان $d(A)$ تتطابق مع المحددة ويكون $\det AB / \det B = \det A$. هذا هو قانون الجداء .

(ب) البرهان الثاني أقل روعة من الأول . ينطلق بفرض A مصفوفة قطرية D. فينتج عن القاعدة (١) أن $\det DB = \det D \det B$ ، وذلك باخراج كل عنصر d_i من القطر خارج سطره . من أجل مصفوفة عامة A ، نرجعها إلى D بوساطة سلسلة من خطوات حذف غاوس ـ جوردان ـ ننتقل أولاً من (A) إلى U بوساطة متتالية الخطوات المعتادة، ثم من U إلى D باستخدام كل محور ليحدث أصفاراً فوقه . المحددة لاتتغير بكل ذلك إلا بانقلاب الإشارة نتيجة كل مبادلة بين سطرين . ترد الخطوات ذاتها AB إلى DB، ويحصل التأثير ذاته على المحددة . لقد تأكد لنا سابقاً أن القاعدة (٩) صحيحة من أجل DB.

(١٠) *لمنقول A محددة A ذاتها* $\det A^T = \det A$.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}.$$

نعزل هنا ، أيضاً ، الحالة الشاذة؛ إذا كانت A شاذة فان A^T كذلك ونحصل على $0 = 0$. إذا كانت A غير شاذة فاننا نقر بصحة التحليل $PA = LDU$ وتطبق القاعدة السابقة (٩) على محددة الجداء :

$$\det P \det A = \det L \det D \det U . \qquad (١)$$

لنجري النقل على $PA = LDU$ فنجد $A^TP^T = U^TD^TL^T$ ولنطبق القاعدة (٩) مرة ثانية ،
$\det A^{\mathrm{T}} \det P^{\mathrm{T}} = \det U^{\mathrm{T}} \det D^{\mathrm{T}} \det L^{\mathrm{T}}$.

إن الأمر هنا أسهل مما يبدو لكون L, U, L^T, U^T مصفوفات مثلثية عناصرها القطرية تساوي الواحد . استناداً إلى القاعدة (٧)، محددة كل واحدة من هذه المصفوفات تساوي الواحد وكذلك تساوي كل مصفوفة قطرية منقولها، $D = D^T$، لذا، يبقى لدينا، فقط، مصفوفات المبادلة .

من المؤكد أن محددة P تساوي إما (١) أو (-١) لأنها نتجت عن مصفوفة الواحدة بمتتالية من مبادلات الأسطر . ولنلاحظ أيضاً أن $PP^T = I$. (عند ضرب P^T و P، يتعامل العدد (١) من العمود الأول من P مع العمود الأول من P^T ، دون أن يؤثر في أي واحد موجود في الأعمدة الأخرى .) أي أن $\det P \det P^T = \det I = 1$، وهذا يعني أن لـ P^T و P المحددة ذاتها، ذلك لأن كلاً منها تساوي (-١) أو كلاً منها تساوي (+١) .

نستنتج من ذلك أن الجداءين (١) و (٢) متطابقان وأن $\det A = \det A^T$. إن هذه الحقيقة تضاعف قائمة الخواص، لأنه يمكن تطبيق أي قاعدة تتعلق بالأسطر على الأعمدة : *تغير المحددة إشارتها عندما نبادل بين عمودين فيها*، *كون عمودين متساويين (أو عمود صفري) ينتج محددة صفرية*، *والمحددة تتعلق خطياً بكل عمود منفرداً*. يقوم برهان ذلك على نقل المصفوفة والعمل على الأسطر .

نرى أنه جاء الوقت الذي علينا أن نتوقف فيه وأن نعلن أن القائمة قد اكتملت . بقي علينا، فقط، أن نجد قانوناً محدداً للمحددة وأن نضع هذا القانون في الاستعمال .

تمـــاريـــن

٤-٢-١ ماهي $\det(2A)$ بدلالة $\det A$ وعلاقة $\det(A^2)$ بـ $\det A$ عندما تكون A من النوع $n \times n$ ؟

٤-٢-٢ برهن - بتنفيذ كل خطوة في المثال 2×2 - أن مبادلة بين السطرين j و i، يمكن اجراؤها باضافة السطر i إلى السطر j، ثم طرح السطر الجديد j من السطر i، ثم إضافة السطر الجديد i إلى السطر j، وأخيراً، ضرب السطر i بـ -1. ماهي القواعد التي يمكن استخدامها لاستنتاج القاعدة (٢)؟

٤-٢-٣ بتطبيق العمليات السطرية لتكوين مصفوفة مثلثية عليا U، احسب :

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \det\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

بادل بين السطر ٣ والسطر ٤ في المصفوفة الثانية واحسب من جديد المحاور والمحددة.

ملاحظة كثير من القراء على علم سابق بقانون المحددة ذات النوع 3×3 الذي يحوي ستة حدود. (أنظر المعادلة (٢) في البند الثاني) ثلاثة حدود تتابع القطر الرئيسي وثلاثة تسير بالاتجاه المعاكس مع إشارة نقص. من الطبيعي أن نتقع اعدة مشابهة من أجل المحددة ذات النوع 4×4، ومن المحقق وجود ذلك *ولكنها تحوي* $4! = 24$ حداً *(ليس ثمانية* حدود). لست، بعد، متأكداً أن إشارة النقص تلازم القطر المعاكس كما تبين ذلك التمارين التالية.

٤-٢-٤ فسر لماذا :

$$\det\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = +1 \quad \text{و} \quad \det\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -1 .$$

٤-٢-٥ ماهو عدد المبادلات السطرية التي تجعل (سطر n، سطر n-1، . . . ، سطر 1) بالترتيب النظامي (سطر 1، . . . ، سطر n-1، سطر n)؟ متي يكون $det\ P = 1$ ومتى يكون $det\ P = -1$، لمصفوفة مبادلة من النوع $n \times n$، حيث عناصر القطر الثانوي وحدان؟ في التمرين السابق $n = 4$.

٤-٢-٦ أوجد محددة مايلي :

(أ) جداء المصفوفتين حيث الرتبة تساوي الواحد :

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(ب) المصفوفة المثلثية العليا :

$$U = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 8 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix};$$

(جـ) المصفوفة المثلثية الدنيا U^T :

(هـ) المصفوفة "المثلثية المعكوسة" التي تنتج عن مبادلات سطرية ،

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 8 & 8 \end{bmatrix}.$$

٤-٢-٧ بين كيف تنتج القاعدة (٦) ($det = 0$ إذا حوت سطراً صفرياً) مباشرة من القاعدتين (١) و (٢).

٤-٢-٨ افرض أنك قمت بعمليتين سطريتين معاً منتقلاً من :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ إلى } \begin{bmatrix} a-mc & b-md \\ c-la & d-lb \end{bmatrix}$$

أوجد محددة المصفوفة الجديدة بالقاعدة (١) أو بحساب مباشر (وتبسيط).

٤-٢-٩ إذا كانت Q مصفوفة قائمة، أي أن $Q^TQ = I$، برهن أن $det\ Q$ تساوي 1+ أو 1-. ماهو نوع متوازي السطوح الذي يمكن تكوينه بأسطر (أو أعمدة) Q؟

٤-٢-١٠ استخدم عمليات السطر لتبرهن أن محددة فاندورموند – Vandermonde ذات النوع 3×3 هي:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$$

الحالة 4×4 موجودة في تمارين المراجعة.

٤-٢-١١ (أ) تحقق المصفوفة التناظرية التخالفية $K^T = -K$ كما في:

$$K = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}.$$

لماذا يكون في الحالة 3×3، $det\ (-K) = (-1)^3 det\ K$؟ من ناحية ثانية، $det\ K^T = det\ K$ (دائماً). استنتج أن $-det\ K = det\ K$ وأنه يجب أن تكون هذه المحددة صفراً.

(ب) اكتب مصفوفة متناظرة تخالفية من النوع 4 x 4 بحيث لاتكون det K صفراً.

٤-٢-١٢ صح أم خطأ مع تبرير الصحيح وتقديم مثال معاكس في حالة الخطأ :

(أ) إذا كانت A و B متطابقتين إلا من أجل القرنة اليسرى العليا، حيث $b_{11} = 2\,a_{11}$، فان $det\,B = 2\,det\,A$.

(ب) تساوي المحددة جداء المحاور .

(جـ) إذا كانت A قابلة للعكس و B شاذة فإن $A + B$ قابلة للعكس .

(د) إذا كانت A قابلة للعكس و B شاذة فإن AB شاذة .

٤-٢-١٣ إذا كان مجموع عناصر كل سطر يساوي الصفر، برهن أن $det\,A = 0$.

إذا كان مجموع عناصر كل سطر يساوي الواحد، برهن أن $det\,(A - I) = 0$.

بين، بمثال، أن ذلك لايقتضي أن يكون $det\,A = 1$.

٤-٢-١٤ أوجد قيمتي المحددتين من النوع 4×4 بطريقة الحذف الغاوسي :

$$\det\begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{bmatrix} \quad , \quad \det\begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \\ t & 1 & t & t^2 \\ t^2 & t & 1 & t \\ t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix}.$$

٤-٢-١٥ أوجد محددات المصفوفات التالية :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad A - \lambda I = \begin{bmatrix} 4 - \lambda & 2 \\ 1 & 3 - \lambda \end{bmatrix}.$$

من أجل أي قيم للوسيط λ تكون المصفوفة $A - \lambda I$ شاذة ؟

٤-٢-١٦ احسب محددة A بإرجاع المصفوفة إلى شكل مثلثي (القاعدتان ٥ و ٧)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 9 \end{bmatrix}.$$

ماهي محددات B , C , AB , A^TA , C^T ؟

٤-٢-١٧ نفرض أن $CD = - DC$ ، أوجد الخطأ فيما يلي : بأخذ محددتي الطرفين نجد $(det\ C)\ (det\ D) = - (det\ D)\ (det\ C)$ ، لذا ، إما أن تكون D أو C ذات محددة تساوي الصفر . $CD = - DC$ ممكن ، فقط ، إذا كان C أو D شاذة .

٤-٣ قوانين المحددة

القانون الأول ورد سابقاً :

إذا كانت A غير شاذة فان $A = P^{-1}LDU$ وإن

$$\det A = \det P^{-1}\ \det L\ \det D\ \det U$$

$$= \pm\ (\text{جداء المحاور}) \qquad (1)$$

الإشارة ± 1 هما محددتا P^{-1} (أو P) وهما تتعلقان بكون عدد المبادلات السطرية زوجياً أم فردياً . العامل المثلثي يحقق $det\ D = d_1...d_n$ و $det\ L = det\ U = 1$.

في الحالة 2×2 ، يكون التحليل القياسي هو :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c/a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & (ad - bc)/a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b/a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

جداء المحاور هو $ad - bc$. إذا كانت الخطوة الأولى مبادلة سطر ، فإن

$$PA = \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a/c & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & (cb - da)/c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & d/c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

ويكون ، عندئذ ، جداء المحاور مساوياً $- det\ A$.

مثال لقد كان لمصفوفة الفرق المحدود ، الواردة في الفقرة ١-٧ ، التفريق $A = LDU$:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & . & \\ & & . & . & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix} = L \begin{bmatrix} 2 & & & & \\ & 3/2 & & & \\ & & 3/4 & & \\ & & & . & \\ & & & & (n+1)m \end{bmatrix} U.$$

محددتها هي جداء محاورها :

$$\det A = 2\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{4}{3}\right)\ldots\left(\frac{n+1}{n}\right) = n + 1.$$

إن ذلك هو طريق حساب المحددات باستثناء مصفوفات خاصة جداً. يعطي النظام الوارد في الملحق C، $det A$ من المحاور. في الحقيقة، المحاور هي نتيجة تكثيف لمعلومات أساسية وزعت على عناصر المصفوفة. من وجهة نظر نظرية، مهما يكن الأمر، فان لتكثيف المعلومات في المحاور محذوراً : ليس من الممكن اكتشاف تأثير تغيير أحد العناصر على المحددة. لذلك نعتزم الآن إيجاد تركيب صريح لمحددة بدلالة عناصرها.

من أجل $n = 2$، قد بينا أن القانون $ad - cb$ صحيح. من أجل $n = 3$، القانون المقابل معروف أيضاً بصورة جيدة :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} + a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \end{matrix} \qquad (٢)$$

هدفنا استنتاج هذه القوانين مباشرة من الخواص ١-٣ الواردة في البند السابق. إذا تمكنت من معالجة الحالتين $n = 2$ ، $n = 3$ بطريقة منتظمة بشكل كاف، فانه يمكنك النظر في جميع المصفوفات.

للانطلاق بذلك، يمكننا تجزئة كل سطر من A إلى متجهات وفق الاتجاهات الاحداثية المختلفة :

$$[a \quad b] = [a \quad 0] + [0 \quad b] \quad , \quad [c \quad d] = [c \quad 0] + [0 \quad d].$$

ثم نطبق الخاصة الخطية على كل سطر بمفرده . أولاً على السطر الأول ثم على السطر الثاني :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{vmatrix}. \qquad (٣)$$

من أجل مصفوفة من النوع $n \times n$ ، سيوزع كل سطر إلى أجزاء عددها n، وفق الاتجاهات الاحداثية . لذا سيكون لدينا بالنشر n^n من الحدود : في حالتنا $4 = 2^2$. لحسن الحظ ، كثير منها (مثل الحد الأول والحد الأخير في المثال الوارد أعلاه) سيكون بصورة آلية مساوياً إلى الصفر . ذلك لأنه سيكون سطران ، في أحد الاتجاهات الاحداثية ، أحدهما مضاعف للآخر ، وأن :

$$\begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{vmatrix} = 0.$$

يوجد هنا عمود من الأصفار ، لذا ، تكون المحددة صفراً . من أجل ذلك ، نوجه انتباهنا *إلى الأسطر التي تتجه في اتجاهات مختلفة ؛ قد تأتي الحدود غير الصفرية في مختلف الأعمدة .* لنفرض أن في السطر الأول عنصر غير صفري واقع في العمود α، وفي السطر الثاني عنصراً غير صفري واقع في العمود β، وأخيراً ، في السطر الأخير ذي الرقم n، عنصراً غير صفري واقع في العمود ν . أرقام الأعمدة $\alpha, \beta, \ldots, \nu$ جميعها مختلفة فيما بينها ؛ ليست هي سوى *ترتيب جديد أو تبديل* للأعداد $1, 2, \ldots, n$. من أجل الحالة 3×3 يوجد ستة حدود من هذا النوع :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & \\ & a_{22} & \\ & & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & a_{12} & \\ & & a_{23} \\ a_{31} & & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & & a_{13} \\ a_{21} & & \\ & a_{32} & \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & & \\ & & a_{23} \\ & a_{32} & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & a_{12} & \\ a_{21} & & \\ & & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & & a_{13} \\ & a_{22} & \\ a_{31} & & \end{vmatrix}. \qquad (٤)$$

نعيد ونقول، يجب أن يكون للنشر $27 = 3^3$ حداً؛ جميعها سوى $6 = 3!$، أصفار، بسبب تكرار عمود. بصورة عامة يبقى $n!$ حداً. (يوجد n اختياراً من أجل العمود الأول α، ويبقى $n-1$ اختياراً من أجل العمود β، وأخيراً يبقى اختيارواحد للعمود الأخير νـ نستخدم عموداً واحداً، فقط، في كل مرة عندما نمر على جميع الأسطر).

بقول آخر، يوجد $n!$ *طريقاً لتبديل الأعداد* $1,2,...,n$. *(ننظر في متتالية أرقام الأعمدة لنجد التبديل المرافق.)* تنتج الحدود الست في (4) من الأعمدة التالية :

$$(\alpha, \beta, \nu) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (3, 2, 1).$$

هذه هي جميع متبادلات (1,2,3) التي عددها $6 = 3!$؛ المتبادلة الأولى هي متبادلة المطابقة.

لقد أُرجعت الآن محددة A إلى ست محددات مختلفة وبسيطة جداً. إذا أخرجنا العناصر a_{ij} خارج رمز المحددة، نجد حداً مقابل كل واحدة من هذه المتبادلات الست:

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} \begin{vmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{vmatrix} + a_{12}a_{23}a_{31} \begin{vmatrix} & 1 & \\ & & 1 \\ 1 & & \end{vmatrix} + a_{13}a_{21}a_{32} \begin{vmatrix} & & 1 \\ 1 & & \\ & 1 & \end{vmatrix}$$

$$+ a_{11}a_{23}a_{32} \begin{vmatrix} 1 & & \\ & & 1 \\ & 1 & \end{vmatrix} + a_{12}a_{21}a_{33} \begin{vmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{vmatrix} + a_{13}a_{22}a_{31} \begin{vmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{vmatrix}. \qquad (٥)$$

كل حد هو جداء $n = 3$ عناصر من a_{ij}، حيث كل سطر وكل عمود ممثل بواحد منها. بقول آخر يوجد حد يقابل كل طريق يقطع المصفوفة ماراً بكل عمود مرة واحدة. إذا استخدمنا الأعمدة بالترتيب $(\alpha,...,\nu)$ فان هذا الحد هو جداء العناصر $a_{1\alpha}...\alpha_{n\nu}$ بمحددة مصفوفة التبديل p_σ. محددة المصفوفة كاملة ***تساوي مجموع هذه الحدود وهو القانون الصريح التالي :***

$$\det A = \sum_{\sigma}(a_{1\sigma}a_{2\beta} \ \dots \ a_{n\nu}) \ \ \det P_{\sigma}. \qquad (٦)$$

من أجل مصفوفة من النوع $n \times n$، يضم هذا المجموع جميع المتبادلات $\sigma = (\alpha,...,\nu)$ للأعداد $(1,....,n)$ =σ التي يساوي عددها $n!$. تعطي المتبادلة أرقام الأعمدة التي نمر عليها عندما نهبط على أسطر المصفوفة وتحدد أيضاً مصفوفة المبادلة P_σ : حيث تظهر الوحدان في P_σ في المواضع التي كانت فيها الحروف a في المصفوفة الأصلي A.

بقي علينا، فقط، إيجاد محددة P_σ لما كانت المبادلات السطرية تحول P_σ إلى مصفوفة الوحدة، وكل مبادلة تقلب إشارة المحددة، لذا، فان P_σ تساوي 1+ أو 1- . *تتعلق الإشارة بكون عدد المبادلات زوجياً أم فردياً .*

$$P_\sigma = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & & 1 \\ & 1 & \end{bmatrix} \text{ حيث متتالية الأعمدة } (\alpha,\beta,\nu) = (1,3,2)$$

$$P_\sigma = \begin{bmatrix} & & 1 \\ 1 & & \\ & 1 & \end{bmatrix} \text{ حيث متتالية الأعمدة } \sigma = (3,1,2)$$

تتطلب الأولى مبادلة واحدة (بين السطرين الثاني والثالث)، لذا، فإن $\det P_\sigma = -1$. أما الثانية فتحتاج إلى مبادلتين لتعود إلى المطابقة (مبادلة السطر الأول مع الثاني متبوعة بمبادلة الثاني مع الثالث). لذا، فإن $P_\sigma = (-1)^2 = 1$. هاتان إشارتان من الإشارات الست التي تظهر في (٢).

المعادلة (٦) عبارة صريحة للمحددة ويمكننا بسهولة تحقيق الحالة 2×2 حيث المتبادلات التي عددها $2! = 2$ هي $\sigma = (1,2)$ و $\sigma = (2,1)$. لذا، يكون :

$$\det A = a_{11} a_{22} \det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + a_{12} a_{21} \det\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \quad (\text{أو } ac - bc).$$

لايمكن لأحد أن ينكر أن القانون الصريح (٦) سهل بصورة متميزة ومع ذلك، فإنه من الممكن رؤية لماذا يتمتع بالخواص ١-٣. إن الخاصة ٣ التي تقول إن $\det I = 1$، هي، طبعاً، أكثر الخواص سهولة؛ جداءات العناصر a_{ij} تساوي دوماً الصفر باستثناء الجداء المتعلق بمتتالية الأعمدة الخاصة $\sigma = (1,2,....n)$، التي هي التبديل المطابق وهو الذي يعطي $\det I = 1$. يمكن التحقق من الخاصة الثانية في البند التالي، لأن أكثر اهتمامنا هنا، منصب على الخاصة الأولى: تتعلق المحددة بصورة خطية بالسطر الأول $a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n}$. لرؤية هذه التبعية، ننظر في حدود القانون (6) التي تحوي a_{11}. تظهر هذه الحدود عندما نختار من أجل العمود الأول $\alpha = 1$، تاركين بقية عناصر التبديل $\sigma' = (\beta, ..., \nu)$ لبقية أرقام الأعمدة $(2, ..., n)$. نجمع كل هذه الحدود، بعضها إلى بعض بالصورة $a_{11}A_{11}$ حيث معامل a_{11} هو:

$$A_{11} = \sum_{\sigma'} (a_{2\beta} \ldots a_{n\nu}) \det P_{\sigma'}. \qquad (٧)$$

بصورة مشابهة a_{12} مضروب بتركيب نمثله بالرمز A_{12}. إذا جمعنا جميع الحدود التي تنطلق من a_{ij}، فان القانون (6) يصبح:

$$\det A = a_{11} A_{11} + a_{12} iA_{12} + \ldots + a_{1n} A_{1n}. \qquad (٨)$$

يظهر هنا بوضوح، أن $\det A$ تتعلق بصورة خطية بعناصر السطر الأول $a_{11}, ..., a_{1n}$.

مثال في حالة المصفوفة 3×3، تعطي طريقة التجميع هذه:

$$(٩) \quad \det A = a_{11}(a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}) + a_{12}(a_{23} a_{31} - a_{21} a_{33}) + a_{13}(a_{21} a_{32} - a_{22} a_{31}).$$

حيث كتبت *العوامل المرافقة* A_{11}, A_{12}, A_{13} ضمن ثلاثة أزواج من الأقواس.

نشر $\det A$ في عوامل مرافقة

نريد الآن أن نقدم قانوناً آخر للمحددة. إذا كان ذلك يعني الانطلاق مرة أخرى

من لاشيء فإن الأمر سيكون كبيراً. لكن *هذا القانون قد اكتشف سابقاً وهو القانون* (8)، *النقطة الوحيدة التي بقيت علينا هي تعين العامل المرافق* A_{ij}.

من المعلوم أن العدد A_{ij} يتعلق بالأسطر $2,...,n$؛ السطر الأول قد خصص للعامل a_{1j}. كما أن a_{1j} قد خصص للعمود j، لذا، فإن على عامله المرافق A_{1j} أن يتعلق بصورة كاملة *بالأعمدة الأخرى*. لايمكن استعمال سطر أو عمود مرتين في الحد ذاته وهذا مافعلناه عند توزيع المحددة إلى المجموع التالي:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & \\ & a_{22} & a_{23} \\ & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & a_{12} & \\ a_{21} & & a_{23} \\ a_{31} & & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \\ a_{31} & a_{32} & \end{vmatrix}.$$

من أجل محددة من المرتبة n، يعطي هذا التوزيع n محددة من حجم أصغر (تدعى الصغيرات) وهي من المرتبة n-1. يمكنك أن تلاحظ المصفوفات الجزئية من النوع 2×2 التي تظهر في الطرف الأيمن. تنشأ المصفوفة M_{1j} عن المصفوفة الأصلية، من حذف *السطر الأول والعمود* j. كل حد في الطرف الأيمن هو جداء a_{1j} بمحددة M_{1j} ـ مضروباً بإحدى الإشارتين زائد أو ناقص الموافقة. تتناوب هاتان الإشارتان عندما نسير على طول السطر. يأخذ العامل المرافق الصورة التالية:

$$A_{i\text{-}j} = (-1)^{i+j} \det M_{cj}$$

نجد، مثلاً، أن العامل المرافق الثاني A_{12} هو $a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}$، الذي هو $\det M_{12}$ مضروبة بـ (-1). يمكن اجراء هذه الطريقة ذاتها على كل مصفوفة مربعة من أي حجم. وبنظرة فاحصة للمعادلة (7)، يتأكد لدينا أن A_{11} هي محددة المصفوفة M_{11} الواقعة في الزاوية اليمنى والدنيا من المصفوفة الأصلية A.

هناك نشر مشابه من أجل أي سطر آخر، مثل السطر i، يمكن برهانه بالمبادلة بين السطر i والسطر الأول:

٤ ب المحددة تركيب للسطر i مع العوامل المرافقة لعناصر السطر:

$$\det A = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i1} + \dots + a_{in} A_{in} \qquad (١٠)$$

العامل المرافق A_{ij} هو محددة المصفوفة M_{ij} مزودة بالإشارة الموافقة :

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij} . \qquad (١١)$$

تتكون M_{ij} بحذف السطر i والعمود j من A.

تعبر هذه القوانين عن $det\,A$ بتركيب في محددات من المرتبة $n - 1$ ، *لذا، يمكننا تعريف المحددة بالاستقراء في* n . من أجل مصفوفة من النوع 1×1 ، نقبل أن $detA = a_{11}$ ، ثم نطبق القانون (10) على التتالي لتعريف محددة المصفوفة ذات النوع 2×2 والمصفوفة 3×3 وهكذا حتى النهاية. لقد فضلنا تعريف المحددة بخواصها، تلك الخواص التي يمكن تفسيرها بسهولة كبيرة ومن ثم استخلاص القانون الصريح (٦) والقانون الاستقرائي (10) من هذه الخواص.

أخيراً، توجد نتيجة أخرى لكون $det\,A = det\,A^T$. تجيز لنا هذه الخاصة النشر حسب العوامل المرافقة لعناصر عمود عوضاً عن عناصر سطر؛ فنجد لكل j :

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} . \qquad (١٢)$$

البرهان، ببساطة، هو نشر $det\,A^T$ حسب العوامل المرافقة لعناصر سطرها j الذي هو العمود j في A.

مثال لننظر في مصفوفة الفروق ذات النوع 4×4 :

$$A_4 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

طريقة العوامل المرافقة أكثر استعمالاً من أجل سطر يحوي عدداً من الأصفار. هنا، السطر الأول يعطي حدين فقط. يأتي العامل المرافق لـ a_{11} من حذف السطر (١) والعمود (١)، الأمر الذي يترك مصفوفة من النوع 3×3 ومن الشكل ذاته:

$$A_3 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

من أجل a_{12}، العمود (٢) هو الذي يجب حذفه، ونحتاج إلى

$$(-1)^{1+2} \det \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = +\det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

لاحظ العامل المرافق الذي يجب أخذه في المرحلة الأخيرة ! في هذه المرة ، الاختيار المفضل هو العمود (١) . بقي لدينا محددة من النوع 2×2 من الصورة ذاتها ؛ إنها العامل المرافق للعنصر الأصلي $a_{12} = -1$. بالجملة، أعطى السطر (١) :

$$\det A_4 = 2(\det A_3) - \det A_2 .$$

إذا طبقت هذه الفكرة ذاتها على مصفوفة من النوع 5×5 أو 6×6 أو $n \times n$ ومن الشكل ذاته (محددات فروق)، نجد :

$$\det A_n = 2(\det A_{n-1}) - \det A_{n-2} . \qquad (١٣)$$

بما أننا نعرف أن $\det A_1 = 2$, $\det A_2 = 3$ فان هذا *القانون التراجعي* يعطينا محددات المصفوفات المتزايدة في الحجم . في كل مرحلة تكون محددة المصفوفة A_n مساوية $n+1$ لأنها تحقق العلاقة (13) :

$$n + 1 = 2(n) - (n - 1).$$

الجواب $n+1$ متفق مع جداء المحاور وفق منطلقنا لهذا البند .

تمـــاريـــن

٤-٣-١ أوجد من أجل المصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

الحدود غير الصفرية ، فقط ، التي تظهر في القانون (٦)- الطريقة الوحيدة هي اختيار أربعة عناصر من أسطر مختلفة وأعمدة مختلفة وعدم

اختيار أي صفر . بعد تعيين الفردي والزوجي من المتبادلات الموافقة، احسب $det\, A$.

٤-٣-٢ استخرج منشور محددة المصفوفة السابقة في عوامل مرافقة وفق سطرها الأول وارجع $det\, A$ إلى محددة من النوع 3×3 . قم بالعمل ذاته بالنسبة لهذه المحددة (انتبه للإشارة $(-1)^{i+j}$) وأعمل، أيضاً، الشيء ذاته من أجل المحددة الناتجة ذات النوع 2×2 . احسب أخيراً $det\, A$.

٤-٣-٣ ***صح أو خطأ*** :

(١) محددة $S^{-1}AS$ تساوي محددة A .

(٢) إذا كانت $det\, A = 0$ فإن واحداً، على الأقل، من العوامل المرافقة يساوي الصفر .

(٣) لمصفوفة عناصرها أصفار ووحدان محددة تساوي 1 إو0 أو 1- .

٤-٣-٤ (أ) أوجد التحليل LU والمحاور والمحددة لمصفوفة من النوع 4×4، كل عنصر a_{ij} فيها يساوي أصغر العددين i و j. (اكتب هذه المصفوفة) .

(ب) أوجد المحددة إذا كان a_{ij} يساوي أصغر العددين n_i و n_j حيث $n_1 = 2$، $n_2 = 6$، $n_3 = 8$، $n_4 = 10$. هل يمكنك إعطاء قانون عام من أجل أي أعداد n تحقق $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq n_4$ ؟

٤-٣-٥ نفرض أن D_n مصفوفة ذات أقطار ثلاثة ومن النوع $(n \times n)$ ، تتكون عناصر أقطارها من الأعداد 1,1,-1 :

$$D_n = \det\begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \\ 1 & 1 & -1 & & \\ & 1 & 1 & -1 & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

بالنشر وفق العوامل المرافقة للسطر (١)، برهن أن $D_n = D_{n-1} + D_{n-2}$. يؤدي ذلك إلى متتالية فيبو ناتشي ....,1,2,3,5,8,13 المتعلقة بالمحددات .

٤-٣-٦ أفرض أن A_n مصفوفة الأقطار الثلاثة حيث يقع العدد 1 في كل مكان في الأقطار الثلاثة :

$$A_1 = [1], \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \ldots$$

لتكن D_n محددة A_n؛ نريد أن نجدها .

(أ) انشر وفق العوامل المرافقة للسطر الأول من A_n لكي تبرهن أن $D_n = D_{n-1} - D_{n-2}$.

(ب) انطلق من $D_1 = 1$ و $D_2 = 0$ وأوجد $D_3, D_4, \ldots, D_8$. بتعيين دورة الأعداد هذه (ماهو الدور ؟) أوجد D_{1000} .

٤-٣-٧ (أ) احسب العوامل المرافقة للسطر (١) : $\begin{bmatrix} 7 & 7 & 7 & 7 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

(ب) تحقق بطرح العمود (١) من الأعمدة الأخرى ثم احسب من جديد .

٤-٣-٨ فسر لماذا يكون من المؤكد أن المصفوفة ذات النوع 5×5 التي تحوي مصفوفة جزئية صفرية من النوع 3×3، هي مصفوفة شاذة (دون النظر إلى العناصر الستة عشر التي رمزنا لها بـ x) :

$$\text{محددة المصفوفة } \begin{bmatrix} x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x & x \end{bmatrix} = A \text{ تساوي الصفر}$$

٤-٣-٩ بمصفوفات من النوع 4 x 4 ، برهن أنه ، بصورة عامة :

$$\det\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix} = \det A \ \det D \quad \text{لكن} \quad \det\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \neq \det A \ \det D - \det B \ \det C$$

هنا A,B,C,D من النوع 2×2 . أعط مثالاً تحقق فيه حالة عدم التساوي .

٤-٣-١٠ أحسب محددة المصفوفة

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

سواءً باستخدام عمليات سطرية لإحداث أصفار أو بالنشر في عوامل مرافقة للسطر الأول . أوجد ، أيضاً ، محددتي المصفوفتين الصغيرتين A_2, A_3 اللتين من الشكل ذاته من حيث وقوع أصفار على القطر الرئيسي ووحدان في بقية المواضع . هل يمكنك أن تتنبأ عن $\det A_n$ ؟

٤-٣-١١ ماهو عدد عمليات الضرب اللازمة لإيجاد محددة من النوع $n \times n$ من :

(أ) القانون الصريح (6) ؟

(ب) من قانون العوامل المرافقة (10) ؟

(جـ) من قانون المحاور (1) ؟

في (ب) اربط العدد المقابل لـ n بالعدد المقابل لـ $n - 1$؛ في (جـ) تذكر الحذف .

٤-٣-١٢ في مصفوفة من النوع 5×5 ، اعط إشارة (+) أو (-) توافق الجداء $a_{15}a_{24}a_{33}a_{42}a_{51}$. بقول آخر هل $\sigma = (5,4,3,2,1)$ زوجية أم فردية ؟

تنبيه : نموذج رقعة الضامة للإشارات ± للعوامل المرافقة لايعطي إشارة σ ! إنه يعطي إشارة + لجداء عناصر القطر الثانوي $a_{13}a_{22}a_{31}$ - وهو خاطىء. عليك أن تقرر هل هذه المتبادلة زوجية أم فردية.

٤-٣-١٣ إذا كانت A من النوع $m \times n$ و B من النوع $n \times m$ برهن أن

$$\det \begin{bmatrix} 0 & A \\ -B & I \end{bmatrix} = \det AB.$$ (إرشاد : أضرب من الخلف بـ $\begin{bmatrix} I & 0 \\ B & I \end{bmatrix}$)

أعط مثالاً فيه $m > n$ وآخر فيه $m < n$. لماذا تكون في المثال الثاني $det\,AB = 0$؟

٤-٣-١٤ أفرض أن عناصر المصفوفة A ثابتة سوى a_{11} الذي يتحول من ∞ - إلى ∞ +. أعط مثالاً تكون فيه $det\,A$ دائماً تساوي الصفر أو لاتساويه أبداً. هذا يبرهن (من قانون العوامل المرافقة(٨))، من ناحية أخرى، أن $det\,A = 0$ من أجل قيمة واحدة لـ a_{11}.

٤-٤ تطبيقات المحددات

يتابع هذا البند التطبيقات التي قدمت بالتمهيد : *المعكوس*، *حل* $Ax = b$، *الحجم والمحاور*. إنها من بين الحسابات الأساسية في الجبر الخطي (أجريت بالحذف) والآن سيكون لدينا قوانين للأجوبة.

١ - حساب A^{-1}. ينطلق ذلك بالمحددة المحسوبة بالعوامل المرافقة للسطر i. تذكر أن كل عنصر ضرب بالعامل المرافق :

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + \dots + a_{in}A_{in}. \qquad (1)$$

يمكننا أن نبتدع ضرب مصفوفتين بحيث تعطي المعادلة الجواب على طول القطر الرئيسي :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \det A \end{bmatrix}. \quad (٢)$$

لاحظ أن المصفوفة الثانية ـ *مصفوفة العوامل المرافقة* ـ منقولة . علينا أن نضع $A_{11},...,A_{1n}$ في *العمود* الأول وليس في السطر الأول ، بحيث تضرب العناصر $a_{11},...,a_{1n}$ وتعطي عنصر القطر $det A$. يعطي جداء كل سطر آخر بعوامله المرافقة الجواب ذاته ، $det A$ على القطر . السؤال المحرج هو *لماذا نضع أصفاراً في كل مكان خارج القطر* ؟ إذا ركبنا السطر (١) مع العوامل المرافقة المتعلقة بالسطر (٢) لماذا يكون :

$$a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + \dots + a_{1n}A_{2n} = 0? \quad (٣)$$

الجواب هو مايلي : لقد حسبنا ، فعلاً ، محددة مصفوفة جديدة B مشابهة للمصفوفة A إلا بالسطر (٢) . لقد وضع السطر الأول في موضع السطر الثاني من B . لذا ، فإن في B سطرين متساويين ، وبذلك نجد $det B = 0$. المعادلة (3) هي نشر B وفق السطر (٢) ، حيث يكون لـ B عوامل A المرافقة ذاتها (لأن السطر الثاني قد حذف من أجل إيجاد العوامل المرافقة ، وهذا السطر هو الشيء الوحيد الذي تختلف فيه عن A) . لذا فان الضرب المصفوفي اللافت للنظر (٢) صحيح .

يعطي هذا الضرب مباشرة A^{-1} . لدينا في الطرف الأيمن من (٢) مضاعف لمصفوفة الوحدة ، هو جداء $det A$ بـ I .

$$(A)(A_{cof}) = (\det A)\, I. \quad (٤)$$

A_{cof} هي *مصفوفة العوامل المرافقة* . أو "المصفوفة القرينة" التي ظهرت في المعادلة (2) . لاحظ أن العامل المرافق الناتج عن حذف السطر i والعمود j من A يذهب *إلى السطر* j *والعمود* i في مصفوفة العوامل المرافقة . إذا قسمنا على $det\ A$ (إذا لم تكن صفراً) نجد قانون A^{-1} :

٤ جـ عناصر A^{-1} هي العوامل المرافقة لـ A، نقلت كما في (٢) وقسمت على المحددة تعطي : $A_{ji} / det\ A$:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A_{cof}. \quad (٥)$$

إذا كانت $det\ A = 0$ فان A غير قابلة للعكس .

مثال ١ العوامل المرافقة في $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ هي $A_{11} = d$, $A_{12} = -c$, $A_{21} = -b$, $A_{22} = a$

$$(A)(A_{cof}) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix}.$$

لنقسم على $ad - bc$ الذي هو $det\ A$، يظهر في الطرف الأيسر جداء A بـ A^{-1} ونستنتج :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}. \quad (٦)$$

لاحظ من جديد انتقال A_{cof} إلى الطرف الأيمن .

مثال (٢) معكوس . المصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ يكون } \frac{A_{cof}}{\det A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

دخلت إشارة الناقص لأن العامل المرافق يحوي $(-1)^{i+j}$.

٢- *حل النظام* $Ax = b$. التطبيق الثاني هو تماماً ضرب b بالمصفوفة A^{-1} في (٥).

$$x = A^{-1}b = \frac{1}{\det A} A_{cof}b.$$

ليس ذلك سوى جداء مصفوفة بمتجه، مقسوماً على العدد $det\ A$، إن هناك طريقة ممتازة لكتابة الجواب.

٤ د قاعدة كرامر Cramer : المركبة j لـ $x = A^{-1}b$ هي :

$$x_j = \frac{\det B_j}{\det A} \quad \text{حيث} \quad B_j = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 & a_{1n} \\ : & : & : & : \\ a_{n1} & a_{n2} & b_n & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad (٧)$$

في B_j يأخذ المتجه b موضع العمود j في A.

البرهان. لننشر $det\ B_j$ في العوامل المرافقة وفق العمود j (الذي هو b). بما أن العوامل المرافقة تجهل هذا العمود، تكون النتيجة :

$$\det B_j = b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \ldots + b_nA_{nj}.$$

وهذه هي، بالضبط، المركبة j لجداء مصفوفة بمتجه : $A_{cof}\,b$. لنقسم على $det\ A$ فيكون الناتج هو المركبة j لـ x.

إذاً كل مركبة لـ x تساوي نسبة بين محددتين، أي، كثيرة حدود من الدرجة n مقسومة على كثيرة حدود أخرى من الدرجة n. كان من الممكن أن نتوصل إلى هذه الحقيقة بطريقة الحذف الغاوسي ولكن هذا الأمر لم يحدث أبداً.

مثال : حل النظام

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 &= 6 \end{aligned}$$

هو :

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{-18}{-2} = 9,\ x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{6}{-2} = -3.$$

المقامان متساويان وهما دائماً $det\ A$، بينما يظهر الطرفان الأيمنان 0 و 6 في العمود الأول لـ x_1 والعمود الثاني لـ x_2. من أجل ١٠٠٠ معادلة، توجد ١٠٠١ محددة. ما أفزعني، أنني رأيت في كتاب قديم أن هذه الطريقة مفضلة (ويعتقد أن الحذفقد طرح جانباً)

"لكي نبحث في مجموعة تحوي أربعة متغيرات u,v,w,z، علينا أولاً أن نحذف واحداً منها بين الأزواج الثلاثة لكي نحصل على ثلاث معادلات بثلاثة مجاهيل ونجري الأمر ذاته على الأطراف اليسرى حتى نحصل على قيمتين لاثنين منها. سيلاحظ القارىء الذي يريد عمل ذلك كتمرين، العنت الكبير الذي تحتاجه طريقة الحذف، عندما نريد البحث بنظام لأكثر من ثلاثة متغيرات. تدعونا هذه الاعتبارات إلى التحري عن *طريقة أكثر سرعة*" (إنها قاعدة كرامر !!)[1].

من أجل مصفوفة خاصة، حيث يمكن انجاز قاعدة كرامر. نحصل على معلومات كاملة عن الحل.

٢ . ***حجم متوازي سطوح*** . العلاقة بين المحددة والحجم ليست واضحة بصورة كاملة. لذا، يمكننا أن نفرض، للسهولة، أن جميع *الزوايا قائمة* ـ الأضلاع متعامدة فيما بينها ـ ونكون عندئذ أمام متوازي سطوح قائم، حجمه يساوي، بالضبط، جداء أطوال أضلاعه : الحجم $= l_1 l_2 ... l_n$.

نريد أن نحصل على هذا القانون نفسه من المحددة. لنذكر أن حروف متوازي السطوح هذا كانت أسطر A. في الحالة التي تكون فيها الزوايا قائمة، تتعامد هذه الأسطر فيما بينها، وبالتالي :

$$AA^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \text{row } 1 \\ \vdots \\ \text{row } n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{r} & & \mathrm{r} \\ \mathrm{o} & & \mathrm{o} \\ \mathrm{w} & \cdots & \mathrm{w} \\ 1 & & n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & l_n^2 \end{bmatrix}.$$

---

(١) هذه الفقرة مقتبسة من *Mathematics For Million By Lancelot Hogben* (1937). إذا كانت الخطة هي استخدام قاعدة كرامر فانني أقول إنها رياضيات أصحاب الملايين

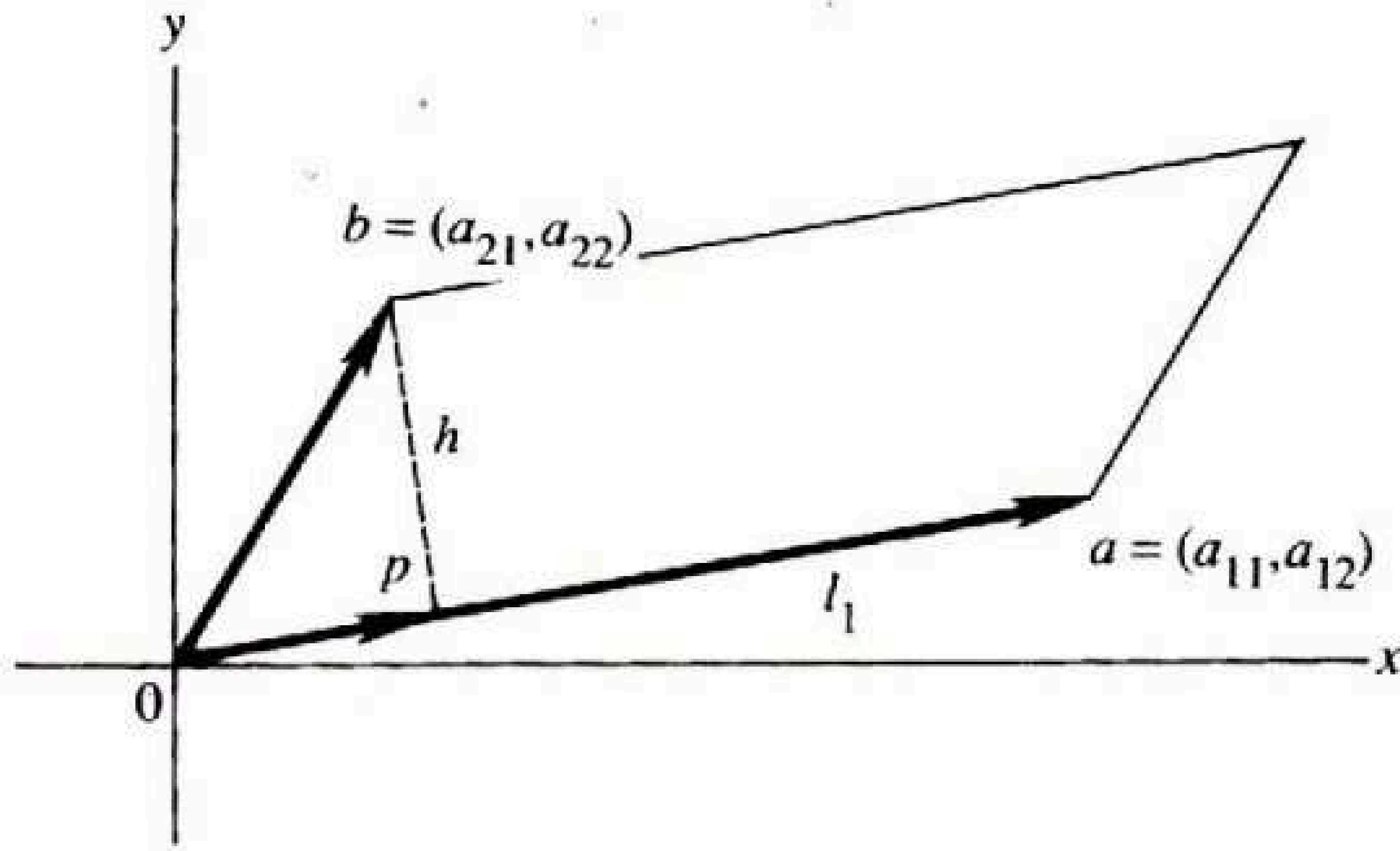
l_1 هو طول متجه السطر (الضلع). أما الأصفار الواقعة خارج القطر فانها ناتجة عن كون الأسطر متعامدة. إذا أخذنا محددتي طرفي العلاقة السابقة واستخدمنا القاعدتين (٩) و (١٠)، نجد:

$$l_1^2 l_1^2 \dots\ l_n^2 = \det AA^{\mathrm{T}}) = (\det A)(\det A^{\mathrm{T}}) = (\det A)^2 .$$

الجذر التربيعي لطرفي هذه المعادلة يعطينا النتيجة المطلوبة: *المحددة تساوي الحجم*. تعين إشارة المحددة A ماإذا كانت الحروف مرتبة بحيث تمثل مجموعة إحداثيات موجبة، كما هو في النظام المعتاد x - y - z، أم مجموعة إحداثيات سالبة مثل النظام y - x - z.

إذا لم تكن الحروف متعامدة فان الحجم لن يكون مساوياً جداء أطوال الحروف. في المستوي (الشكل ٤-٢)، حجم (مساحة) متوازي الأضلاع يساوي طول قاعدته l_1 مضروباً بطول أرتفاعه h. المتجه pb ذو الطول h يساوي السطر الثاني $b = (a_{21}, a_{22})$ مطروحاً منه مسقطه p على السطر الأول. الفكرة الاساسية هي: استناداً إلى الخاصة (٥)، لاتتغير المحددة إذا طرحنا مضاعفاً للسطر الأول من السطر الثاني. بالوقت ذاته، لايتغير الحجم إذا انتقلنا إلى مستطيل قاعدته l_1 وارتفاعه h. لذا يمكننا *أن نرد المسألة إلى حالة المستطيل*، وقد برهن سابقاً أن الحجم = المحددة.

في الفضاء ذي n بعداً، نحتاج إلى جهد كبير لجعل كل متوازي سطوح قائماً، لكن الفكرة تبقى ذاتها. لايتغير الحجم ولاتتغير المحددة إذا طرحنا من كل من الأسطر $2,3,\dots,n$ مسقطه على الفضاء المولد بالأسطر التي تسبقه ـ يبقى بعد ذلك، متجه ارتفاع مشابه لـ pb الذي هو قائم على القاعدة. ينتج عن طريقة غرام ـ شميدت مجموعة من الأسطر المتعامدة فيما بينها ـ وتبقى المحددة ذاتها والحجم نفسه كما كانا.



شكل (٤-٢) . حجم متوازي أضلاع = det A .

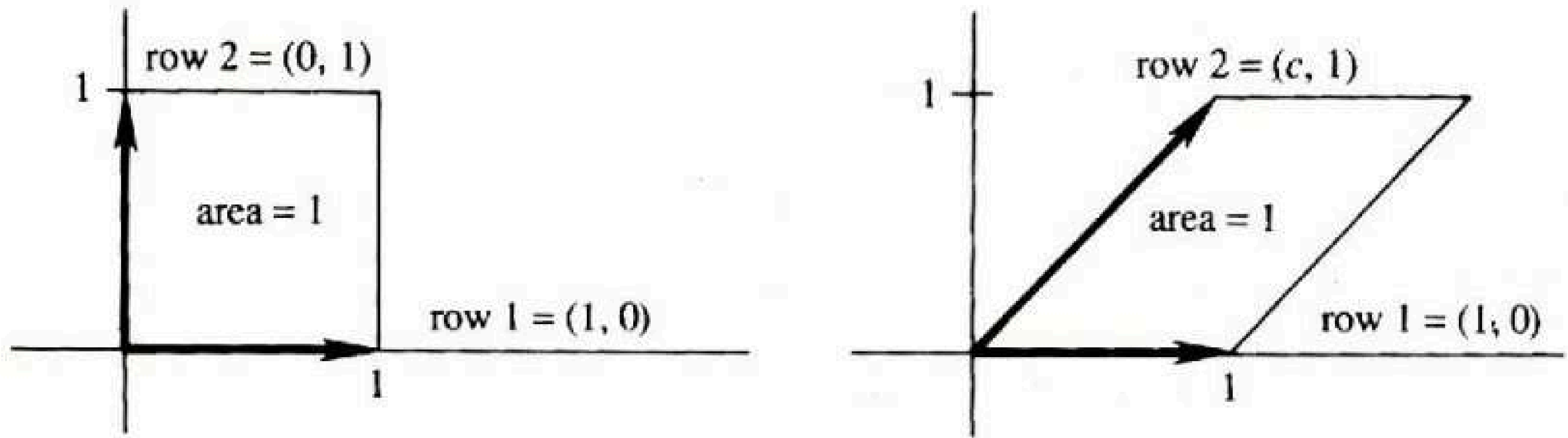
من أجل المجموعة الأصلية . لما كان الحجم يساوي المحددة في حالة متوازي السطوح القائم، فان هذه المساواة تبقى صحيحة من أجل الأسطر الأصلية .

إن هذا يتمم العلاقة بين الحجم والمحددة، غير أنه يجدر بنا أن نعود ثانية إلى الحالة الأكثر بساطة . من المعلوم أن :

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1, \quad \det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix} = 1.$$

تعطي هاتان المحددتان حجمين ـ أو بالأحرى مساحتين لأننا في فضاء ذي بعدين ـ «متوازيي السطوح» المرسومين في الشكل (٤-٣)، الأول يمثل مربع وحدة تساوي مساحته الواحد حتماً، والثاني متوازي أضلاع طول كل من قاعدته وارتفاعه يساوي الواحد؛ بصورة مستقلة عن التحول الناتج عن المعامل c، فإن مساحته تبقى مساوية الواحد .

٤ -*قانون المحاور*. التطبيق الأخير هو مسألة المحاور الصفرية؛ يمكننا أن نكتشف أخيراً متى يكون الحذف الغاوسي ممكناً دون مبادلات سطرية . مفتاح القضية أن الـ k محوراً الأوائل تتعين بصورة كاملة بالمصفوفة الجزئية A_k الواقعة في القرنة العليا واليسرى في A *. ليس للأسطر والأعمدة الباقية من A تأثير على هذه القرنة من المسألة .*



شكل (٤-٣) . مساحة مربع ومتوازي أضلاع .

مثال

$$A = \begin{bmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a & b & e \\ 0 & (ad - bc)/a & (af - ec)/a \\ g & h & i \end{bmatrix}.$$

من المؤكد أن المحور الأول يتعلق بالسطر الأول والعمود الأول وهو $d_1 = a$. المحور الثاني يصبح ظاهراً بعد خطوة واحدة من الحذف وهو $(ad - bc) / a$ وهو متعلق ، فقط ، بالعناصر a,b,c,d . مابقى من A لايدخل في ما قبل المحور الثالث . بالفعل ، ليست المحاور ، فقط ، التي تتعين بالقرنة العليا واليسرى من A، بل تتعين، أيضاً ، القرنات اليسرى والعليا للمصفوفات L,D,U :

$$A = LDU = \begin{bmatrix} 1 & & \\ c/a & 1 & \\ * & * & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & & \\ & (ad - bc)/a & \\ & & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b/a & * \\ & 1 & * \\ & & 1 \end{bmatrix}.$$

ما نراه في السطرين والعمودين الأولين هو ، بالضبط ، تحليل المصفوفة الجزئية $A_2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. إليك القاعدة العامة إذا لم يكن هناك مبادلات سطرية :

٤ هـ إذا حللت A بالصورة LDU ، فان الزوايا اليسرى والعليا من هذه المصفوفات

تحقق :

$$A_k = L_k D_k U_k .$$

من أجل كل k ، تنتج المصفوفة الجزءية A_k عن الحذف الغاوسي الخاص بها . البرهان هو أن نبين أنه يمكن تعين هذه القرنة أولاً حتى قبل النظر في عمليات الحذف في مكان آخر ، أو استخدام قانون ضرب *كتل المصفوفات* . يشبه هذا القانون القاعدة المعتادة في ضرب عنصر بعنصر : تأخذ العلاقة $LDU = A$ الشكل :

$$\begin{bmatrix} L_k & 0 \\ B & C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_k & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_k & F \\ 0 & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_k D_k U_k & L_k D_k F \\ B D_k U_k & B\, D_k F + CEG \end{bmatrix}.$$

مادامت المصفوفة قد وزعت بحيث يصبح كل ضرب ممكناً ـ للمصفوفات الجزئية المربعة والمستطيلة الحجوم الملائمة للضرب ـ فانه يمكن اجراء ذلك بضرب الكتل . بمقارنة المصفوفة الأخيرة مع A ، نلاحظ بجلاء أن القرنة $L_k D_k U_k$ تتطابق مع A_k وبذلك تكون ٤ هـ صحيحة .

ينتج قانون المحاور مباشرة ، باخذ محددتي الطرفين :

$$\det A_k = \det L_k \ \det D_k \ \det U_k = \det D_k = d_1 d_2 \ \dots \ d_k . \qquad (٨)$$

جداء الـ k محوراً الأوائل يساوي محددة A_k؛ هذه القاعدة المتعلقة بـ A_k هي القاعدة ذاتها التي رأيناها سابقاً من أجل المصفوفة الكاملة $A = A_n$. بما أن محددة A_{k-1} تعطى ، بصورة مشابهة ، بـ $d_1 d_2 \dots d_{k-1}$ ، فإنه يمكننا عزل المحور d_k كنسبة بين محددتين :

$$\frac{\det A_k}{\det A_{k-1}} = \frac{d_1 d_2 \ \dots \ d_k}{d_1 d_2 \ \dots \ d_{k-1}} = d_k . \qquad (٩)$$

في مثالنا السابق ، كان المحور الثاني مساوياً تماماً النسبة $(ad - bc) / a$. إن ذلك محددة A_2 مقسومة على محددة A_1 . (من المتفق عليه أن $A_0 = 1$ لذا ، يكون المحور الأول $a / 1 = a$) . بضرب جميع المحاور فيما بينها ، نجد :

$$d_1 d_2 \ldots\ d_n = \frac{\det A_1\ \det A_2}{\det A_0\ \det A_1}\ \ldots\ \frac{\det A_n}{\det A_{n-1}} = \frac{\det A_n}{\det A_0} = \det A.$$

انطلاقاً من (٩) يمكننا أخيراً أن نجد جواب سؤالنا الأصلي. تكون جميع المحاور غير صفرية إذا كان العدد det A غير صفري.

٤ و *يمكن للحذف الغاوسي أن ينفذ على A، دون حاجة لمبادلة أسطر أو مصفوفة مبادلة ولن يكون هناك محاور صفرية، إذا وإذا فقط كانت جميع المصفوفات الجزئية الأمامية $A_1, A_2, \ldots A_n$ غير شاذة.*

إن ماسبق يكفي من أجل المحددات، باستثناء الملاحظة الاختيارية التي وعدنا بها في بدء هذا الباب. تتعلق هذه الملاحظة بانسجام الخواص ١-٣ فيما بينها، تلك الخواص التي اعتبرناها تعريفاً. الأمر الرئيسي هو الخاصة (٢) التي تقول: تنعكس الإشارة عند اجراء مبادلة بين سطرين، وهي التي أدت إلى محددة مصفوفة مبادلة. إن ذلك هو النقطة الوحيدة التي هي موضع شك في القانون الصريح (٦): هل صحيح، بصورة مستقلة عن متتالية المبادلات السطرية الضرورية لإعادة p_α إلى التبديل المطابق، أن عدد هذه المبادلات السطرية، في جميع هذه المتتاليات، إما أن يكون دائماً شفعاً أو أن يكون دائماً وتراً؟ إذا تحقق ذلك فاننا نكون قد بررنا تسمية التبديل «شفعاً» أو «وتراً» وتكون، عندئذ، محددة التبديل معرفة تماماً بالقاعدة (٢) وتساوي إما (+١) أو (-١).

إذا انطلقنا من المتبادلة (٣، ٢، ١) فان مبادلة واحدة بين (٣) و (١) تؤدي إلى الترتيب الطبيعي (١، ٢، ٣)؛ من الممكن، كذلك، اجراء مبادلة بين (٣) و (٢) ثم بين (٣) و (١) وأخيراً بين (٢) و (١). في كل من هاتين المتتاليتين، كان عدد المبادلات فردياً. الأمر المؤكد هنا *أنه لايمكن لأي عدد زوجي من المبادلات أن يؤدي إلى الترتيب الطبيعي، انطلاقاً من* (٣، ٢، ١).

إليك برهان ذلك. لننظر في كل زوج من أعداد التبديل ولنفرض أن N هو عدد

الأزواج التي يقع في كل منها العدد الأكبر أولاً . من المؤكد أن $N = 0$ من أجل الترتيب الطبيعي (١ ، ٢ ، ٣) ، الذي يمثل التبديل المطابق ؛ وإن $N = 3$ من أجل (3,2,1) وذلك لأن ترتيب جميع الأزواج (٣ , ٢)، (٣ , ١) و (٢ , ١) غير طبيعي . غرضنا برهان أن التبديل يكون فردياً أو زوجياً وفق كون N فردياً أو زوجياً . بقول آخر ، إذا انطلقنا من أي تبديل فان أي مبادلة فيه تغير N بعدد فردي ، أي أن الوصول إلى $N = 0$ (الترتيب الطبيعي) يحتاج إلى عدد من المبادلات مطابق من حيث الفردية والزوجية للعدد الأصلي N .

إذا كان الزوج الذي نجري فيه المبادلة مكوناً من عنصرين متتاليين ، فمن الواضح أن N يتغير بـ (+١) أو (-١) وكل من هذين العددين فردي . لذلك ، إذا ما أدركنا *إمكان اجراء كل مبادلة بعدد فردي من المبادلات بين العناصر المتجاورة* ، فإن ذلك ينهي البرهان ، لأن مجموع عدد فردي من الأعداد الفردية هو عدد فردي . من السهل التحقق من هذه الملاحظة بمثال : للمبادلة بين العنصرين الأول والرابع في المثال التالي وهما (٢) و (٣)، نستخدم خمس مبادلات (وهو عدد فردي) بين العناصر المتجاورة . بصورة عامة ، نحتاج إلى $l - k$ من مبادلات الجوار لنقل العنصر من الموضع k إلى الوضع l. ثم إلى $l - k - 1$ لنقل العنصر الذي كان في الأصل في الموضع l إلى الموضع k (هو الآن موجود في الموضع $l - 1$) . لما كان $(l - k) + (l - k - 1)$ عدداً فردياً ، نكون بذلك قد أنهينا البرهان . لاتتمتع المحددة بالخواص التي توصلنا إليها منذ قريب ، فقط ، بل هي موجودة أيضاً .

تمـــاريـــن

٤-٤-١ أوجد المحددة والعوامل المرافقة التسعة للمصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

ثم كون مصفوفة العوامل المرافقة حيث العامل المرافق للعنصر i,j هو A_{ij}
تحقق من أن جداء A في A_{cof} يساوي مصفوفة الوحدة مضروبة بالمحددة.
ماهي A^{-1}؟

٤-٤-٢ انطلاقاً من قانون المعكوس $A_{cof} / \det A$، فسر لماذا تكون A^{-1} ثلاثية عليا إذا كانت A ثلاثية عليا (وقابلة للعكس).

٤-٤-٣ استخدم مصفوفة العوامل المرافقة لعكس:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

٤-٤-٤ انطلاقاً من قانون المعكوس $A_{cof} / \det A$، فسر لماذا تكون A^{-1} متناظرة إذا كانت A متناظرة (وقابلة للعكس).

٤-٤-٥ أوجد x,y,z بواسطة قاعدة كرامر:

$$\begin{aligned} ax + by &= 1 \\ cx + dy &= 0 \end{aligned} \quad , \quad \begin{aligned} x + 4y - z &= 1 \\ x + y + z &= 0 \\ 2x \quad\;\; + 3z &= 0. \end{aligned}$$

٤-٤-٦ (أ) أوجد المحددة عندما يستبدل المتجه x بالعمود j في مصفوفة الوحدة:

إذا كان $M = \begin{bmatrix} 1 & & x_1 & & \\ & 1 & . & & \\ & & x_j & & \\ & & . & 1 & \\ & & x_n & & 1 \end{bmatrix}$ فإن $\det M = ?$

(ب) إذا كان $Ax = b$ برهن أن AM هي المصفوفة B_j في المعادلة (7)؛ الطرف الأيمن b يحتل محل العمود j.

(د) استخرج قانون كرامر بأخذ محددتي طرفي العلاقة $AM = B_j$.

٤-٤-٧ أوجد المحددة اليعقوبية J للتحويل من الاحداثيات القائمة إلى الاحداثيات الكروية r, θ, ϕ : $x = r \cos\theta \cos\phi$, $y = r \sin\theta \cos\phi$, $z = r \sin\phi$.

٤-٤-٨ (أ) ارسم المثلث الذي تقع رؤوسه في النقاط : $A = (2,2)$, $B = (-1,3)$, $C = (0,0)$، باعتباره نصف متوازي أضلاع، برر لماذا تكون مساحته تساوي :

$$\text{area}\ (ABC) = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

(ب) افرض أن رأسه الثالث في $C = (1,-4)$ بدلاً من $(0,0)$. برر القانون :

$$\text{area}\ (ABC) = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

ارشاد : اطرح السطر الأخير من كل من السطرين الآخرين فيبقى :

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 \\ -2 & 7 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}.$$

ارسم الرؤوس الجديدة $A' = (1,6)$, $B' = (-2,7)$, $C' = (0,0)$ ماعلاقتها بالرؤوس الأصلية A,B,C ؟

٤-٤-٩ برر، باستخدام مفاهيم الحجم، لماذا $\det 3A = 3^n \det A$، لمصفوفة A من النوع $n \times n$.

٤-٤-١٠ حذف الكتل يعطي، إذا كانت كتلة المحور A قابلة للعكس،

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{bmatrix}.$$

تدعى المصفوفة $D - CA^{-1}B$ متممة شور *Schur* . برهن أن جداء محددتها في $\det A$ يساوي محددة مصفوفة الكتلة الأصلية الواقعة في اليسار . إذا كان $A'C = C'A$ برهن أن ذلك يصبح $\det(AD - CB)$.

٤-٤-١١ ماهي قاعدة الضرب AB التي تأتي من ضرب الكتل بكتل طويلة ورقيقة ، وهي العمودان b و c والأسطر r ؟

$$AB = \begin{bmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & & \\ b_1 & \dots & b_n \\ & & \end{bmatrix}, \quad AB = \begin{bmatrix} & & \\ c_1 & \dots & c_n \\ & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}.$$

٤-٤-١٢ تنبأ مسبقاً بالعناصر المحاور وأكد ذلك بالحذف للمصفوفتين :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 0 \\ 2 & 7 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \\ 2 & 7 & 0 \end{bmatrix}.$$

٤-٤-١٣ أوجد جميع التباديل الفردية للأعداد $\{1,2,3,4\}$. إنها التباديل التي تنتج عن عدد فردي من المبادلات وتؤدي إلى $P_\sigma = -1$.

٤-٤-١٤ افرض أن التبديل σ ينقلنا من $(1,2,3,4,5)$إلى $(5,4,1,2,3)$

(أ) ماذا يفعل σ^2 في $(1,2,3,4,5)$ ؟

(ب) ماذا يفعل σ^{-1} في $(1,2,3,4,5)$ ؟

٤-٤-١٥ إذا كان σ تبديلاً فردياً ، فسر لماذا يكون σ^2 زوجياً لكن σ^{-1} فردي . أعط مثالاً بـ $n = 3$

٤-٤-١٦ برهن أنه إذا تابعت ضرب A بمصفوفة المبادلة ذاتها P ، فان السطر الأول يعود أخيراً إلى مكانه الأصلي.

٤-٤-١٧ إذا كانت A مصفوفة من النوع 5×5 تحقق عناصرها العلاقة $\left|a_{ij}\right| \le 1$ ، فان $\det A \le$ ؟ (لا أعرف الحد الأفضل، إلا أن الحجوم والقانون (٦) والمحاور تعطي حداً أعلى لهذه المحددة).

تمـــاريـــن مراجعة

٤-١ أين يمكنك أن تضع أقل عدد ممكن وكاف من الأصفار في مصفوفة من النوع 4×4 وذلك لتؤكد أن محددة هذه المصفوفة تساوي الصفر .

٤-٢ أين يمكنك أن تضع أصفاراً ووحداناً في مصفوفة من النوع 4×4 وذلك بأقل عدد ممكن وكافٍ بحيث تصبح محددة هذه المصفوفة مساوية الواحد .

٤-٣ أوجد قيمة المحددة لـ :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} .$$

٤-٤ إذا كان $B = M^{-1}AM$ فلماذا تكون $det\ B = det\ A$ ؟ برهن أيضاً أن $det\ A^{-1}B = 1$.

٤-٥ أوجد مثالاً معاكساً للعلاقة $det\ (A+B) = det\ A + det\ B$. ماهو حجم المصفوفات التي تكون من أجلها هذه القضية صحيحة ؟

٤-٦ انطلق من المصفوفة A واضرب سطرها الأول بالعدد (٣) لتحصل على مصفوفة B ثم، اطرح السطر الأول من B من السطر الثاني فتحصل على مصفوفة C . ماهي $det\ C$ بدلالة $det\ A$؟

٤-٧ حل باستخدام قاعدة كرامر النظام $3u + 2v = 7 , 4u + 3v = 11$.

٤-٨ إذا كانت عناصر A أعداداً صحيحة وكانت $det\ A$ مساوية (١) أو (-١)، كيف يمكنك أن تعرف أن عناصر A^{-1} أعداد صحيحة ؟ اعط مثالاً (غير قطري) من النوع 2×2 .

٤-٩ إذا كانت عناصر كل من A و A^{-1} أعداداً صحيحة، كيف يمكنك أن تعرف أن كلاً من محددتي هاتين المصفوفتين تساوي (١) أو (-١) ؟ إرشاد: ماهو جداء $det\, A$ في $det\, A^{-1}$ ؟

٤-١٠ أوجد جميع العوامل المرافقة للمصفوفات التالية وأوجد مقلوب كل منها:

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} .$$

٤-١١ ماهو حجم متوازي السطوح الذي تقع أربع من رؤوسه في النقاط: $(1-,2,2)$, $(2,-1,2)$, $(-1,2,2)$, $(0,0,0)$ ؟ أين تقع الرؤوس الأربعة الأخرى؟

٤-١٢ كم عدد حدود منشور محددة مصفوفة من النوع 5×5، وماهو عدد الحدود المؤكد كونها أصفاراً إذا كان $a_{21} = 0$ ؟

٤-١٣ إذا كان مجموع عناصر كل سطر من مصفوفة يساوي الصفر وإذا كان x متجه عمود عناصره وحدان، فما هو Ax ؟ كيف تعرف أن $det\, A = 0$ ؟

٤-١٤ لماذا يوجد عدد زوجي من التباديل لـ $(1,2,...9)$ ولماذا يكون نصف هذه التباديل فردياً ؟

٤-١٥ إذا كانت P_1مصفوفة مبادلة زوجية و P_2 فردية، استنتج من العلاقة $P_1 + P_2 = P_1(P_1^T + P_2^T)$ أن $det\,(P_1 + P_2) = 0$.

٤-١٦ أوجد قيمة محددة A إذا كان $a_{ij} = i + j$ دوماً.

٤-١٧ إذا كانت محددة A موجبة، برهن أنه يمكن ربطها بمصفوفة المطابقة بسلسلة متصلة من المصفوفات ذوات المحددات الموجبة. عندئذ تبدل A بمصفوفة المطابقة دون أن تصبح شاذة خلال الطريق. (الانتقال المباشر من A إلى I يجري بالمتتالية $A\,(t) = A + t\,(I - A)$، نطلق من $A\,(0) = A$ إلى $A(1) = I$، ولكن، خلال ذلك، يمكن أن تكون $A\,(t)$ شاذة. المسألة ليست سهلة ويرحب المؤلف بالحلول.

٤-١٨ إذا كانت A غير شاذة، برهن أنه توجد مصفوفة مبادلة P بحيث لاتحوي المصفوفة PA أصفاراً على قطرها الرئيسي. إنها ليست مصفوفة مبادلة الحذف.

٤-١٩ برر لماذا تقع النقطة (x,y) على المستقيم المار من النقطتين $(2,8)$ و $(4,7)$ إذا كان:

$$\text{de}\begin{bmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 8 & 1 \\ 4 & 7 & 1 \end{bmatrix} = 0, \quad \text{أو} \quad x + 2y - 18 = 0$$

٤-٢٠ بالمشابهة مع التمرين السابق، ماهي المعادلة التي تجعل النقطة (x,y,z) تقع في المستوي المار من النقاط $(0,0,4)$, $(0,2,0)$, $(2,0,0)$. إنها تحوي محددة من النوع 4×4 .

٤-٢١ إذا وقعت النقاط $(1,1,1)$, $(2,1,0)$, (x,y,z) في مستو مار من نقطة الأصل، لماذا تكون المحددة التي أسطرها متجهات هذه النقاط صفراً؟ هل المتجهات $(1,1,1)$, $(2,1,0)$, $(1,0,-1)$ مستقلة أم مرتبطة؟

٤-٢٢ إذا كان كل سطر من A مكوناً من +١ منفرداً أو −١ منفرداً أو واحد من كل منها (وأصفار في بقية المواقع) برهن أن $\det A$ تساوي ١ أو −١ أو صفر.

٤-٢٣ إذا كان $D = \begin{bmatrix} u & v \\ w & z \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ فإن العلاقة $CD = -DC$ الظاهرة في التمرين (١-٤-١٤) تصبح:

$$CD + DC = 0 \quad \text{أو} \quad \begin{bmatrix} 2a & c & b & 0 \\ b & a+d & 0 & b \\ c & 0 & a+d & c \\ 0 & c & b & 2d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(أ) أوجد محددة هذه المصفوفة A ذات النوع 4×4 و هي مصفوفة معاملات A .

(ب) برهن أن $det\, A = 0$ في حالتي $a + d = 0$ أو $ad - bc = 0$.
في بقية الحالات ، تكون $CD = -DC$ ممكنة ، فقط ، إذا كان $D = 0$.

٤-٢٤ فسر لماذا على محددة فاندرموند ذات النوع 4×4 :

$$V_4 = \det\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix}$$

أن تكون كثيرة حدود تكعيبية في x ولماذا تساوي كثيرة الحدود هذه الصفر عند $x = a$, $x = b$, $x = c$. استخدم العامل المرافق لـ x^3 من التمرين (٤-٢-١٠) الذي يؤدي إلى :

$$V_4 = (b - a)(c - a)(c - b)(x - a)(x - b)(x - c).$$

٤-٢٥ التبديل الدوار يبادل $(1,2,...,n)$ مع $(2,3,...,n,1)$. ماهي مصفوفة المبادلة P المقابلة ، وماهي محددتها (تتعلق بـ n) ؟

الفصل الخامس

القيم الذاتية والمتجهات الذاتية

٥-١ تمهيد

بهذا الفصل يبدأ «النصف الثاني» من نظرية المصفوفات . لقد استخدم النصف الأوّل بكامله ، تقريباً ، لدراسة النظام $Ax = b$ ولقد كانت التقنية الأساسية هي الحذف . بعد الآن ، ستؤدي هذه التقنية دوراً ثانويّاً . وستحل المسائل الجديدة بتبسيط مصفوفة - بجعلها قطرية أو مثلّثية عليا - إلاّ أن *الخطوة الأساسية لن تكون طرح مضاعف لسطر من سطر آخر* . لن نهتم ، إضافة الى ذلك ، بالمحافظة على فضاء أسطر مصفوفة وإنّما بالمحافظة على قيمها الذاتية . لقد تغيرت هذه القيم بالحذف .

لقد كان فعلاً ، فصل المحدّدات مرحلة انتقال من المسألة القديمة $Ax = b$ الى مسألة القيم الذاتية الجديدة . في هاتين الحالتين ، تودّي المحدّدة الى «حل منهجي» : الى قاعدة كرامر من أجل $Ax = b$ والى كثيرة الحدود $det\,(A - \lambda I)$ التي ستكون جذورها القيم الذاتية . (نؤكد أن جميع المصفوفات ستكون هنا مربّعة ؛ لن يكون للقيم الذاتية لمصفوفة مستطيلة أي معنى وكذلك محددتها) . رغم أنّه من الممكن استخدام المحددة لحل هذه المسألة ، إذا كان 3 أو $n = 20$ ؛ لكن عندما يكون n كبيراً ، فان حساب القيم الذاتية بهذه الطريقة سيكون أكثر طولاً وأشد صعوبةً من حل $Ax = b$. كما أن طريقة غاوس نفسها لن تساعد كثيراً في ذلك .

الخطوة الأولى ، هي معرفة ماهي القيم الذاتية وكيف يمكنها أن تكون مفيدة .

أحد تطبيقاتها وهو الذي سنقدّم به هذا المفهوم، هو حل نظام من المعادلات التفاضلية العادية. سوف لن نفرض أن القارىء ذو خبرة بالمعادلات التفاضلية! إذا كنت قادراً على اشتقاق الدوال المعتادة مثل x^n, $\sin x$, e^x فانك ستكون عارفاً بما فيه الكفاية. كمثال خاص، لننظر بزوج المعادلات:

$$\frac{dv}{dt} = 4v - 5w, \quad v = 8 \quad t = 0 \ \text{عند}$$
$$\frac{dw}{dt} = 2v - 3w, \quad w = 5 \quad t = 0 \ \text{عند} \qquad (١)$$

إن ذلك مسألة قيمة ابتدائية. لقد عُيّنت قيمة المجهول في اللحظة $t = 0$ وليس في طرفي فترة؛ لقد اهتممنا بوضع عابر مفضلين ذلك على الحالة الثابتة. يتطوّر هذا النظام خلال الزمن من قيمتين ابتدائيتين مفروضتين 8, 5. والمسألة هنا هي متابعة هذا التطوّر.

من السهل كتابة هذا النظام بالصورة المصفوفية. لنفرض u المتجه المجهول وقيمته الابتدائية u_0 و A مصفوفة المعاملات:

$$u(t) = \begin{bmatrix} v(t) \\ w(t) \end{bmatrix}, \quad u_0 = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

بهذه الرموز يصبح النظام:

$$\frac{du}{dt} = Au, \quad u = u_0 \quad t = 0 \ \text{عند} \qquad (٢)$$

تلك هي القضية الأساسية في المسألة. لاحظ أنّها معادلة من المرتبة الأولى ـ لايظهر فيها مشتقّات من مراتب عليا ـ وانّها خطية في المجاهيل، *ومعاملاتها ثابتة*. المصفوفة مستقلّة عن الزمن.

كيف نجد الحل؟ إذا كان هناك مجهول واحد عوضاً عن اثنين فانه من السهل الاجابة عن هذا السؤال. سيكون لدينا معادلة تفاضلية عددية عوضاً عن معادلة

متّجهة. وإذا كانت، بالاضافة الى ذلك، متجانسة بمعاملات ثابتة، فإنها تأخذ عندئذ، الصورة البسيطة :

(٣)
$$\frac{du}{dt} = au, \quad u = u_0 \quad t = 0 \text{ عند}$$

حلّها هو من الأشياء التي تحتاج الى معرفتها :

(٤)
$$u(t) = e^{at} u_0.$$

في بدء الزمن $t = 0$ تكون u مساوية u_0 لأن $e^0 = 1$. مشتقة e^{at} تحوي العامل a المطلوب، وذلك لأن $du/dt = au$. وهكذا تكون شروط البدء والمعادلة محقّقة معاً.

لاحظ سلوك u عندما يكون الزمن كبيراً. تكون هذه المعادلة غير مستقرّة إذا كان $a > 0$، وهي مستقرّة حيادياً إذا كان $a = 0$، وهي مستقرة إذا كان $a < 0$. يسعى الحل نحو اللانهاية أو يبقى محدوداً أو يسعى نحو الصفر. إذا كان a عدداً مركّباً $a = \alpha + i\beta$، فإن الاختبارات السابقة نفسها تطبّق على الجزء الحقيقي. الجزء التخيّلي ينتج تذبذباً $e^{i\beta t} = \cos\beta t + i\sin\beta t$؛ لكن الذي يتحكّم بالاستقرار هو المعامل $e^{\alpha t}$.

هذا المقدار يكفي من أجل المعادلة الفريدة. سنقوم بمعالجة مباشرة لنظام معادلات ونبحث عن حل *بدالة أسّية في* t، *من النوع ذاته الذي وجدناه في الحالة العددية*. بقول آخر، نبحث عن حلول من الصورة :

(٥)
$$v(t) = e^{\lambda t} y$$
$$w(t) = e^{\lambda t} z,$$

أو بالترميز المتّجه :

(٦)
$$u(t) = e^{\lambda t} x,$$

إن ذلك مفتاح حل المعادلات التفاضلية $du/dt = Au$. ***لنبحث عن الحل الأسي الصرف***. نعوّض بـ $v = e^{\lambda t} y$ و $w = e^{\lambda t} z$ في المعادلة الأصلية، فنجد :

$$\lambda e^{\lambda t} y = 4e^{\lambda t} y - 5e^{\lambda t} z$$

$$\lambda e^{\lambda t} z = 2e^{\lambda t} y - 3e^{\lambda t} z.$$

العامل $e^{\lambda t}$ مشترك في جميع الحدود ويمكن اختصاره. هذا الاختصار هو سبب فرض أس واحد λ للمجهولين معاً ; يبقى بعد الاختصار :

$$\begin{aligned} 4y - 5z &= \lambda y \\ 2y - 3z &= \lambda z. \end{aligned} \qquad (٧)$$

هذه هي المعادلة الأساسية ؛ بالترميز المصفوفي ، تأخذ الشكل $Ax = \lambda x$. يمكننا أن نراها من جديد عندما نستخدم الحل المتجه $u = e^{\lambda t}x$ مقدار متحوّل $e^{\lambda t}$ مضروب بمتجه ثابت x . **بتعويض** $u = e^{\lambda t}x$ **في** $du / dt = Au$ نجد $\lambda e^{\lambda t}x = A e^{\lambda t}x$ ، ***وينتج الاختصار :***

$$\boxed{Ax = \lambda x} \qquad (٨)$$

لدينا الآن المعادلة الأساسية لهذا الباب. إنّها تحوي متغيّرين x و λ وهي مسألة جبرية. يمكن تجاهل المعادلات التفاضلية ! يدعى العدد λ (لامبدا) ***قيمة ذاتية*** للمصفوفة A ، ويدعى المتّجه x ***المتجه الذاتي*** المرافق. هدفنا هو ايجاد القيم الذاتية والمتّجهات الذاتية واستخدامها.

حلول $Ax = \lambda x$

لاحظ أن $Ax = \lambda x$ ليست خطّية ، لأن Aمضروبة بـ x. إذا أمكن اكتشاف λ ، فان هذه المعادلة تصبح خطّية بالنسبة لـ x. في الحقيقة ، يمكننا أن نكتب $\lambda I x$ عوضاً عن λx [1] ، إذا نقلنا هذا الحد الى اليسار نجد المعادلة :

$$\boxed{(A - \lambda I)\, x = 0} \qquad (٩)$$

اليك مفتاح المسألة :

المتجه x يقع في الفضاء الصفري للمصفوفة $A - \lambda I$

نختار العدد λ بحيث يكون للمصفوفة $A - \lambda I$ فضاء صفري .

---

(١) إن هذه المطابقة المصفوفية ضرورية لإمكان اجتماع مصفوفات ومتجهات وأعداد بشكل قويم ؛ المعادلة $(A - \lambda)\, x = 0$ أقصر ولكنها مختلفة بصورة غير مفيدة .

طبعاً ، لكل مصفوفة فضاء صفري . لقد كان من المضحك اقتراح طريقة أخرى وإنّك ترى ذلك . نريد متّجهاً ذاتياً غير صفري x . المتّجه $x = 0$ يحقّق دوماً $Ax = \lambda x$ ويقع دوماً، في الفضاء الصفري، ولكنّه غير مستخدم في حل المعادلات التفاضلية. الهدف هو بناء $u(t)$ من الدوال $e^{\lambda t}x$ ، ***وما يهمّنا هو تلك القيم الخاصّة λ التي تقابلها متّجهات ذاتية غير صفرية .*** من أجل أي استخدام، يجب أن يحوي الفضاء الصفري لـ $A - \lambda I$ متّجهات غير صفرية. بشكل مختصر ، $A - \lambda I$ ***يجب أن تكون شاذّة .***

من أجل ذلك ، تعطي المحدّدة اختباراً قاطعاً .

٥أ يكون العدد λ قيمة ذاتية للمصفوفة A إذا وإذا فقط كان :

$$det(A - \lambda I) = 0 \tag{١٠}$$

هذه هي المعادلة المميّزة، يقابل كل حل لها متّجه ذاتي x يحقّق مايلي :

$$Ax = \lambda x \quad \text{أو} \quad (A - Ix)x = 0 \tag{١١}$$

في مثالنا إذا طرحنا λI من A فنجد:

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 4 - \lambda & -5 \\ 2 & -3 - \lambda \end{bmatrix}.$$

لاحظ أن λ قد طرح، فقط، من عناصر القطر الرئيسي (لأنّه مضروب بـ I). محدّدة $A - \lambda I$ هي :

$$\lambda^2 - \lambda - 2 \quad \text{أو} \quad (4 - \lambda)(-3-\lambda) + 10$$

هذه هي كثيرة الحدود المميّزة. جذورها، عندما تكون المحدّدة صفراً، هي القيم الذاتية التي تنتج عن القانون العام لايجاد جذور معادلة من الدرجة الثانية أو من الصورة التحليلية $\lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda + 1)(\lambda - 2)$. يساوي ذلك الصفر إذا كان $\lambda = -1$ أو $\lambda = 2$ كما يؤكّد ذلك القانون العام :

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = -1 \text{ أو } 2.$$

يوجد، فقط، قيمتان ذاتيتان لأن لمعادلة الدرجة الثانية جذرين. لكل مصفوفة من النوع 2×2، تكون محدّدة $A - \lambda I$ حاوية λ^2 (ولا يوجد فيها قوة أعلى).

أي واحدة من القيمتين $\lambda = -1$ و $\lambda = 2$ تؤدّي الى حل للنظام $Ax = \lambda x$ أو $(A - \lambda I)x = 0$. المصفوفة التي محدّدتها صفر هي مصفوفة شاذّة، لذا، يجب أن يقع متّجه غير صفري x في فضائها الصفري[١]. في الحقيقة، يحوي الفضاء الصفري مستقيماً كاملاً من المتّجهات الذاتية ؛ إنّه فضاء جزئي!

$$\lambda_1 = -1: \qquad (A - \lambda_1 I)x = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

الحل (المتّجه الذاتي الأوّل) هو أي مضاعف للمتّجه :

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

حساب λ_2 يعطي بصورة منفصلة :

$$\lambda_2 = 2: \qquad (A - \lambda_2 I)x = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

المتّجه الذاتي الثاني هو أي مضاف للمتّجه :

$$x_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

ملاحظة *تتعلّق بحساب المتّجهات الذاتية* : في حالة 2×2، سيكون كل من سطري $A - \lambda I$ مضاعفاً للمتّجه (a,b) نفسه. لذا، فإن المتّجه الذاتي سيكون أي مضاعف للمتّجه $(-b,a)$. لقد كان سطرا $A - \lambda_2 I$ هما $(2, -5)$ وكان المتّجه الذاتي $(5, 2)$. في حالة 3×3، كثيراً ما نجعل مركّبة للمتّجه x مساوية الواحد ونحل $(A - \lambda I)x = 0$ من أجل المركبة الثانية. طبعاً، إذا كان x متّجهاً ذاتيّاً فان $7x$ و $-x$ كذلك. كل متّجهات الفضاء

---

(١) إذا أدى حل $(A - \lambda I)x$ إلى $x = 0$، فان λ ليست قيمة ذاتية.

الصفري للمصفوفة $A-\lambda I$ (الذي نسمّيه فضاء ذاتياً) يحقّق $Ax=\lambda x$. في هذه الحالة، الفضاء الذاتي مستقيم يمر من $x_1=(1,1)$ و $x_2=(5,2)$

قبل العودة الى التطبيق (المعادلة التفاضلية)، نريد أن نذكر خطوات حل مسألة القيم الذاتية :

١ - **حساب محدّدة** $A-\lambda I$. بطرح λ من عناصر القطر، هذه المحدّدة كثيرة حدود من الدرجة n .

٢ - ***ايجاد جذور كثيرة الحدود هذه***. الجذور الـ nهي القيم الذاتية .

٣ - ***من أجل كل قيمة ذاتية، حل المعادلة*** $(A-\lambda I)x=0$. بما أن المحدّدة تساوي الصفر، فهناك حلول غير $x=0$. هذه الحلول هي المتّجهات الذاتية .

في المعادلة التفاضلية، ينتج ذلك الحلول الخاصة $u=e^{\lambda t}x$. *إنّها الحلول الأسّية الصرفة* :

$$u=e^{\lambda_1 t}x_1=e^{-t}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad u=e^{\lambda_2 t}x_2=e^{2t}\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}.$$

أكثر من ذلك، يعطي هذان الحلاّن الخاصّان الحل الكامل. يمكن ضرب كل منهما بعدد وجمع الناتجين معاً . عندما تحقّق دالتان، u_2 و u_1 معادلة تفاضلية خطّية $du/dt=Au$، فان مجموعهما u_1+u_2 ، كذلك، حل لها. لذا فان أي تركيب من الصورة :

$$u=c_1e^{\lambda_1 t}x_1+c_2e^{\lambda_2 t}x_2 \qquad (١٢)$$

هو حل أيضاً. إن ذلك **وضع ممتاز** يطبّق على المعادلات التفاضلية (المتجانسة والخطّية) كما طُبّق على المعادلات الجبرية $Ax=0$. الفضاء الصفري هو، أيضاً، فضاء جزئي وتراكيب الحلول هي أيضاً حلول.

لدينا الآن ثابتان اختياريّان c_2,c_1 ومن المنطقي أن نختارهما بحيث تتحقّق شروط البدء $u=u_0$ عند $t=0$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \text{أو} \quad c_1 x_1 + c_2 x_2 = u_0 \qquad (١٣)$$

الثابتان هما $c_1 = 3$ و $c_2 = 1$ ***وحل المعادلة الأصلية هو*** :

$$u(t) = 3e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + e^{2t} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}. \qquad (١٤)$$

بكتابة المركبتين بصورة منفصلة، يعني ذلك أن :

$$v(t) = 3e^{-t} + 5e^{2t}, \quad w(t) = 3e^{-t} + 2e^{2t}.$$

شرطا البدء $v_0 = 8$ و $w_0 = 5$ ومن السهل التحقّق من ذلك .

يظهر ما تقدّم أن مفتاح أي معادلة هو قيمها الذاتية ومتّجهاتها الذاتية . لكن، لماذا لم يبيّن هذا المثال أهميّتها الفيزيائية ؛ إنّها مهمّة بذاتها وليس، فقط، لكونها جزءاً من طريقة لإيجاد u . من المحتمل أن يكون أبسط مثال هو سير جنود على جسر . فهم، عادة، يوقفون المشية العسكرية ويسيرون عرضانيّاً . السبب هو أنّه من الممكن أن يكون للمشية تواتر يساوي أحد المتّجهات الذاتية للجسر فيبدأ بالاهتزاز (مثل ما يجري عندما يتأرجح طفل؛ تلاحظ مبكّراً التواتر الطبيعي للأرجوحة وبموافقة ذلك نجعل الأرجوحة تزداد ارتفاعاً) . يحاول المهندس جعل التواتر الطبيعي لهذا الجسر أو الصاروخ بعيداً عن تواتر الهواء أو حركات الزيت . في الطرف الأقصى المعاكس، يضيع سمسار البورصة حياته ليحصل على معلومات تتعلّق بالتواتر الطبيعي للسوق . القيمة الذاتية هي أهم الصفات المميّزة لنظام الحركة .

تلخيص وأمثلة :

نتوقّف الآن لنلخّص ما أعطي وما بقي علينا . بيّن هذا التمهيد لماذا تظهر القيم الذاتية والمتّجهات الذاتية للمصفوفة A، بصورة طبيعية وآلية عندما نحل المعادلة $du/dt = Au$. لمثل هذه المعادلة حلول آسّية صرفة $u = e^{\lambda t}x$ ؛ تعطي القيم الذاتية معدّل

تزايد أو تناقص، وتتطوّر المتجهات الذاتية وفق هذا المعدّل. الحلول الأخرى ستكون مزيجاً من هذه الحلول الصرفة، تُعدّل هذه الخليطة بحيث يلائم شروط البدء.

المعادلة الأساسية هي $Ax=\lambda x$. أغلب المتّجهات x قد لا تُحقّق مثل هذه المعادلة. يحوّل متّجه نموذجي اتّجاهه عندما يضرب بالمصفوفة A، لذا، فان Ax ليس مضاعفاً لـ x. هذا يعني ***أن بعض الأعداد الخاصّة*** λ ***، فقط، تُمثّل قيماً ذاتية وكذلك بعض المتّجهات*** x ***، فقط، تمثّل متّجهات ذاتية.*** طبعاً، إذا كانت A مضاعفاً لمصفوفة الوحدة، فإنه لا يوجد متّجه يغيّر اتّجاهه (عندما يضرب بهذه المصفوفة) وكل المتّجهات تصلح متّجهات ذاتية. لكن، في الحالة المعتادة، تكون المتّجهات الذاتية قليلة. إنّها "النماذج الأساسية" للنظام، وإنّها تؤثّر بصورة مستقلّة. يمكننا أن نراقب سلوك كل متّجه ذاتي ثمّ نركّب النماذج القياسية لايجاد الحل. لرؤية الأمر ذاته من طريق آخر، يمكن *تقطير المصفوفة الأساسية*.

نخطّط لتخصيص البند (٥-٢) لنظرية التقطير والبنود التالية لتطبيقاتها: أوّلاً معادلة الفرق واعداد فيبوناتشي *Fibonacei* وطريقة ماركوف *Markov* وأخيراً المعادلات التفاضلية. في كل مثال، نبدأ بحساب القيم الذاتية والمتّجهات الذاتية؛ لا يوجد طريق مختصر لتفادي ذلك. لكن الأمثلة تسير في اتّجاهات كثيرة بحيث يكون التلخيص مستحيلاً، عدا التأكيد على أن المصفوفات المتناظرة، بصورة خاصّة، سهلة وبعض «المصفوفات المعيبة» بصورة خاصّة صعبة. يعوزها مجموعة كاملة من المتّجهات الذاتية، إنّه لا يمكن تقطيرها وإنّها تحدث فشلاً في تقنية النماذج القياسية. ممّا لاشك فيه، أنّها تحتاج للمناقشة ولكنّي لا أنوي وضعها في هذا الكتاب.

نبدأ بأمثلة خاصّة لمصفوفات جيّدة.

مثال – ١ كل شيء واضح عندما تكون A ***قطرية*** :

لـ $A=\begin{bmatrix}3&0\\0&2\end{bmatrix}$ $\lambda_2=3$ بـ $x_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ و $\lambda_2=2$ بـ $x_2=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

تؤثّر A على كل متّجه مثل تأثير مضاعف لمصفوفة الوحدة $Ax_1 = 3x_1$ و $Ax_2 = 2x_2$. أي متّجه آخر مثل $x = (1,5)$ هو خليط من هذين المتّجهين $x_1 + 5\,x_4$ وعندما تضرب المصفوفة A المتّجه x نجد :

$$Ax = \lambda_1 x_1 + 5\lambda_2 x_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

لقد كان ذلك متّجهاً نموذجيّاً- ليس متّجهاً ذاتيّاً- لكن تأثير A يتعيّن بمتّجهاتها الذاتية وقيمها الذاتية .

مثال – ٢ : الوضع مناسب أيضاً من أجل ***الاسقاط*** :

لـ $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ $\lambda_1 = 1$ بـ $x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, و $\lambda_2 = 0$ بـ $x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

القيمتان الذاتيتان لمصفوفة الاسقاط هما إمّا واحداً أو صفراً . يكون $\lambda = 1$ عندما يكون مسقط متّجه هو نفسه و $\lambda = 0$ عندما يكون مسقطه المتّ جه الصفري . فضاء أعمدة P ممتلئة بالمتّجهات الذاتية وكذلك الفضاء الصفري . إذا كان لهذين الفضاءين r و $n-r$ من الأبعاد فان $\lambda = 1$ تتكرّر r مرّة و $\lambda = 0$ نتكرّر $n-r$ مرة :

$$\text{لـ} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ، \quad \lambda = 1, 1, 0, 0.$$

يوجد ، أيضاً ، أربع قيم ذاتية ، رغم أنّها غير مختلفة ، عندما تكون P من النوع 4×4

لاحظ أنّه ***لا يوجد أي شيء استثنائي حول*** $\lambda = 0$ ، مثل أي عدد آخر ، يمكن للصفر أن يكون قيمة ذاتية . إذا كان ذلك ، فان متّجهه الذاتي يحقّق $Ax = 0x$. لذا ، فان x من الفضاء الصفري للمصفوفة A . يشير وجود قيمة ذاتية صفرية الى أن أعمدة A مرتبطة خطّياً وكذلك الأسطر ؛ محددتها صفر . تحقّق جميع القيم الذاتية لمصفوفة قابلة للعكس $\lambda \neq 0$ بينما من أجل مصفوفة شاذّة ، يقع الصفر ضمن قيمها الذاتية .

مثال – ٣ : تكون القيم الذاتية واضحة عنما تكون A ***مثلّثية*** :

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 & 5 \\ 0 & \frac{3}{4}-\lambda & 6 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\tfrac{3}{4}-\lambda)(\tfrac{1}{2}-\lambda).$$

المحدّدة هي، تماماً، جداء العناصر القطرية. وتساوي الصفر عندما $\lambda = 1$ أو $\lambda = \frac{3}{4}$ أو $\lambda = \frac{1}{2}$ ؛ القيم الذاتية واقعة مسبقاً على طول القطر الأساسي.

هذا المثال الذي يمكن أن تجد فيه القيم الذاتية بالنظر، يشير الى موضوع أساسي في هذا الباب : تحول A الى مصفوفة قطرية أو مثلّثية *دون أي تغيير في قيمها الذاتية*. نريد أن نؤكّد مرّة أخرى أن التحليل الغاوسي $A = LU$ غير ملائم لهذا الغرض. يمكن لقيم U الذاتية أن تكون ظاهرة على القطر، ولكنّها ليست القيم الذاتية للمصفوفة A.

من أجل أغلب المصفوفات، لا يوجد شك أبداً في أن مسألة القيم الذاتية أشد صعوبة، من الناحية الحسابية، من حل $Ax = b$. من أجل نظام خطّي، يعطي عدد محدود من خطوات الحذف الجواب الصحيح في زمن محدود. (أو بصورة مكافئة، تعطى قاعدة كرامر صيغة صحيحة للحل). في حالة القيم الذاتية، لاتوجد مثل هذه الخطوات ولا مثل هذا القانون، وإلاّ لرجع غالوا *Galois* من قبره. تكون كثيرة الحدود المميّزة لمصفوفة من النوع 5×5 من الدرجة الخامسة، ولقد برهن غالوا أنّه لاتوجد صيغة جبرية تعطي جذور كثيرة حدود من الدرجة الخامسة. كل ما أمكنه تقديمه هو بعض التحقيقات البسيطة فيما يتعلّق بالقيم الذاتية، وذلك بعد حسابها، نذكر فيما يلي اثنين منها :

٥ ب مجموع القيم الذاتية الـ n يساوي مجموع العناصر القطرية الـ n :

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_n = a_{11} + \dots + a_{nn} \qquad (١٥)$$

يعرف هذا المجموع تحت اسم ***الأثر***. إضافة الى ذلك، **جداء** القيم الذاتية التي عددها n يساوي محدّدة المصفوفة A.

لمصفوفة الاسقاط P العنصران القطريان $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ والقيمتان الذاتيتان $1 , 0$ ــ يتساوى $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ مع $1 + 0$ كما ينبغي . بالنسبة للمحدّدة، نلاحظ أنّها $0 = 0.1$. نرى هنا، أيضاً، أن للمصفوفة الشاذّة ذات المحدّدة الصفرية، واحدة أو أكثر من القيم الذاتية المساوية للصفر .

يجب أن لا نخلط بين العناصر القطرية والقيم الذاتية – إنّها متطابقة في حالة مصفوفة مثلّثية – لكن تلك حالة استثنائية . عادة، تكون المحاور والعناصر القطرية والقيم الذاتية مختلفة تماماً. من أجل مصفوفة من نوع 2×2، نتعرّف على كل شيء :

ل $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ الأثر $a + d$ والمحددة $ad - bc$

$$\det \begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - (\text{ trace })\lambda + \text{determinant}$$

$$\lambda = \frac{\text{trace} \pm \left[(\text{trace})^2 - 4\det\right]^{1/2}}{2}.$$

مجموع قيمتي λ يساوي الأثر؛ يعطي التمرين (٥-١-٩) $\Sigma \lambda_i$ يساوي أثر المصفوفة .

تمارين

٥-١-١ أوجد القيم الذاتية والمتّجهات الذاتية للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. تحقّق من أن الأثر يساوي مجموع القيم الذاتية وأن المحدّدة تساوي جداءها .

٥-١-٢ باستخدام المصفوفة السابقة A نفسها، حل المعادلة التفاضلية $du/dt = Au$, $u_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}$ ماهما الحلاّن الأسيّان الخالصان؟

٥-١-٣ نفرض أنّنا غيّرنا المصفوفة A السابقة بطرح $7I$ منها :

$$B = A - 7I = \begin{bmatrix} -6 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

ماهي القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للمصفوفة B وماذا يربطها بتلك المتعلقة بـ A ؟

٥-١-٤ حل المعادلة $du/dt=Pu$ حيث P هي مصفوفة الاسقاط :

$$u_0 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{بـ} \quad \frac{du}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} u$$

تزداد مركبة فضاء الأعمدة لـ u_0 بصورة أسّية بينما تبقى مركبة الفضاء الصفري ثابتة .

٥-١-٥ أوجد القيم الذاتية والمتّجهات الذاتية للمصفوفتين :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

تحقّق من أن المجموع $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$ يساوي الأثر وأن الجداء $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ يساوي المحدّدة .

٥-١-٦ أعط مثالاً تبيّن فيه أن القيم الذاتية قد تتغيّر عندما نطرح مضاعفاً لسطر من سطر آخر .

٥-١-٧ افرض أن λ قيمة ذاتية للمصفوفة A و x هو المتّجه الذاتي المقابل : $Ax = \lambda x$.

(أ) بيّن أن x ذاتها هي متّجه ذاتي للمصفوفة $B = A - 7I$ ، وأوجد القيمة الذاتية . يؤكّد ذلك التمرين (٥-١-٣) .

(ب) افرض $\lambda \neq 0$ ، برهن أن x هو متّجه ذاتي للمصفوفة A^{-1} أيضاً- وأوجد القيمة الذاتية .

٥-١-٨ برهن أن المحدّدة تساوي جداء القيم الذاتية وذلك بأن تتصوّر أن كثيرة الحدود المميّزة قد حلّلت بالصورة .

$$\det (A - \lambda I) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \ldots (\lambda_n - \lambda),$$

وأن تقوم باختيار ما لـ λ .

٥-١-٩ برهن، بخطوتين أن الأثر يساوي مجموع القيم الذاتية. أولاً، أوجد معامل $(-\lambda)^{n-1}$ من الطرف الأيمن من (١٥)- ثمّ انظر في حدود المحدّدة:

$$\det(A - \lambda I) = \det\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix}$$

التي تحوي $(-\lambda)^{n-1}$. بيّن لماذا يأتي كل ذلك من ضرب عناصر القطر الرئيسي، وأوجد معامل الطرف الأيسر من (١٥) قارن.

٥-١-١٠ (أ) أنشئ مصفوفتين A, B من النوع 2×2 بحيث تكون القيم الذاتية للجداء AB لا تساوي جداء القيم الذاتية لـ A و B، كما أن القيم الذاتية لـ $A+B$ لا يساوي مجموع القيم الذاتية لكل منهما.

(ب) حقق، مع ذلك، أن مجموع القيم الذاتية لـ A+B يساوي مجموع جميع القيم الذاتية لكل من A و B وكذلك الأمر من أجل الجداءات. . لماذا كان ذلك صحيحاً؟

٥-١-١١ برهن أن للمصفوفتين A^T و A القيم الذاتية ذاتها وذلك بمقارنة كثيرتي حدودهما المميّزتين.

٥-١-١٢ أوجد القيم الذاتية والمتّجهات الذاتية للمصفوفتين:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$$

٥-١-١٣ إذا كانت القيم الذاتية للمصفوفة B هي 1,2,3 وكان للمصفوفة C القيم الذاتية 4,5,6 وللمصفوفة D القيم الذاتية 7,8,9، فما هي القيم الذاتية للمصفوفة ذات النوع 6×6 $A = \begin{bmatrix} n & e \\ o & D \end{bmatrix}$.

٥-١-١٤ أوجد رتبة كل من المصفوفتين والقيم الذاتية الأربع لكل من المصفوفتين، مصفوفة الوحدان ومصفوفة الشطرنج:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

ماهي المتجهات الذاتية المقابلة للقيم الذاتية غير الصفرية.

٥-١-١٥ ماهي الرتبة والقيم الذاتية إذا كانت C و A، في التمرين السابق، من النوع $n \times n$؟ تذكر أن القيمة الذاتية $\lambda = 0$ مكررة $n-r$ مرة؟

٥-١-١٦ إذا كانت A مصفوفة وحدان من النوع 4×4، أوجد القيم الذاتية والمحدّدة للمصفوفة $A-I$ (قارن بالتمرين ٤-٣-١٠).

٥-١-١٧ اختر السطر الثالث "للمصفوفة المرافقة":

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

لتكون كثيرة الحدود المميّزة $|A - \lambda I| = -\lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 6$.

٥-١-١٨ افرض أن للمصفوفة A القيم الذاتية 0.1.2 ومتّجهاتها الذاتية v_0، v_1، v_2. صف الفضاء الصفري وفضاء الأعمدة، حل المعادلة $Ax = v_1 + v_2$ برهن أنّه ليس للنظام $Ax = v_0$ حل.

٥ - ٢ الشكل القطري لمصفوفة

نطلق الآن بواحد من الحسابات الأساسية وهو حساب سهل جدّاً وسيستخدم في كل بند من هذا الباب.

٥ح لنفرض أن للمصفوفة A ذات النوع $n \times n$، n من المتّجهات الذاتية المستقلّة خطّياً، فإذا اخترنا هذه المتّجهات أعمدة لمصفوفة S فإن $S^{-1}AS$ مصفوفة قطرية Λ، تقع القيم الذاتية للمصفوفة A على قطرها.

$$S^{-1}AS = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \cdot & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}. \qquad (1)$$

نسمّي S «مصفوفة المتّجهات الذاتية» و Λ «مصفوفة القيم الذاتية» – مستخدمين لامبدا كبيرة لأن لامبدا الصغيرة تمثّل القيم الذاتية على القطر.

البرهان : لنضع المتّجهات الذاتية x_i أعمدة للمصفوفة S ولنحسب الجداء AS باستخدام عمود واحد في كل مرّة :

$$AS = A\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 x_1 & \lambda_2 x_2 & \dots & \lambda_n x_n \end{bmatrix}$$

تقوم الخطّة على تفريق المصفوفة الأخيرة الى جداء مختلف تماماً عن السابق :

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 x_1 & \lambda_2 x_2 & \dots & \lambda_n x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \cdot & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

نعتبر ذلك تمرينا لضرب المصفوفات، من الضروري المحافظة على الترتيب الصحيح لهاتين المصفوفتين. إذا وقعت Λ قبل S بدلاً من أن تقع بعدها، فإن على λ_1 أن تضرب عناصر السطر الأوّل، في حين أنّنا نريدها أن تظهر في العمود الأوّل. في الواقع لدينا الجداء الصحيح SΛ لذلك يكون :

$$A = S\Lambda S^{-1} \quad \text{أو} \quad S^{-1}AS = \Lambda, \quad \text{أو} \quad AS = S\Lambda \qquad (٢)$$

المصفوفة S قابلة للعكس وذلك لأن أعمدتها المتّجهات الذاتية التي فرضت مستقلّة خطّياً.

سنضيف أربع ملاحظات قبل أن نعطي أمثلة وتطبيقات.

ملاحظة – ١ إذا لم يكن للمصفوفة قيم ذاتية مضاعفة – الأعداد $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ مختلفة فيما بينها، فإن المتّجهات الذاتية تكون بصورة آلية مستقلّة خطّياً (انظر ٥ د أدناه). لذلك، ***فان كل مصفوفة ذات قيم ذاتية مختلفة، قابلة للتقطير.***

ملاحظة – ٢ المصفوفة المقطّرة S ليست وحيدة. أوّلاً يمكن ضرب أي متّجه ذاتي x

بثابت فينتج ذلك متّجهاً ذاتيّاً . لذا ، يمكننا أن نضرب أعمدة S بأي ثوابت غير صفرية لنحصل على مصفوفة مقطّرة جديدة . القيم الذاتية المضاعفة تعطي أيضاً حريّة أكبر ، فمن أجل المثال التافه $A = I$ ، كل مصفوفة S قابلة للعكس تقوم بذلك : $S^{-1}IS$ دائماً مصفوفة قطرية (المصفوفة القطرية هنا هي I ذاتها) . ينتج عن ذلك أن أي متّجه يصلح متّجهاً ذاتيّاً لمصفوفة المطابقة .

ملاحظة – ٣ المعادلة $AS = SA$ صحيحة إذا كانت أعمدة S المتّجهات الذاتية للمصفوفة A ولا يصلح غير ذلك . *مصفوفات أخرى S قد لا تنتج مصفوفة قطرية* Λ . يكمن السبب في طريقة ضرب المصفوفات . لنفرض أن العمود الأول من S متجه ما y ، فيكون العمود الأول من SA هو $\lambda_1 y$. إذا كان على هذا المتّجه أن يتطابق مع العمود الأول من AS الذي هو Ay وفق ضرب المصفوفات ، فإن y يجب أن يكون متّجهاً ذاتيّاً : $Ay = \lambda_1 y$. بالفعل ، الترتيب الذي تظهر به المتّجهات الذاتية في S هو الترتيب ذاته للقيم الذاتية في Λ .

ملاحظة – ٤ ليس لكل مصفوفة n من المتجهات الذاتية المستقلة خطياً ، لذا ، ليست كل مصفوفة قابلة للتقطير . المثال المعتاد «لمصفوفة معيبة» هو :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

قيمتاها الذاتيتان $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ لأنّها مثلّثية بأصفار على قطرها :

$$\det (A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2.$$

إذا كان x متجهاً ذاتياً فان عليه أن يحقق :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{أو} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

رغم أن $\lambda = 0$ قيمة ذاتية مزدوجة – *مضاعفتها الجبرية* ٢ – فان لها فضاء متّجهات ذاتية ذا بعد يساوي الواحد . *المضاعفة الهندسية* لهذه القيمة الذاتية تساوي الواحد–

يوجد فقط متّجه ذاتي واحد مستقل – ولا يمكننا تكوين S . (المضاعفة الهندسية لقيمة ذاتية هي عدد أبعاد الفضاء الذاتي المرافق لهذه القيمة).

هناك برهان آخر أكثر مباشرة لكون A غير قابلة للتقطير . لما كان $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ فان Λ ستكون المصفوفة الصفرية . فاذا كان $S^{-1}AS = 0$ وإذا ضربنا من اليسار بـ S ومن اليمين بـ S^{-1} ، فاننا نستنتج أن $A = 0$. ولمّا كانت A لا تساوي الصفر فان هذا التناقض يثبت أنّه لا توجد مصفوفة S تؤدّي الى $S^{-1}AS = \Lambda$.

نأمل أن لا يكون هذا المثال مضلّلاً . ***ليس*** فشل التقطير نتيجة للقيم الذاتية الصفرية . المصفوفتان :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

غير قابلتين للتقطير رغم أن قيمهما الذاتية هي 3,3 و 1,1 . المسألة هي قلّة المتّجهات الذاتية – الضرورية لتكوين S. يحتاج ذلك إلى تأكيد :

قابليّة التقطير تتعلّق بالمتّجهات الذاتية .

قابليّة العكس تتعلّق بالقيم الذاتية .

ليس هناك علاقة بين قابليّة التقطير (المتّجهات الذاتية مستقلّة) وقابليّة العكس (لا توجد قيم ذاتية صفرية) . الاشارة الوحيدة التي تأتي من القيم الذاتية هي : يمكن *للتقطير أن يفشل ، فقط ، إذا وُجدت قيم ذاتية مكرّرة* . ومع ذلك ، لن يكون ذلك دائماً . – للمصفوفة $A = I$ القيم الذاتية المكرّرة 1,1,...1 ولكنّهما بالصورة القطرية بصورة مسبقة! لا يوجد ، في هذه الحالة ، نقص في المتّجهات الذاتية . الاختبار هو التحقّق ، من كل قيمة ذاتية مكرّرة p مرّة ، ما إذا كان يقابلها p من المتّجهات الذاتية المستقلّة – بقول آخر ، إذا كان للمصفوفة $A-\lambda I$ الرتبة $n-p$.

لاتمام هذه الحلقة من الأفكار علينا أن نبرهن النظرية المفيدة التالية :

٥ د إذا قابلت المتّجهات الذاتية غير الصفرية $x_1,\ldots,x_n$ قيماً ذاتية مختلفة $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$

فإن هذه المتّجهات الذاتية مستقلّة خطّياً .

لنفرض مبدئيّاً أن $k=2$ ، وأن تركيباً ما لـ x_1, x_2 يساوي الصفر : $c_1x_1+c_2x_2=0$ لنضرب بالمصفوفة A ، فنجد $c_1\lambda_1x_1 + c_2\lambda_2x_2 = 0$. لنطرح جداء المعادلة السابقة بـ λ_2 فيختفي من هذه المعادلة المتّجه x_2 :

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_2)x_1 = 0.$$

لمّا كان $\lambda_1 \neq \lambda_2$ و $x_1 \neq 0$، فمن الضروري أن يكون $c_1 = 0$ بصورة مشابهة نجد أن $c_2 = 0$، وينتج عن ذلك أن المتّجهين مستقلاّن ؛ لايوجد سوى التركيب التافه يساوي الصفر .

يمكن تمديد هذه الطريقة ذاتها من أجل أي عدد من المتّجهات الذاتية : نفرض تركيباً خطّياً يساوي الصفر ، نضرب بـ A ، نطرح جداء λ_k بالتركيب الأصلي ، فيختفي المتّجه x_k ويبقى لدينا تركيب للمتّجهات $x_1,...,x_{k-1}$ يساوي الصفر . بتكرار هذه الخطوات ذاتها (أو باستخدام طريقة *الاستقراء الرياضي*)، ننتهي أخيراً بمضاعف لـ x_1 يساوي الصفر . إن ذلك يوجب أن يكون $c_1 = 0$. وفي النهاية، نجد أن كل $c_i = 0$. لذلك ، فان المتّجهات الذاتية التي تنتج عن قيم ذاتية مختلفة هي متّجهات مستقلّة خطّياً .

إذا كان لمصفوفة n من القيم الذاتية المختلفة فإنّها قابلة للتقطير . هذه حالة نموذجية .

أمثلة للتقطير :

نعود الى النقطة الرئيسية لهذا البند التي كانت $S^{-1}AS = \Lambda$. مصفوفة المتّجهات الذاتية S تحوّل المصفوفة الأصلية A الى مصفوفة القيم الذاتية Λ - التي هي مصفوفة قطرية . يمكن أن يظهر ذلك بالاسقاط والدوران .

مثال - ١ لمصفوفة الاسقاط $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ مصفوفة القيم الذاتية $\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. المتّجهات

الذاتية التي حُسبت من قريب تذهب لتشغل أعمدة S :

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad و \quad AS = S\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

تتحقّق المعادلة الأخيرة بومضة عين. وهكذا $S^{-1}AS = \Lambda$

مثال – ٢ القيم الذاتية ذاتها غير واضحة في مصفوفة ***دوران*** :

$$\text{لـ} \quad K = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \det(K - \lambda I) = \lambda^2 + 1$$

تدور هذه المصفوفة المستوي ٩٠°، ***كيف يمكن لمتّجه أن يدور ولا يُغيّر اتجاهه؟*** ظاهرياً، هذا غير ممكن–باستثناء المتّجه الصفري غير المستخدم. لكن، لابدّ من وجود قيم ذاتية ولا بدّ أن نكون قادرين على حل المعادلة $du/dt = ku$. لكثيرة الحدود المميّزة λ^2+1، أيضاً، جذران–لكنّهما غير حقيقيّين.

إنّك تُدرك المخرج من هذا المأزق. القيمتان الذاتيتان للمصفوفة K عددان تخيليان هما $\lambda_1 = i$ و $\lambda_2 = -i$. المتّجهان الذاتيّان، أيضاً، غير حقيقيين. لسبب ما، بدوران قدره ٩٠°، بضرب هذان المتّجهان بأحد العددين i أو $-i$:

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \quad و \quad (K - \lambda_1 I)x_1 = \begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \quad و \quad (K - \lambda_2 I)x_2 = \begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

القيمتان الذاتيتان مختلفتان، وتخيليتان، المتّجهان الذاتيّان مستقلان. إنّهما يحتلان عمودي S:

$$S^{-1}KS = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \quad و \quad S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix}$$

ملاحظة : لقد واجهنا واقعاً لا مفر منه، ***وهو أن الأعداد المركّبة تحتاجها، أيضاً، المصفوفات الحقيقية.*** إذا وجد عدد قليل من القيم الذاتية الحقيقية، فإنه يوجد دوماً n

من القيم الذاتية المركّبة. (المركّبة تحوي الحقيقية، عندما يكون الجزء التخيّلي صفراً). إذا وجد عدد قليل من المتّجهات الذاتية في الفضاء R^3 أو في R^n، فاننا ننظّر في C^3 أو C^n، يحوي الفضاء C^n جميع متجهات الأعمدة التي مركّباتها مركبة، وسيكون لها تعاريف جديدة للطول والجداء الداخلي والتعامد. لكنه ليس أكثر صعوبة من R^n، وسنقدم في البند (٥ – ٥) تحويلاً سهلاً إلى الحالة المركبة.

القوة والجداء : A^k و AB

هناك وضعية أخرى يكون فيها الحساب سهلاً. لنفرض أننا قد وجدنا القيم الذاتية والمتجهات الذاتية لمصفوفة A. عندئذ، تكون القيم الذاتية لـ A^2 هي بالضبط $\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2$ وكل متجه ذاتي لـ A هو متجه ذاتي، أيضاً، لـ A^2. ننطلق من $Ax = \lambda x$ ونضرب مرة ثانية بـ A:

$$A^2x = A\lambda x = \lambda Ax = \lambda^2 x \qquad (٣)$$

لذا، فإن λ^2 هي قيمة ذاتية لـ A^2 بالإضافة إلى أن المتجه الذاتي نفسه. إذا لم يغير الضرب الأول اتجاه x فإن الضرب الثاني كذلك.

الأمر ذاته يحصل من أجل التقطير. إذا كان $S^{-1}AS = \Lambda$، لذا بتربيع الطرفين نجد:

$$(S^{-1}AS)(S^{-1}AS) = \Lambda^2 \quad \text{أو} \quad S^{-1}A^2S = \Lambda^2$$

تقطر المصفوفة A^2 بالمصفوفة S ذاتها وذلك لأن المتجهات الذاتية لم تتغير. القيم الذاتية رُبِّعت.

يستمر ذلك صحيحاً من أجل أي قوة لـ A:

٥ هـ القيم الذاتية لـ A^k هي $\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k$ إنها القوة ذات الأس k لقيم A الذاتية. يبقى كل متجه ذاتي لـ A متجهاً ذاتياً لـ A^k، وإذا كانت S تقطر A فإنها تقطر A^k أيضاً:

$$\Lambda^k = (S^{-1}AS)(S^{-1}AS) \ldots (S^{-1}AS) = S^{-1}A^kS. \qquad (٤)$$

كل S^{-1} تلغي S عدا S^{-1} الأولى و S الأخيرة.

إذا كانت A قابلة للعكس، فإن هذه القاعدة تطبق على المعكوس (القوة هنا هي K = - 1). ***القيم الذاتية لـ A^{-1}*** هي $1/\lambda_i$. يمكن أن يرى ذلك من دون تقطير:

إذا كان $Ax = \lambda x$ فإن $x = \lambda A^{-1}x$ و $\frac{1}{\lambda}x = A^{-1}x$

مثال : إذا كانت K دوراناً بمقدار ٩٠° فإن K^2 دوران بمقدار ١٨٠° وإن K^{-1} دوران بمقدار -٩٠°:

$$K = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ و } K^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ و } K^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

القيمتان الذاتيتان هما i و $-i$، مربعاهما 1- و 1-؛ مقلوباهما $1/i = -i$ و $1/(-i) = i$ يمكننا أن نصل إلى K^2، التي تمثل دورة كاملة بمقدار ٣٦٠°:

$$\Lambda^4 = \begin{bmatrix} i^4 & 0 \\ 0 & (-i)^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ وكذلك } K^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

القوة $i^4 = 1$ وهي دوران قدره ٣٦٠° إنها المطابقة.

ننتقل الآن إلى **جداء مصفوفتين** ونتساءل حول القيم الذاتية لـ AB. إنّه خلاب جداً أن نجرب المحاكمات ذاتها في محاولة لبرهان ما ليس صحيحاً بصورة عامة.

إذا كانت λ قيمة ذاتية للمصفوفة A و μ قيمة ذاتية للمصفوفة B، فهناك برهان خاطئ لكون $\mu\lambda$ قيمة ذاتية للجداء AB:

$$ABx = A\,\mu x = \mu Ax = \mu\lambda x$$

يكمن الخطأ بفرض أن للمصفوفتين B,A المتجه الذاتي x نفسه. بصورة عامة - هذا غير واقع. يمكننا أن نجد مصفوفتين قيمهما الذاتية أصفار بينما إحدى القيم الذاتية للجداء هي $\lambda = 1$:

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

المتجهان الذاتيان لهاتين المصفوفتين مختلفان تماماً، إنهما نموذجيتان. للسبب ذاته، ليس للقيم الذاتية للمصفوفة $A + B$ علاقة البتة مع $\lambda + \mu$.

هذا البرهان الخاطئ يتطلب الصحيح . إذا كان للمصفوفتين المتجه الذاتي نفسه ، فإن القيمتين الذاتيتين المقابلتين تُضرب إحداهما بالأخرى وتكون $\lambda\mu$ قيمة ذاتية لـ AB. لكن ، هناك أمر أكثر أهمية . هناك طريقة سهلة لتمييز الحالة التي تكون فيها المصفوفتان B,A مشتركتين بمجموعة المتجهات الذاتية ، وهي مسألة أساسية في ميكانيك الكم :

٥ و إذا كانت كل من B,A قابلة للتقطير ، فإنهما يشتركان بمصفوفة المتجهات الذاتية S إذا وإذا ، فقط ، كان $AB = BA$.

البرهان : إذا كانت المصفوفة S ذاتها تقطر المصفوفتين معاً $B = S\Lambda_2 S^{-1}$ و $A = S\Lambda_1 S^{-1}$ ، يمكننا أن نضرب هاتين العلاقتين بترتيبين مختلفين :

$$BA = S\Lambda_2 S^{-1} S\Lambda_1 S^{-1} = S\Lambda_2 \Lambda_1 S^{-1} \quad \text{و} \quad AB = S\Lambda_1 S^{-1} S\Lambda_2 S^{-1} = S\Lambda_1 \Lambda_2 S^{-1}$$

لما كان $\Lambda_1 \Lambda_2 = \Lambda_2 \Lambda_1$ (مصفوفتان قطريتان) نجد $AB = BA$.

في الاتجاه المعاكس ، نفرض أن $AB = BA$. ننطلق من $Ax = \lambda x$ ونجد :

$$ABx = BAx = B\lambda x = \lambda Bx$$

لذا ، فإن كلاً من x و Bx متجه ذاتي للمصفوفة A يشتركان بالقيمة الذاتية λ (وإلا فإن $Bx = 0$) . إذا فرضنا للملاءمة ، أن القيم الذاتية لـ A مختلفة – لجميع الفضاءات الذاتية بعد واحد – فإن Bx يجب أن يكون مضاعفاً لـ x . بقول آخر x أحد المتجهات الذاتية لـ B مثلما هو لـ A . إن برهان حالة تكرار القيم الذاتية أطول بقليل .

ملاحظة : في ميكانيك الكم توجد مصفوفات غير قابلة للمبادلة – مثل مصفوفة الموضع P ومصفوفة كمية الحركة Q - التي تقاسي من مبدأ عدم التيقن لـ هيسنبرغ *Heisenberg* . إنَّ مصفوفة الموضع متناظرة ومصفوفة كمية الحركة متناظرة تخالفية ، وتحقق كل منهما العلاقة $QP - PQ = I$. ينتج مبدأ عدم التيقن مباشرة ، من متراجحة شوارتز $(Qx)^T(Px) \le \|Qx\|\|Px\|$ الواردة في (٣ – ٢) :

$$\|x\|^2 = x^T x = x^T (QP - PQ)x \le 2\|Qx\|\|Px\|.$$

جداء $\|Qx\|/\|x\|$ فى $\|Px\|/\|x\|$ – اللذين يمثلان كمية الحركة وأخطاء الموضع، عندما تكون دالة الموجه x على الأقل، تساوي $\frac{1}{2}$. من المستحيل المحافظة على الخطأين صغيرين، وذلك عندما تحاول قياس موضع جزيء فإنك تغير كمية حركته.

في النهاية نصل إلى $A = S\Lambda S^{-1}$ حيث ينتج هذا التحليل عن القيم الذاتية. إنها ملائمة لأخذ قوى A، وإن A^2 الأكثر بساطة توضح ذلك. التحليل *LU* غير مأمون في التربيع. بينما تربيع $S\Lambda S^{-1}$ محكم. المربع هو $S\Lambda^2 S^{-1}$، المتجهات الذاتية لم تتغير وفيما يلي ستحل هذه المتجهات الذاتية معادلات الفروق والمعادلات التفاضلية.

تمارين

٥-٢-١ فرق المصفوفتين التاليتين وفق $S\Lambda S^{-1}$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad و \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

٥-٢-٢ أوجد المصفوفة A التي قيمتاها الذاتيتان 1 ,4 ومتجهاها الذاتيان $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ على الترتيب (إرشاد $A = S\Lambda S^{-1}$).

٥-٢-٣ أوجد جميع القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للمصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

واكتب مصفوفتين مقطرتين مختلفتين S .

٥-٢-٤ إذا كان لمصفوفة مثلثية عليا من النوع 3 x 3 العناصر القطرية 7 ,2 ,1، كيف يمكنك أن تعرف أنّه من الممكن تقطيرها؟ وماهي A؟

٥-٢-٥ أي مصفوفة ممّا يلي لايمكن تقطيرها؟

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

٥-٢-٦ (أ) إذا كان $A^2 = I$ ماهي القيم الذاتية الممكنة للمصفوفة A؟

(ب) إذا كانت A هذه من النوع 2 x 2 وليست I و I -، فأوجد أثرها ومحددتها.

(جـ) إذا كان السطر الأول (1 - ,3) فما هو السطر الثاني؟

٥-٢-٧ إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$، فأوجد A^{100} وذلك بتقطير A.

٥-٢-٨ نفرض أن $A = uv^T$ جداء عمود بسطر (مصفوفة ذات بعد واحد).

(أ) بضرب A في u، برهن أن u متجه ذاتي لـ A. ماهي λ ؟

(ب) ماهي القيم الذاتية الأخرى (ولماذا)؟

(جـ) احسب أثر $A = v^Tu$ بطريقتين، عن طريق مجموع عناصر القطر وعن طريق مجموع القيم الذاتية.

٥-٢-٩ برهن، بالحساب المباشر، أن لـ AB, BA الأثر نفسه وذلك عندما:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} q & r \\ s & t \end{bmatrix}.$$

استنتج أن $AB - BA = I$ مستحيل. (يحدث، فقط، عندما يكون عدد الأبعاد مالانهاية).

٥-٢-١٠ نفرض أن لـ A القيم الذاتية 1, 2, 4 فما هو أثر A^2؟ ماهي محددة $(A^{-1})^T$؟

٥-٢-١١ إذا كانت القيم الذاتية لـ A هي 1, 1, 2 فما هو الصحيح مما يلي؟ أعط تبريراً إذا كان صحيحاً ومثالاً معاكساً إذا كان خاطئاً:

(١) A قابلة للعكس.

(٢) A قابلة للتقطير.

(٣) A غير قابلة للتقطير.

٥-٢-١٢ نفرض أن المتجه الذاتي الوحيد هو مضاعف لـ $x = (1,0,0)$، عين الصحيح من الخاطئ فيما يلي:

A قابلة للعكس

لـ A قيم ذاتية متكررة

A غير قابلة للتقطير

٥-٢-١٣ قطر المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ وأوجد واحداً من جذورها التربيعية - أي مصفوفة مثل $R^2 = A$. ماهو عدد الجذور التربيعية الموجودة؟

٥-٢-١٤ إذا كانت A قابلة للتقطير، برهن أن محددة $A = S\Lambda S^{-1}$ هي جداء قيمها الذاتية.

٥-٢-١٥ برهن أن أي مصفوفة هي مجموع مصفوفتين غير شاذتين.

(٥ - ٣) معادلات الفرق والقوى A^k

ليست معادلات الفروق معروفة مثل المعادلات التفاضلية ولكن، من الواجب أن تكون كذلك. إنها تتقدم بعدد منته من خطوات محدودة بينما تستخدم المعادلات التفاضلية عدداً لانهائياً من خطوات لامتناهية في الصغر - مع ذلك، فإن النظريتين تبقيان متوازيتين بصورة قاطعة. إن ذلك مماثل للتشابه الكائن بين الحالات المنقطعة والمتصلة التي تظهر مراراً في الرياضيات. لعل أفضل توضيح لذلك إعطاء مثال لايدخل فيه جبر خطي من السعة n، إذ إن النقود في المصارف ليست سوى أعداد.

نفرض أنك توظف مبلغ 1000 $ مدة خمس سنوات بربح معدله 6%. إذا كان حساب الربح مرة واحدة في العام، فذلك يعني أن رأس المال سيُضرب بـ 1.06 ويكون $P_{k+1} = 1.06\, P_k$. هذه المعادلة معادلة فرق بخطوة واحدة في العام الواحد. إنها تربط رأس المال بعد $k + 1$ سنة برأس مال السنة السابقة. بعد خمس سنوات، سيُضرب المبلغ الأصلي $P_0 = 1000$ خمس مرات:

$$P_5 = (1.06)^5 P_0 = (1.06)^5\, 1000 = \$1338.$$

لنفرض الآن أن الخطوة الزمنية قد أرجعت إلى شهر، فتكون معادلة الفرق

الجديدة $P_{k+1} = (1+.06/12)P_k$، وبعد خمس سنوات أي بعد ٦٠ شهراً، نجد:

$$P_{60} = \left(1 + \frac{.06}{12}\right)^{60} p_0 = (1.005)^{60}\,1000 = \$1349.$$

الخطوة التالية هي تركيب الربح يومياً:

$$\left(1 + \frac{0.6}{365}\right)^{5.365} 1000 = \$1349.83.$$

أخيراً، لكي تترك المصارف عمالها دائمي الحركة، تعرض *تركيباً متصلاً للربح*. يُضاف الربح في كل لحظة، لذا تتعطل، عندئذ، معادلة الفرق. يمكنك أن تأمل أن الخازن لايعرف حساب التفاضل والتكامل فهو غير قادر على حساب ماهو مدين لك. سيكون أمامه احتمالان: إما أن يعمد إلى تركيب الربح أكثر فأكثر تواتراً ويجد أن النهاية هي:

$$\left(1 + \frac{0.6}{N}\right)^{5N} 1000 \rightarrow e^{.30}\,1000 = \$1349.87$$

أو يمكنه أن يحول ذلك إلى معادلة تفاضلية هي نهاية معادلة الفروق $p_{k+1} = (1 + .06\,\Delta t)p_k$. بنقل P_k إلى الطرف الأيسر والقسمة على خطوة الزمن Δt،

$$\frac{P_{k+1} - P_k}{\Delta_t} = .06P_k \quad \text{تقرب} \quad \frac{dp}{dt} = .06p$$

الحل هو $P(t) = e^{.06t}P_0$، وبعد خمس سنوات، يبلغ ذلك، أيضاً 1349.87 $. يبقى رأس المال محدوداً، حتى عندما يركب الربح في كل لحظة - الفرق الناتج هو أربع سنتات، فقط.

لقد اشتمل هذا المثال على معادلة فرق ومعادلة تفاضلية حيث سعت إحداهما إلى الأخرى عندما تلاشت الخطوة الزمنية. لكن، يوجد العديد من معادلات الفرق التي تبقى قائمة بذاتها. مثالنا التالي ينتج عن ***متتالية فيبوناتشي*** الشهيرة:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$$

لعلك تلاحظ قاعدة هذه المتتالية: كل عدد فيها يساوي مجموع العددين السابقين له،

$$F_{k+2} = F_{k+1} + F_k. \quad (1)$$

هذه هي معادلة الفروق. تظهر هذه المعادلة في كثير من التطبيقات الغريبة حتى استحقت كتاباً خاصاً بها. تنبت الأشواك والأوراق على شكل لولبي، وانك تجد مثلاً على شجرة الزعرور البري والتفاح والبلوط خمس نبتات لكل دورتين حول الساق. لشجرة الأجاص ثمان نبتات، لكل ثلاث دورات حول الساق. أما من أجل الصفصاف، فالأمر أكثر تعقيداً، إذ تظهر ١٣ نبتة لكل خمس حلقات. يظهر أن المجلي في ذلك هو دوار القمر (عباد الشمس) (Scientific American, November 1951) T. O'Connell الذي اختارت بذوره نسبة لاتصدق $F_{12}/F_{13} = 144/133$ (١).

كيف يمكننا أن نجد الحد الألفي من متتالية فيبوناتشي بطريقة تختلف عن الانطلاق من $F_0 = 0, F_o = 1$ والسير قدماً حتى F_{1000}؟ الهدف هو حل معادلة الفرق $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$ بالقدرة على إرجاعها إلى معادلة ذات خطوة واحدة $U_{k+1} = AU_k$. إن ذلك مشابه لتركيب الربح $P_{k+1} = 1.06P_k$، الاختلاف الوحيد هو أن المجهول هنا سيكون متجهاً والمضروب سيكون مصفوفة A: إذا كان:

$$u_k = \begin{bmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{bmatrix},$$

---

(١) انظر لأجل هذه التطبيقات النباتية كتاب دارسي تومسون D'Arcy Thompson's في النمو والشكل (Cambridge Univ. Press, 1942) أو كتاب بيتر ستينفس Peter Stevens ، النماذج الجميلة في الطبيعة (Little, Brown, 1974) . لقد نشرت مئات من خواص آخر لـ F_n في *Fibonacci' Quarterly* . يظهر أن فيبوناتشي هذا هو الذي حمل الأرقام العربية إلى أوربا حوالي عام ١٢٠٠ بعد الميلاد .

فإن :

$$F_{k+2} = F_{k+1} + F_k \quad F_{k+1} = F_{k+1} \quad \text{تصبح} \quad u_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u_k$$

هذا التحويل حيلة قياسية لأي معادلة من المرتبة s ، تركب $s - 1$ من المعادلات التافهة المشابهة للمعادلة $F_{k+1} = F_{k+1}$ مع المعادلة المفروضة لتكوين نظام ذي خطوة واحدة . في متتالية فيبوناتشي ، $s = 2$.

حل معادلة الفرق $U_{k+1} = AU_k$ سهل . ننطلق من u_0 وبعد خطوة واحدة ، نجد $u_1 = Au_0$. في الخطوة الثانية ، u_2 هي Au_1 التي هي A^2u_0 – كل خطوة تسبب ضرباً بـ A ، وبعد k خطوة يحصل k ضرباً :

حل المعادلة : $u_{k+1} = Au_k$ هو $u_k = A^k u_0$

المسألة الحقيقية هي إيجاد طريق سريع لحساب القوة A^k وبنتيجة ذلك ، تحصل على العدد الفيبوناتشي الألفي . مفتاح القضية يكمن في القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للمصفوفة A :

٥ ز إذا كانت المصفوفة A قابلة للتقطير $A = S\Lambda S^{-1}$ ، فإن :

$$u_k = A^k u_0 = (S\Lambda S^{-1})(S\Lambda S^{-1})\ldots(S\Lambda S^{-1})u_0 = S\Lambda^k S^{-1}u_0. \quad (٢)$$

أعمدة S هي المتجهات الذاتية للمصفوفة A وبوضع $S^{-1}u_0 = c$ ، نجد الحل :

$$u_k = S\Lambda^k c = \begin{bmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \cdot & \\ & & \lambda_n^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = c_1\lambda_1^k x_1 + \ldots + c_n\lambda_n^k x_n. \quad (٣)$$

الحل هو تركيب «للحلول الخلص» $\lambda_i^k x_i$.

لقد أعطت هذه القوانين ، فعلاً ، طريقتين مختلفتين توصلان إلى الحل ذاته $u_k = S\Lambda S^{k-1}u_0$. يقرر القانون الأول أن A^k متطابقة مع $S\Lambda^{k-1}S$ ، ويمكننا التوقف عند هذا الحد . لكن الطريقة الثانية تظهر ، بصورة أكثر وضوحاً ، توافق ذلك

مع حل معادلة تفاضلية: **عوضاً عن الحل الأسي الخالص** $e^{\lambda_i \tau} x_i q$، لدينا هنا قوة خالصة $\lambda_i{}^k x_i$. النماذج النظامية هي، من جديد، مكونة من المتجهات الذاتية x_i، التي تضخم في كل خطوة بالقيمة الذاتية λ_i. بتركيب هذه الحلول الخاصة بطريقة تتفق مع u_0، نكتشف، من جديد، الحل الصحيح $u_k = S\Lambda^k S^{-1} u_0$.

في أي مثال محدد، مثل معادلة فيبوناتشي، تكون الخطوة الأولى هي إيجاد القيم الذاتية:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \det A - \lambda I) = \lambda^2 - \lambda = 1,$$

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

السطر الثاني في $A - \lambda I$ هو $(1, -\lambda)$، لذا، فإن المتجه الذاتي هو $(\lambda, 1)$. يذهب عددا فيبوناتشي الأولان $F_0 = 0$ و $F_1 = 1$ في u_0 ونجد:

$$c = S^{-1} u_0 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/(\lambda_1 - \lambda_2) \\ -1/(\lambda_1 - \lambda_2) \end{bmatrix}.$$

هذان هما الثابتان في $x_k = c_1 \lambda_1{}^k x_1 + c_2 \lambda_2{}^k x_2$. لما كانت المركبة الثانية لكل من المتجهين الذاتيين هي 1، فإن ذلك يُبقي $F_k = c_1 \lambda_1{}^k + c_2 \lambda_2{}^k$ في المركبة الثانية لـ u_k:

$$F_k = \frac{\lambda_1^k}{\lambda_1 - \lambda_2} - \frac{\lambda_2^k}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \right].$$

وهذا هو الجواب الذي نريده. من ناحية اولى، هذا الجواب، فعلاً مفاجئ، إذ إن قاعدة فيبوناتشي $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$ تُعطي دوماً، عدداً صحيحاً وقد انتهينا هنا إلى كسور وجذور تربيعية. لذا، من الواجب اختصاره، بطريقة ما، وإبقاء عدد صحيح.

في الحقيقة، لما كان الحد الثاني $[(1-\sqrt{5})/2]^k/\sqrt{5}$ أصغر من النصف دائماً، فمن الواجب تحويل الحد الأول إلى أقرب عدد صحيح. الطرح يبقي الجزء الصحيح، فقط:

أقرب عدد صحيح إلى $F_{1000} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{1000}$

طبعاً، هذا العدد كبير جداً والعدد F_{1001} سيكون أكثر كبراً. من الواضح أن الجزء الكسري سيكون تافهاً، بصورة تامة، أمام الجزء الصحيح؛ النسبة F_{1001} / F_{1000} قريبة جداً من المقدار $1.618 \approx 2 / (1 + \sqrt{5})$، الذي كان اليونانيون القدماء يسمونه «المتوسط الذهبي»(١). بقول آخر سيصبح العدد λ_2^k تافهاً مقارنة بالعدد λ_1^k وإن النسبة F_{k+1} / F_k تقترب من $\lambda_1 = \lambda_1^{k+1} / \lambda_1^k$.

هذا مثال نموذجي يؤدي إلى قوى $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. إنه يحوي $\sqrt{5}$ لأن القيم الذاتية تحوي ذلك. إذا اخترنا مثالاً آخر فيه القيم الذاتية أعداد صحيحة، فإنه يمكننا أن نركز اهتمامنا على بساطة الحساب - ***بعد أن نقطر المصفوفة :***

$$\lambda_1 = 1,\ x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},\quad \lambda_2 = 6,\ x_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{نجد} \quad A = \begin{bmatrix} -4 & -5 \\ 10 & 11 \end{bmatrix}$$

$$A^k = S\Lambda^k S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & 6^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - 6^k & 1 - 6^k \\ -2 + 2.6^k & -1 + 2.6^k \end{bmatrix}.$$

تظهر القوتان 6^k , 1^k في المصفوفة الأخيرة A^k، مختلطة مع المتجهات الذاتية.

من أجل معادلة الفرق $u_{k+1} = Au_k$، نؤكد على النقطة الرئيسية. إذا كان x أحد المتجهات الذاتية فإن:

أحد الحلول الممكنة هو $u_0 = x \ , u_1 = \lambda x \ , u_2 = \lambda^2 x \ , \ldots$

عندما يحدث أن القيمة الابتدائية مساوية لمتجه ذاتي، فإن ذلك هو الحل: $u_k = \lambda^k x$ بصورة عامة u_0 ليس متجهاً ذاتياً. لكن إذا كان u_0 تركيباً لمتجهات ذاتية، فإن الحل u_k هو التركيب ذاته لهذه الحلول الخاصة.

---

(١) إن نسبة بعدي المستطيل الممتاز تساوي نسبة 1.618 إلى 1 .

٥ ح إذا كـان $u_o = c_1x_1 + \dots + c_nx_n$ فـإن $u_k = c_1\lambda_1{}^k x_1 + \dots + c_n\lambda_n{}^k x_n$. دور الأعداد c هو موافقة شروط البدء :

$$c = S^{-1}u_o \quad \text{و} \quad u_o = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = Sc \qquad (٤)$$

ننتقل الآن إلى التطبيقات المهمة لمعادلات الفروق - أو قوى المصفوفات .

قضية ماركوف

يوجد تمرين في الباب الأول يتعلق بالدخول والخروج إلى كاليفورنيا ، يستحق النظر إليه من طرف آخر . لقد كان وفق القاعدة التالية :

في كل عام يدخل إلى كاليفورنيا عشر السكان الموجودين خارجها ويخرج عشر سكانها منها .

إن ذلك يستدعي معادلة فرق . ننطلق بـ y_o ، عدد السكان الموجودين في الخارج وبـ z_o عدد السكان في الداخل ، فيكون عدد السكان الموجودين في الخارج والداخل في نهاية العام الأول :

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .9 & .2 \\ .1 & .8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_o \\ z_o \end{bmatrix} \quad \text{أو} \quad \begin{aligned} y_1 &= .9y_o + .2z_o \\ z_1 &= .1y_o + .8z_o \end{aligned}$$

مما لاشك فيه أن هذه المسألة تجري بصورة عفوية ولكنها تتمتع بالخاصتين الأساسيتين ***لقضية ماركوف :*** العدد الكلي للسكان يبقى ثابتاً ولايمكن لعدد السكان في الخارج أو في الداخل أن يصبح سالباً . تنعكس الخاصة الأولى على المصفوفة فيكون فعلاً ، ***مجموع عنصري كل عمود يساوي الواحد*** ؛ كما أن كل شخص دخل في العد ولم يزد أي شخص في العد أو نسي عدّه . تعكس الخاصة الثانية ***كون عناصر المصفوفة غير سالبة .*** مادامت القيمتان الابتدائيتان z_o و y_o غير سالبتين ، فإن الأمر ذاته سيكون صحيحاً من أجل y_1 و z_1 ، y_2 و z_2 وهكذا باستمرار . القوى A^k جميعها غير سالبة .

نقترح، أولاً، حل معادلة الفرق الخاصة هذه (مستخدمين القانون $A\Lambda^k S^{-1}u_o$) ثم ننظر فيما إذا كان عدد السكان يقترب أخيراً من «حالة ثابتة»، وفي النهاية، نناقش قضية ماركوف، بصورة عامة. للانطلاق بالحساب، نبدأ بتقطير المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} .9 & .2 \\ .1 & .8 \end{bmatrix}, \quad \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 1.7\lambda + .7,$$

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{و} \quad \lambda_2 = .7$$

$$A = S\Lambda S^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & .7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

لإيجاد A^k والتوزيع بعد k سنة نغير Λ إلى Λ^k:

$$\begin{bmatrix} y_k \\ z_k \end{bmatrix} = A^k \begin{bmatrix} y_o \\ z_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^k & \\ & .7^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_o \\ z_o \end{bmatrix}$$
$$= (y_o + z_o) \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} + (y_o - 2z_o)(.7)^k \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

هذان هما الحدان $c_1\lambda_1{}^k x_1 + c_2\lambda_2{}^k x_2$. العامل $\lambda_1{}^k = 1$ قد اختفى في الحد الأول، من السهل أن ترى ماذا يحصل بعد هذه السلسلة الطويلة: يصبح العامل $(.7)^k$ صغيراً جداً ***ويقترب الحل من حالة نهائية*** :

$$\begin{bmatrix} y_\infty \\ z_\infty \end{bmatrix} = (y_o + z_o) \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

مجموع السكان لايزال $y_o + z_o$ وهو، تماماً، كما في البدء، إلا أنه سيكون، في النهاية، ثلثا السكان خارج كاليفورنيا والثلث الآخر داخلها. هذا صحيح مهما كان التوزيع الابتدائي! يمكنك أن تتأكد أن هذه الحالة الثابتة هي، تماماً، التوزيع الذي طلب في التمرين (١-٣-١٣). إذا انطلقت السنة بـ 2/3 في الخارج و 1/3 في الداخل فإن

الأمر يبقى كذلك في النهاية :

$$Au_\infty = u_\infty \quad \text{أو} \quad \begin{bmatrix} .9 & .2 \\ .1 & .8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

الحالة الثابتة هي المتجه الذاتي لـ A المقابل لـ $\lambda = 1$. يترك الضرب بالمصفوفة A الذي ينقلنا من خطوة زمنية إلى الخطوة التي تليها ، u_∞ ثابتاً .

نلخص نظرية طريقة ماركوف :

٥ ط مصفوفة ماركوف غير سالبة ومجموع عناصر كل عمود فيها يساوي الواحد .

(أ) $\lambda_1 = 1$ قيمة ذاتية

(ب) متجهها الذاتي x_1 غير سالب – وهو حالة ثابتة لأن $Ax_1 = x_1$

(جـ) تحقق بقية القيم الذاتية $|\lambda_i| \le 1$.

(د) إذا كانت عناصر أي قوة لـ A موجبة فإن $|\lambda_i|$ الأخرى تصغر الواحد . الحل $A^k u_0$ يتقرب من مضاعف لـ x_1 - الذي هو الحالة الثابتة u_∞ .

لإيجاد مضاعف x_1 الحقيقي ، استخدم حقيقة كون عدد الأهالي الكلي ثابتاً . إذا بدأت كاليفورنيا بكون الـ 90 مليوناً فرد كلهم في الخارج ، فإنها تنتهي بـ 60 مليوناً في الخارج و30 مليوناً في الداخل وتنتهي ، أيضاً ، إلى الحال ذاته فيما اذا كان جميع السكان (٩٠ مليوناً) في الداخل عند البدء .

نريد أن نلاحظ أن بعض المؤلفين يتعامل مع A^T وكون مجموع الأسطر يساوي الواحد .

ملاحظة : لقد كان وصفنا لطريقة ماركوف محدداً تماماً . يتحرك الأهالي بنسب ثابتة . لكن إذا نظرنا إلى شخص بمفرده ، فإنه يمكن لقواعد الحركة أن تعطي تفسيراً احتمالياً . إذا كان الفرد خارج كاليفورنيا ، فإن احتمال تحركه إلى الداخل هو 1/10 ، وإذا كان في الداخل ، فإن احتمال خروجه هو 2/10 . تصبح حركته حادثة عشوائية وتسمى المصفوفة التي تتحكم بذلك ***مصفوفة انتقال*** . لايمكننا ، أبداً ، أن نعرف أين هو ، لكن ، في كل

عام، تعين مركبتا $u_k = A^k u_0$ احتمال وجوده في الخارج واحتمال وجوده في الداخل. يساوي مجموع هذين الاحتمالين الواحد - إنه موجود في مكان ما - ولا يكونا أبداً سالبين. إن ذلك يُعيدنا إلى الخاصتين الأساسيتين لمصفوفة الانتقال: مجموع عناصر كل عمود يساوي الواحد ولا يوجد أي عنصر سالب.

النقطة الأساسية في النظرية هي معرفة لماذا $\lambda = 1$ هي دائماً قيمة ذاتية، ولماذا متجهها الذاتي حالة ثابتة. من السهل تفسير النقطة الأولى. مجموع عناصر أي عمود من $A - I$ يساوي $1 - 1 = 0$. لذا، فإن مجموع أسطر $A - I$ يساوي السطر الصفري، إنها مرتبطة خطياً، $A - I$ شاذة وإن $\lambda_1 = 1$ إحدى قيمها الذاتية. باستثناء حالات خاصة جداً[1] ستتقرب u_k في النهاية من المتجه الذاتي المقابل. يقتضي ذلك القانون $u_k = c_1 \lambda_1^{\ k} x_1 + \ldots + c_n \lambda_n^{\ k} x_n$، الذي لايحوي أي قيمة ذاتية يمكنها أن تزيد على الواحد. (وإلا فإن الاحتمالات u_k ستزداد بسرعة كبيرة مثل أعداد فيبوناتشي.) إذا كانت بقية القيم الذاتية أصغر بصورة دقيقة من $\lambda_1 = 1$، فإن الحد الأول من الصيغة سيكون مهيمناً تماماً؛ $\lambda_i^{\ k}$ الأخرى تسعى نحو الصفر و $u_k \longrightarrow c_1 x_1 = u_\infty$.

إن ذلك مثال لواحد من المواضيع الأساسية في هذا الباب. بمعرفة معلومات حول A، أوجد معلومات حول قيمها الذاتية. هنا وجدنا $\lambda_{max} = 1$.

هناك فرق واضح بين أعداد فيبوناتشي وقضايا ماركوف؛ تزداد الأعداد F_k كثيراً بينما يقع أي احتمال، بالتعريف، بين الصفر والواحد. إن معادلة فيبوناتشي غير مستقرة وكذلك حال معادلة الربح المركب $P_{k+1} = 1.06 P_k$ حيث يزداد رأس المال باستمرار. إذا تناقصت احتمالات ماركوف نحو الصفر، فإن ذلك يعني أن تلك المعادلة

---

(١) إذا دخل كل شخص في الخارج وخرج كل شخص في الداخل، فإن وضع الأهالي ينعكس في كل سنة ولن يكون هناك حالة ثابتة. مصفوفة الانتقال هي $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ و -1 قيمة ذاتية مثل $+1$ - الأمر الذي لايمكن حدوثه إذا كان جميع $a_{ij} > 0$.

مستقرة؛ لكنها ليست كذلك لأنه، في كل مرحلة، يكون مجموعها مساوياً الواحد. لذلك، تكون ***قضية ماركوف مستقرة حيادياً*** .

لنفرض الآن أن لدينا معادلة فرق $u_{k+1} = Au_k$ وأننا نريد دراسة سلوكها عندما $k \longrightarrow \infty$. نفرض أنه يمكن تقطير A. فيكون الحل u_k تركيباً للحلول الخلص،

$$u_k = S\Lambda^k S^{-1} u_o = c_1 \lambda_1^k x_1 + \ldots + c_n \lambda_n^k x_n.$$

تتحكم العوامل $\lambda_i^{\ k}$ بتزايد u_k . لذا، ***فإن الاستقرار يتعلق بالقيم الذاتية .***

٥ ي تكون معادلة الفرق $u_{k+1} = Au_k$،

مستقرة إذا كانت جميع قيمها الذاتية محققة $|\lambda_i| < 1$

مستقرة حيادياً إذا حققت بعض القيم الذاتية $|\lambda_i| = 1$ والبقية $|\lambda_i| =< 1$ افي الحالة المستقرة تتقارب القوة A^k من الصفر. لذا، وكذلك حل $u_k = A^k u_0$

غير مستقرة إذا كانت واحدة على الأقل، من القيم الذاتية متحقق $|\lambda_i| < 1$

مثال المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

حتماً مستقرة؛ قيمتاها الذاتيتان $0, 1/2$ واقعتان على القطر الرئيسي وذلك لأن A مثلثية. إذا انطلقنا من أي متجه ابتدائي u_o واتبعنا القاعدة $u_{k+1} = Au_k$ فإن على الحل أن يتقرب في النهاية من الصفر:

$$u_o = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \quad u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{8} \end{bmatrix}, \quad u_4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{16} \end{bmatrix}, \ldots$$

يمكنك أن تلاحظ كيف تتحكم القيمة الذاتية الكبرى $\lambda = 1/2$ بالاضمحلال؛ بعد الخطوة الأولى، يساوي كل متجه u_k نصف الذي يسبقه. التأثير الحقيقي للخطوة الأولى هو تجزئة u_o إلى المتجهين الذاتيين للمصفوفة A:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \end{bmatrix},$$

وإبادة المتجه الذاتي الثاني (المتعلق بـ $\lambda = 0$). يضرب المتجه الذاتي الأول بـ $\lambda =$ 1/2 في كل خطوة.

المصفوفات الموجبة وتطبيقات :

بتطوير أفكار ماركوف، يمكننا أن نجد منجم ذهب صغير (اختياري بصورة تامة) من تطبيقات المصفوفات على الاقتصاد.

مثال – 1 مصفوفة الداخل – الخارج لليونتيف *Leontief*

إن ذلك أحد الإنجازات الكبيرة في الاقتصاد الرياضي. لتوضيح ذلك، ننشئ مصفوفة الاستهلاك – حيث a_{ij} تعطي مقدار الإنتاج j الذي يُحتاج لإيجاد وحدة من الانتاج i:

$$A = \begin{bmatrix} .4 & 0 & .1 \\ 0 & .1 & .8 \\ .5 & .7 & .1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{فولاذ} \\ \text{طعام} \\ \text{عمل} \end{matrix}$$

السؤال الأول هو: هل يمكننا إنتاج y_1 وحدة من الصلب و y_2 وحدة من الطعام و y_3 وحدة عمل؟ العمل كما يلي، علينا أن ننطلق بمقادير كبيرة $P_1\ P_2\ P_3$ لأن قسماً من الإنتاج يستهلكه الإنتاج ذاته. المقدار المستهلك هو Ap ويبقى إنتاج صافٍ هو $p - Ap$

مسألة : يطلب إيجاد متجه p بحيث يكون $p - Ap = y$ أو $P = (I - A)^{-1} y$.

من حيث المظهر، علينا أن نتساءل ما إذا كانت المصفوفة $I - A$ قابلة للعكس. لكن، لهذه المسألة شرط إضافي، ذلك أن الطلب والإنتاج p , y غير سالبين. وبما أن p هو $(I - A)^{-1} y$، فإن السؤال الحقيقي هو حول المصفوفة التي تضرب y:

متى تكون المصفوفة $(I - A)^{-1}$ غير سالبة؟

بصورة تقريبية، لايمكن لـ A أن تكون كبيرة. إذا استهلك الإنتاج كثيراً فلن يبقى شيء من الإنتاج. مفتاح القضية هو في كبر القيمة الذاتية λ_1 للمصفوفة A التي يجب أن تكون أصغر من 1:

إذا كانت $\lambda_1 > 1$ فإن $(I-A)^{-1}$ لايمكن أن تكون غير سالبة،

إذا كانت $\lambda_1 = 1$ فإن $(I-A)^{-1}$ غير موجودة،

إذا كانت $\lambda_1 < 1$ فإن $(I-A)^{-1}$ هي مجموع مصفوفات غير سالبة.

$$(I-A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3 + \ldots \qquad (٥)$$

في المثال ذي النوع 3 x 3، كانت $\lambda_1 = 9$ والخارج يزيد عن الداخل. والإنتاج يزداد.

من السهل إثبات ذلك، بعد معرفة الحقيقة الأساسية المتعلقة بالمصفوفات غير السالبة مثل A: ليس، فقط، أكبر قيمة ذاتية موجبة بل المتجه الذاتي x_1 كذلك. لذا، فإن للمصفوفة $(I-A)^{-1}$ المتجه الذاتي ذاته ويقابل القيمة الذاتية $1/(1-\lambda_1)$.

إذا كانت λ_1 أكبر من الواحد، فإن العدد الأخير سيكون سالباً. عندئذ، سيكون للمصفوفة $(I-A)^{-1}$ المتجه الذاتي الموجب x_1 عوضاً عن المتجه السالب $x_1/(1-\lambda_1)$. في هذه الحالة، $(I-A)^{-1}$ غير سالبة بالتأكيد. إذا كانت $\lambda_1 = 1$ فإن $I-A$ شاذة. الحالة الإنتاجية الصحية هي $\lambda_1 < 1$، حيث تسعى قوى A إلى الصفر (استقرار) وتتقارب المتسلسلة $I + A + A^2 + \ldots$. إذا ضربنا هذه المتسلسلة بـ $I-A$، فإنه يبقى لدينا مصفوفة الوحدة – جميع قوى A تختصر – لذا، فإن $(I-A)^{-1}$ تساوي مجموع مصفوفات غير سالبة. سنعطي مثالين:

لـ $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\lambda_1 = 2$ ويكون الاقتصاد خاسراً

لـ $A = \begin{bmatrix} .5 & 2 \\ 0 & .5 \end{bmatrix}$, $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ ويمكننا انتاج كل شيء

المصفوفتان $(I-A)^{-1}$ في الحالتين $\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$.

تهدف فكرة ليونتيف Laeontief إلى إيجاد نموذج يستخدم معلومات حقيقية من

اقتصاد حقيقي ؛ يحوي جدول الولايات المتحدة لعام ١٩٥٨م، ٨٣ صناعة ارسلت كل واحدة منها «جدول معاملات» للاستهلاك والإنتاج . تمتد النظرية إلى مابعد $(I-A)^{-1}$ ، لتقرر الأسعار الطبيعية ومسائل تتعلق بالوضع الأمثل . عادة، العمل حاجة محدودة يجب جعله من النهاية الصغرى . طبعاً، الاقتصاد ليس دوماً خطياً .

مثال ٢ *الأسعار من نموذج داخل - خارج مغلق .*

يدعى النموذج مغلقاً فيما إذا كان يستهلك كل ماينتج . لايغادر النظام أي شيء . في هذه الحالة، تعود المصفوفة A إلى مصفوفة ماركوف . ***مجموع عناصر كل عمود يساوي الواحد*** - يمكننا أن نتكلم عن قيم الصلب والطعام والعمل، عوضاً عن الوحدان . يمثل المتجه P الأسعار عوضاً عن مستويات الانتاج .

لنفرض أن P_0، هو متجه الأسعار . لذا، فإن Ap_0 يضرب الأسعار بالكميات ليعطي قيمة كل إنتاج . هذه مجموعة جديدة للأسعار يستخدمها النظام من أجل المجموعة التالية للقيم A^2p_0. المسألة هي ماإذا كانت هذه الأسعار تسعى إلى التوازن . هل توجد أسعار مثل $p = Ap$ وهل يقودنا النظام إلى ذلك؟

إنك تعرف أن p (غير سالب) كمتجه ذاتي لمصفوفة ماركوف A - يقابل القيمة الذاتية $\lambda = 1$. إنه الحالة الثابتة $\sqrt{}\infty$ ، وتتقرب من أي نقطة انطلاق p_0. يتعلق الاقتصاد بما يلي، عندما تتكرر المعاملة مراراً عديدة فإن السعر يسعى إلى الاستقرار .

لإتمام ذلك، نعطي شرحاً سريعاً للخواص الأساسية ***لمصفوفة موجبة*** - يجب أن لاتخلط مع المصفوفة المعرفة إيجابياً التي هي متناظرة وقيمتها الذاتية موجبة . هنا تكون جميع العناصر a_{ij} موجبة .

٥ ك أكبر قيمة ذاتية λ_1 لمصفوفة موجبة، هي حقيقية وموجبة، وكذلك الأمر من أجل مركبات المتجه الذاتي x_1 .

البرهان : لنفرض $A > 0$. الفكرة الأساسية هي أن ننظر في كل عدد t بحيث يكون A

$Ax \geq t\,x$ من أجل متجه غير سالب (غير $x = 0$) . لقد استخدمنا التراجح في $Ax \geq tx$ لهدف الحصول على ترشيحات كثيرة لـ t. من أجل أكبر القيم t_{max} (التي وصل إليها)، نريد أن نبرهن أن ***المساواة الصحيحة :*** $A\,x = t_{max}\,x$.

إذا لم تكن $A\,x \geq t_{max}\,x$ مساواة، نضرب بـ A. بسبب كون A موجبة، فإن ذلك يؤدي إلى متراجحة بالمعنى الدقيق $A^2x > t_{max}Ax$. لذا، فإن المتجه الموجب $y = Ax$ يحقق $Ay > t_{max}\,y$ وأن t_{max} يمكن أن يكون متزايداً. هذا التناقض يفرض المساواة $Ax = t_{max}\,x$، ويكون لدينا قيمة ذاتية. متجهها الذاتي x موجب وذلك لأن Ax الموجود في الطرف الأيسر للمساواة، حتماً، موجب.

لرؤية أنه لاتوجد قيمة ذاتية يمكن أن تكون أكبر من t_{max}، نفرض $Az = \lambda z$. بما أنه يمكن لـ λ و z أن تحويا أعداداً سالبة أو مركبة، فإننا نأخذ القيمة المطلقة: $|\lambda|\,|z| = |Az| \leq A\,|z|$ استناداً إلى «متراجحة المثلث». $|z|$ هذه ليست سالبة، لذا، فإن $|\lambda|$ هي إحدى المرشحات الممكنة لـ t. أي أن $|\lambda|$ لايمكنها أن تزيد على t_{max} – التي يجب أن تكون أكبر قيمة ذاتية.

هذه هي نظرية بيرون – فروبينبوس *Perron Frobinius* المتعلقة بالمصفوفات الموجبة وهي واحدة من أكثر النظريات استخداماً في الاقتصاد الرياضي.

مثال ٣ نموذج فون نيومان Von Neunann لاقتصاد تام .

نعود إلى المصفوفة A ذات النوع 3 x 3 التي أعطت استهلاك الصلب والطعام والعمل. إذا كان الخارج s_1 ، f_1 ، l_1 فإن الداخل المطلوب هو:

$$u_0 = \begin{bmatrix} .4 & 0 & .1 \\ 0 & .1 & .8 \\ .5 & .7 & .1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ f_1 \\ l_1 \end{bmatrix} = Au_1.$$

في الاقتصاد، تكون معادلة الفرق تراجعية! عوضاً عن $u_1 = Au_0$، لدينا $u_0 = Au_1$. إذا كانت A صغيرة (كما هي الآن) فإن الإنتاج لايستهلك كل شيء – والاقتصاد ينمو.

تتحكم القيم الذاتية لـ A^{-1} بهذا النمو . لكن ، مرة أخرى ، يوجد التفاف نحو غير السالب لأنه لايمكن للصلب والطعام والعمل أن يظهرا بكميات سالبة . تساءل فون نيومان عن المعدل الأعظمي t الذي يكون الاقتصاد من أجله نامياً ويبقى غير سالب ، يعني أن $u_1 \geq tu_0 \geq 0$.

تتطلب هذه المسألة أن يكون $u_1 \geq tA\, u_1$. إنها تشبه نظرية بيرون – فروبينيوس حيث تقع A في الطرف الآخر . كما سبق ، تتحقق المساواة ، فقط ، عندما t تبلغ t_{max} التي هي القيمة الذاتية المرافقة للمتجه الذاتي الموجب للمصفوفة A^{-1} . في هذا المثال ، فإن عامل النمو هو 10/9 :

$$Ax = \begin{bmatrix} .4 & 0 & .1 \\ 0 & .1 & .8 \\ .5 & .7 & .1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 \\ 4.5 \\ 4.5 \end{bmatrix} = \frac{9}{10}\, x \quad \text{و} \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

إذا تناسبت انتاجات الصلب – الطعام – العمل مع (٥ ، ٥ ، ١) فإن الاقتصاد ينمو بسرعة ماأمكن . ***معدل النمو الأعظمي هو*** $1/\lambda_1$.

تمارين

٥-٣-١ **(أ)** من أجل مصفوفة فيبوناتشي $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، اكتب A^2, A^3, A^4 ثم (باستخدام النص) أوجد A^{100} .

(ب) أوجد B^{-101} إذا كانت $B = \begin{bmatrix} 7 & 12 \\ -4 & -7 \end{bmatrix}$

٥-٣-٢ لنفرض أن فيبوناتشي قد انطلق بمتتاليته بالحدين $F_1 = 3$ و $F_0 = 1$ ، ومن ثم ، اتبع القاعدة نفسها $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$. أوجد المتجه الابتدائي الجديد u_0 والمعامل الجديد $c = S^{-1}u_0$ وأعداد فيبوناتشي الجديدة . برهن أن النسبة F_{k+1}/F_k متقاربة نحو المتوسط الذهبي .

٥-٣-٣ إذا كان كل عدد هو متوسط العددين اللذين يسبقانه ،

$G_{k+2} = \frac{1}{2}(G_{k+1} + G_k)$ كون المصفوفة A وقم بتقطيرها . إذا انطلقت من $G_o = 0, G_1 = 1/2$ ، أوجد قانون G_k واحسب نهايته عندما $k \to \infty$.

٥-٣-٤ درس بيرناديلي خنفساء «تعيش ثلاث سنين ، فقط ، وتلد في السنة الثالثة» . إذا كان احتمال بقاء مواليد الجيل الأول 1/2 ، ثم الجيل الثاني 1/3 ، ثم ينتج من الثالث ست إناث قبل الانتهاء ، فالمصفوفة هنا هي :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}.$$

برهن أن $A^3 = I$ ، تابع توزع الخنافس خلال ست سنوات منطلقاً من ٣٠٠٠ خنفساء لكل جيل .

٥-٣-٥ نفرض أن وباءً يصيب بالمرض كل شهر نصف الأصحاء ويموت ربع الذين أصيبوا بالمرض . أوجد الحالة الثابتة لهذه الحالة الخاصة من قضية ماركوف .

$$\begin{bmatrix} d_{k+1} \\ S_{k+1} \\ w_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_k \\ s_k \\ w_k \end{bmatrix}.$$

٥-٣-٦ اكتب مصفوفة الانتقال ذات النوع 3 x 3 لمقرر في الكيمياء يُدرس في شعبتين ، إذا علمت أنه في كل أسبوع ينسحب من المقرر ربع مافي الشعبة A وثلث مافي الشعبة B وينتقل سدس مافي كل شعبة إلى الشعبة الأخرى .

٥-٣-٧ أوجد القيم النهائية لـ y_k و z_k $(k \to \infty)$ إذا كان :

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= .8y_k + .3z_k \qquad y_o = 0 \\ z_{k+1} &= .2y_k + .7z_k \qquad z_o = 5. \end{aligned}$$

أوجد أيضاً صيغة لـ y_k , z_k من $A^k = S\Lambda^k S^{-1}$.

٥-٣-٨ (أ) انطلاقاً من الحقيقة : العمود ١ + العمود ٢ = ٢ (العمود ٣)، أي أن الأعمدة مرتبطة خطياً، ماهي إحدى القيم الذاتية لـ A وماهو المتجه الذاتي المقابل؟

$$A = \begin{bmatrix} .2 & .4 & .3 \\ .4 & .2 & .3 \\ .4 & .4 & .4 \end{bmatrix}.$$

(ب) أوجد بقية القيم الذاتية لـ A .

(جـ) إذا كان $u_o = (0, 10, 0)$، فأوجد نهاية $A^k u_o$ عندما $k \to \infty$.

٥-٣-٩ نفرض أنه توجد ثلاثة مراكز رئيسية لسيارات الشحن التي تؤجر بدون سائق. في كل شهر، يذهب نصف الموجود في بوسطن ولوس أنجلوس إلى شيكاغو ويبقى النصف الثاني حيث هو موجود، أما السيارات الموجودة في شيكاغو فتقسم بالتساوي بين بوسطن ولوس أنجلوس. أوجد مصفوفة الانتقال A التي هي من النوع 3 x 3 وأوجد الحالة الثابتة u_∞ المقابلة للقيمة الذاتية $\lambda = 1$.

٥-٣-١٠ (أ) في أي مدى لـ a , b تقع معادلة طريقة ماركوف التالية؟

$$u_{k+1} = u_k = \begin{bmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{bmatrix} u_k \ , \quad u_o = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(ب) احسب $u_k = S\Lambda^k S^{-1} u_o$ من اجل أي قيمتين للعددين a,b .

(جـ) تحت أي شرط على العددين a,b يمكن لـ u_k أن تتقرب من نهاية محدودة عندما $k \to \infty$، وما هذه النهاية؟ هل المصفوفة A مصفوفة ماركوف؟

٥-٣-١١ شركة متعددة الجنسيات في الولايات المتحدة واليابان وأوربا تُقدر موجوداتها بـ ٤ تريليون. عند الانطلاق، كان في الولايات المتحدة

تريليونان ومثلها في أوربا . في كل عام، يبقى نصف مال الولايات المتحدة في مكانه، ويذهب الربع إلى كل من اليابان وأوربا . بالنسبة لليابان وأوربا، يبقى النصف في مكانه ويرسل النصف الثاني إلى الولايات المتحدة .

(١) أوجد المصفوفة التي تعطي :

$$\begin{bmatrix} US \\ J \\ E \end{bmatrix}_{k+1\ \text{سنة}} = A \begin{bmatrix} US \\ J \\ E \end{bmatrix}_{k\ \text{سنة}}$$

(ب) أوجد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية لـ A .

(جـ) أوجد التوزيع النهائي للأربعة تريليونات في آخر العالم .

(د) أوجد التوزيع في السنة k .

٥-٣-١٢ إذا كانت A مصفوفة ماركوف، برهن أن مجموع مركبات Ax يساوي مجموع مركبات x . استنتج أنه إذا كان $Ax = \lambda x$ حيث $\lambda \neq 1$، فإن مجموع مركبات المتجه الذاتي يساوي الصفر .

٥-٣-١٣ حل $du/dt = Au = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u$ (القيمتان الذاتيتان $i, -i$) يدور على دائرة : $u = (\cos t, \sin t)$. نفرض أننا قربنا بمعادلات الفروق التقدمية والتراجعية والمتوسطة :

(أ) $u_{n+1} - u_n = Au_n$ أو $u_{n+1} = (I + A)u_n$

(ب) $u_{n+1} - u_n = Au_{n+1}$ أو $u_{n+1} = (I + A)^{-1}u_n$

(جـ) $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}Au_{n+1} + u_n$ أو $u_{n+1} = (I - \frac{1}{2}A)^{-1}(I + \frac{1}{2}A)u_n$

أوجد القيم الذاتية $(I - \frac{1}{2}A)^{-1}(I + \frac{1}{2}A)$. و $(I - A)^{-1}$ و $I + A$. لأي من معادلات الفروق، يبقى الحل على دائرة؟

٥-٣-١٤ ماهي قيمة α في النظام $u_{n+1} = \alpha(u_n + w_n),\ w_{n+1} = \alpha(u_n + w_n)$. التي تؤدي إلى عدم استقرار؟

٥-٣-١٥ أوجد أكبر القيم لـ a,b,c التي تكون من اجلها المصفوفات التالية مستقرة حيادياً:

$$\begin{bmatrix} a & -.8 \\ .8 & .2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} b & .8 \\ 0 & .2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} c & .8 \\ .2 & c \end{bmatrix}.$$

٥-٣-١٦ بضرب حد بحد، تحقق من أن $(I-A)(I + A + A^2 + \dots) = I$. تمثل هذه المتسلسلة اللانهائية $(I-A)^{-1}$، وهي غير سالبة عندما تكون A غير سالبة، شرط أن يكون لها مجموع محدود؛ هذا هو شرط كون $\lambda_1 < 1$. اجمع هذه المتسلسلة، وحقق أنها تساوي $(I-A)^{-1}$ لمصفوفة الاستهلاك:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

٥-٣-١٧ إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$، فأوجد القوى A^k (بما في ذلك A^0) وبرهن بالتفصيل أن مجموع هذه القوى يتفق مع $(I-A)^{-1}$.

٥-٣-١٨ فسر بالرياضيات أو بالاقتصاد لماذا يوجب تزايد أي عنصر من «مصفوفة الاستهلاك» A تزايد $t_{max} = \lambda_1$ (ويخفض الاستهلاك).

٥-٣-١٩ مانهاية كل من المصفوفات التالية عندما $k \to \infty$ (الحالة الثابتة).

$$\begin{bmatrix} .4 & .2 \\ .6 & .8 \end{bmatrix}^k \text{ و } \begin{bmatrix} .4 & .2 \\ .6 & .8 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} .4 & .2 \\ .6 & .8 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} ?$$

٥-٣-٢٠ برهن أن كل ثالث عدد من أعداد فيبوناتشي زوجي.

٥ - ٤ المعادلات التفاضلية والدالة الأسية e^{At}

أينما نجد نظام معادلات، سوى حالة المعادلة المنفردة، تؤدي نظرية المصفوفات دورها في الحل. لقد كان ذلك صحيحاً لمعادلات الفروق حيث كان الحل $u_k = A^k u_0$ متعلقاً بقوة، بالمصفوفة A. وهو، أيضاً صحيح من أجل المعادلات التفاضلية حيث

كان الحل $u\ (t) = e^{At}u_o$ متعلقاً ***بدالة أسية*** في A. لتعريف هذه الدالة الأسية وفهمها، نبدأ، مباشرة، بمثال:

$$\frac{du}{dt} = Au = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} u. \qquad (١)$$

الخطوة الأولى هي، دوماً، إيجاد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية:

$$A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = (-1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = (-3\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

توجد عدة إمكانات تؤدي كلها إلى الجواب ذاته. من المحتمل أن يكون أفضل طريق هو إظهار الحل العام وجعله يتلائم مع المتجه الابتدائي u_o عند $t = 0$. الحل العام هو تركيب خطي للحلول الأسية الخالصة. إنها حلول من الشكل الخاص $c\ e^{\lambda t}x$ حيث λ قيمة ذاتية للمصفوفة A و x متجهها الذاتي؛ تُحقق هذه الحلول المعادلة التفاضلية لأن $d\ /\ dt\ (c\ e^{\lambda t}\ x) = A\ (c\ e^{\lambda t} x)$. (لقد كان هذا مقدمتنا للقيم الذاتية في منطلق هذا الباب). في هذا المثال الذي هو من النوع 2×2، توجد دالتان أسيتان خالصتان تركبان كما يلي:

$$u = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-t} & \\ & e^{-3t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad \text{أو} \quad u\ (t) = c_1e^{\lambda_1 t}x_1 + c_2e^{\lambda_2 t}x_2 \qquad (٢)$$

في لحظة الصفر، عندما تكون الدالة الأسية $1 = e^o$ ، u_o تعين c_1 و c_2:

$$u_o = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = Sc \quad \text{أو} \quad u_o = c_1x_1 + c_2x_2$$

نتعرف هنا على المصفوفة S، مصفوفة المتجهات الذاتية. والثابت $c = S^{-1}u_o$ هو نفسه الذي كان لمعادلات الفروق. بالتعويض بهذه القيم في (2)، تكون المسألة قد حُلت. والحل بالصورة المصفوفية هو:

$$u\ (t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-t} & \\ & e^{-3t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = S\begin{bmatrix} e^{-t} & \\ & e^{-3t} \end{bmatrix}S^{-1}u_o$$

يوجد قانون أساسي لهذا البند : $u = S\, e^{\Lambda t} S^{-1} u_0$ يحل المعادلة التفاضلية، تماماً كما كان يحل القانون $S\, \Lambda^k S^{-1} u_0$ معادلة الفروق . المصفوفتان الأساسيتان هما :

$$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{-t} & \\ & e^{-3t} \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \Lambda = \begin{bmatrix} -1 & \\ & -3 \end{bmatrix}.$$

هناك أمران علينا إنجازهما بالإضافة إلى هذا المثال . الأول هو إتمام الجزء الرياضي وذلك بإعطاء تعريف مباشر ***للشكل الأسي المصفوفي.*** الأمر الثاني هو إعطاء تفسير فيزيائي للمعادلة وحلها . إنها تمثل صنفاً من المعادلات التفاضلية التي لها تطبيقات مفيدة .

لنهتم أولاً بالدالة الأسية . بالنسبة لمصفوفة قطرية Λ ، الأمر سهل ؛ $e^{\Lambda t}$ تحوي ، فقط ، الأعداد $e^{\lambda t}$ في قطرها (كما قُدم سابقاً) . لمصفوفة عامة A، الفكرة الطبيعية هي محاكاة تعريف متسلسلة القوى :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots .$$

إذا عوضنا x بـ At و 1 بـ I يصبح المجموع مصفوفة من النوع n x n :

$$e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \dots . \qquad (٣)$$

إن ذلك دالة أسية في $A\,t$. هذه المتسلسلة متقاربة دائماً وإن لمجموعها الخواص الصحيحة :

$$(e^{As})(e^{At}) = e^{A(s+t)} \qquad (٤)$$

$$(e^{At})(e^{-At}) = I \qquad (٥)$$

$$\frac{d}{dt}(e^{At}) = A e^{At} \qquad (٦)$$

من المعادلة الأخيرة، نجد أن $u = e^{At} u_0$ تحل المعادلة التفاضلية . يجب أن يكون هذا الحل من شكل تلك الحلول التي استخدمناها للحساب، حيث كانت

$u = S\,e^{\Lambda t}\,S^{-1}u_o$. لكي نبرهن مباشرة أن هذين الحلين متوافقان، نذكر أن كل قوة $(S/\Lambda S^{-1})^k$ تظهر بالصورة $A^k = S\Lambda^k S^{-1}$ (لأن S^{-1} تختصر مع S). لذا، فإن الدالة الأسية كاملة قد قطرِّت بالوقت ذاته :

$$e^{At} = I + S\Lambda S^{-1}t + \frac{S\Lambda^2 S^{-1}t^2}{2!} + \frac{S\Lambda^3 S^{-1}t^3}{3!} + \dots$$

$$= S\left(I + \Lambda t + \frac{(\Lambda t)^2}{2!} + \frac{(\Lambda t)^3}{3!} + \dots\right)S^{-1} = Se^{\Lambda t}S^{-1}.$$

مثال : الدالة الأسية لـ $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ هي :

$$e^{At} = Se^{\Lambda t}S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-t} & \\ & e^{-3t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{-t} + e^{-3t} & e^{-t} - e^{-3t} \\ e^{-t} - e^{-3t} & e^{-t} + e^{-3t} \end{bmatrix}.$$

عند $t = 0$ نحصل على مصفوفة الوحدة $e^0 = I$. المتسلسلة e^{At} تعطي الجواب من اجل كل قيمة لـ t، لكن، من الصعب حساب ذلك. يعطي الشكل $S\,e^{\Lambda t}S^{-1}$ الجواب ذاته عندما تكون A قابلة للتقطير. يجب أن يقع n من المتجهات الذاتية المستقلة في S. لكن هذا الشكل أكثر بساطة ويؤدي إلى n من الدوال الأسية الخالصة $e^{\lambda t}x$ التي هي أفضل حل على الإطلاق :

٥ ل إذا كانت A ممكنة التقطير $A = S\,\Lambda S^{-1}$ فإن للمعادلة التفاضلية $du/dt = Au$ الحل :

$$u(t) = e^{At}u_o = Se^{\Lambda t}S^{-1}u_o. \qquad (٧)$$

أعمدة S هي المتجهات الذاتية للمصفوفة A، بحيث يكون :

$$u(t) = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \cdot & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} S^{-1} u_o$$

$$= c_1 e^{\lambda_1 t} x_1 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} x_n. \quad (٨)$$

الحل العام تركيب خطي لدوال أسية خالصة، وتتلائم المعاملات c_i مع الشرط الابتدائي u_o، حيث $c = S^{-1}u_o$.

يعطي ذلك توافقاً تاماً مع معادلات الفروق - بإمكانك مقارنة ذلك مع **(٥ ز)**.

في كل من الحالين، نفرض أن A قابلة للتقطير، لأنه إذا كانت خلاف ذلك فسيكون لها متجهات ذاتية يقل عددها عن n ولا يمكننا، عندئذ، إيجاد عدد كاف من الحلول الخاصة. يمكن إيجاد الحلول الضائعة، لكنها ستكون أكثر تعقيداً من الحلول الأسية الخلص؛ ستحوي «متجهات ذاتية معممة» وعوامل من الشكل $te^{\lambda t}$. مع ذلك، يبقى القانون $u(t) = e^{At}u_o$ صحيحاً بصورة تامة(١).

لاتكون المصفوفة e^{At} ***شاذة*** أبداً. وأحد براهين ذلك هو أن ننظر في قيمها الذاتية؛ إذا كانت λ قيمة ذاتية للمصفوفة A، فإن $e^{\lambda t}$ هي القيمة الذاتية المقابلة للمصفوفة e^{At} - وإن عدداً مثل $e^{\lambda t}$ لايمكن أن يكون، أبداً، صفراً. طريقة أخرى هي حساب قيمة المحددة التي تساوي جداء القيم الذاتية:

$$\det e^{\lambda t} = e^{\lambda_1 t} \, e^{\lambda_2 t} \dots e^{\lambda_n t} = e^{\text{trace}(At)}.$$

وهذا، أيضاً، لايمكن أن يكون مساوياً للصفر. وأفضل طريقة هي التأكد من أن e^{-At} هي المعكوس وفق (٥).

إنّ قابلية العكس هذه أساسية من أجل المعادلات التفاضلية العادية، لأن ذلك يؤدي إلى النتيجة التالية: إذا كان لدينا n حلاً مستقلة خطياً عند $t = 0$ ***فإنها تبقى دوماً مستقلة خطياً***. إذا كانت المتجهات الابتدائية $v_1, \dots, v_n$ فانه يمكننا وضع الحل $e^{\lambda t}v$ في

---

(١) لحساب هذه الحالة المعيبة، يمكننا استخدام شكل جوردان في الملحق (ب) وإيجاد e^{Jt}.

مصفوفة :

$$\left[e^{At}v_1 \ \dots \ e^{At}v_n\right] = e^{At}\left[v_1 \ \dots \ v_n\right].$$

محددة هذه المصفوفة تدعى "رونسكيان" وهي لاتساوي الصفر أبداً، لأنها تساوي جداء محددتين غير صفريتين. وكل من مصفوفتي الطرف الأيمن قابلة للعكس.

ملاحظة :

لاتظهر كل معادلة تفاضلية على صورة نظام من المرتبة الأولى $du/dt = Au$ إذ إنه يمكننا الانطلاق من معادلة مفردة من مرتبة عليا مثل :

$$y''' - 3y'' + 2y' = 0.$$

لتحويل هذه المعادلة إلى نظام من النوع 3×3 ، نفرض أن $v = y' \ , w = v'$ كمجهولين إضافيين بالإضافة إلى y نفسه . لذا، فإن هاتين المعادلتين بالإضافة إلى المعادلة الأصلية، تكوّنان :

$$u' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ v \\ w \end{bmatrix} = Au \quad \text{أو} \quad \begin{matrix} y' = v \\ v' = w \\ w' = 3w - 2v \end{matrix}$$

وبذلك نعود إلى نظام من المرتبة الأولى. يمكن حل المسألة بطريقتين. في مقرر المعادلات التفاضلية، يمكنك أن تعوض $y = e^{\lambda t}$ في معادلة المرتبة الثالثة فتجد :

$$\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)e^{\lambda t} = 0 \quad \text{أو} \quad (\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda)e^{\lambda t} = 0$$

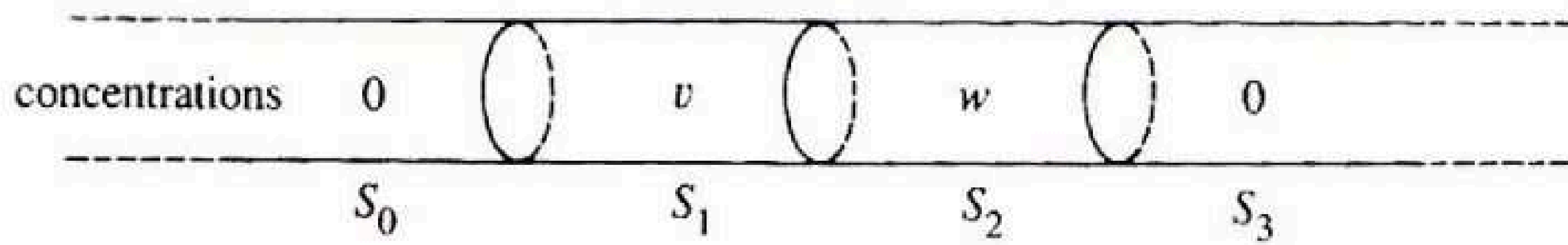
الحلول الأسية الخلص الثلاثة هي $y = e^{0t}, y = e^{t}, y = e^{2t}$. إنها لاتحوي متجهات ذاتية.

في مقرر الجبر الخطي، نعالج ذلك كالمعتاد، كما في حالة نظام من المرتبة الأولى ونجد القيم الذاتية للمصفوفة A :

$$\det(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -2 & 3 - \lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda = 0. \qquad (٩)$$

تظهر من جديد معاملات الإساس $\lambda = 2$, $\lambda = 1$, $\lambda = 0$. إن ذلك قاعدة عامة تجعل الطريقتين منسجمتين . فمعدل نمو الحلول ، خاصة ذاتية للمسألة وستبقى متوفرة ولو تغير شكل المعادلة . يظهر لنا أنّ حل معادلة من المرتبة الثالثة أسرع .

لننتقل الآن إلى التفسير الفيزيائي لمثالنا ، وهو المعادلة $du/dt = Au$ حيث : $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$. من السهل تفسير هذه المعادلة وهي بالوقت ذاته معادلة مهمة حقاً . تصف هذه المعادلة التفاضلية عملية انتشار يمكن تخيلها بتجزئة أنبوب لانهائي إلى قطع أربع ، قطعتان في الوسط محدودتان وأخريان في الطرفين وهما نصفا ـ لانهائيتين (شكل ٥-١) . في اللحظة $t = 0$ ، يكون تركيز المحلول الكيميائي الذي تحويه القطعتان المحدودتان مساوياً v_0 , w_0 . في هذه اللحظة وفيما بعدها ، يكون التركيز في القطعتين اللانهائيتين صفراً ؛ بسبب كون الحجم لانهائياً ، يمكن أن يكون ذلك هو الصورة الصحيحة لمتوسط التركيز في هذين الجزءين اللانهائيين ، حتى بعد أن يبدأ السائل الكيميائي بالانتشار . يبدأ الانتشار في اللحظة $t = 0$ ويتحكم به القانون



شكل (٥-١) . نموذج من الانتشار

التالي : ***في كل لحظة t، معدل الانتشار بين قطعتين متجاورتين يساوي الفرق بين التركيزين*** . يمكننا أن نتصور أن التركيز يبقى متجانساً في كل قطعة . العملية متصلة بالنسبة للزمن ولكنها منقطعة في الفضاء ؛ المجهولان الوحيدان هما $v(t)$, $w(t)$ ، في القطعتين الداخليتين S_1 , S_2 .

يتغير التركيز v باتجاهين ، بالانتشار في قطعة أقصى اليسار S_0 وبالانتشار في S_2 أو في خارجها . يكون المعدل النهائي لهذا التغيير هو :

$$\frac{dv}{dt} = (w - v) + (0 - v)$$

وذلك لكون التركيز في S_0 مطابقاً للصفر . بصورة مشابهة :

$$\frac{dw}{dt} = (0 - w) + (v - w)$$

نتيجة لذلك يكون النظام ملائماً تماماً لمثالنا $du / dt = Au$ في المعادلة (١) :

$$u = \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}, \quad \frac{du}{dt} = \begin{bmatrix} -2v + w \\ v - 2w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} u.$$

تتحكم القيمتان الذاتيتان (−١) و (−٣) بسلوك الحل . إنهما تعطيان معدل تناقص التركيز، وإن λ_1 هي الأكثر أهمية لأن شروط انطلاق استثنائية فقط قد تؤدي إلى تناقص سريع معدله e^{-3t}. بالفعل، هذه الشروط تأتي من المتجه الذاتي (1 , -1) . إذا كانت التجربة لاتقبل سوى تركيز غير سالب، فان التناقص السريع غير ممكن وإن المعدل النهائي هو e^{-t}. الحل الذي يكون فيه للتناقص هذا المعدل يقابل المتجه الذاتي (1 , 1)، لذا، على التركيزين أن يصبحا تقريباً متساويين عندما $t \longrightarrow \infty$.

تعليق إضافي على هذا المثال : إنه تقريب منقطع بمجهولين، فقط، لانتشار مستمر موصوف بالمعادلة التفاضلية الجزئية :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(0) = u(1) = 0$$

نقرّب هذه المعادلة بالمحافظة على التركيز الصفري في القطعتين اللانهائيتين، وتجزئة وسط الأنبوب إلى أجزاء متصاغرة طول كل منها $1/N$. تتحكم بالنظام المنقطع ذي الـ N مجهولاً، المعادلة :

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} u_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & & \\ 1 & -2 & \cdot & \\ & \cdot & \cdot & 1 \\ & & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{bmatrix} = Au. \qquad (١٠)$$

إنها مصفوفة فروق منتهية بالعناصر 1,−2,1 . الطرف الأيمن Au تقريب للمشتقة

الثانية d^2u/dx^2، بعد تغيير لسلم القياس الذي معامله N^2، يأتي من مسألة التدفق. في النهاية عندما $N \longrightarrow \infty$، نصل إلى ***معادلة الحرارة*** $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. إن حلولها أيضاً تركيب دوال أسية خالصة ولكن عددها الآن مالانهاية. عوضاً عن متجه ذاتي في الحالة $Ax = \lambda x$ ، لدينا دالة ذاتية في $d^2u/dx^2 = \lambda x$ ؛ إنها $u = \sin n\pi x$. لذا، يكون حل معادلة الحرارة:

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2\pi^2 t} \sin n\pi x.$$

يتعين الثابت c_n كالمعتاد، بشرط البدء. معدلات التناقص هي المتجهات الذاتية: $\lambda_n = -n^2\pi^2$. النماذج النظامية هي الدوال الذاتية. الشيء الجديد الوحيد هو وجود دوال وليس متجهات لأن المسألة متصلة وليست منقطعة.

استقرار المعادلات التفاضلية:

تماماً كما في معادلة الفروق، فإن القيم الذاتية هي التي تقرر كيف يتصرف الحل $u(t)$ للمعادلة التفاضلية عندما $t \longrightarrow \infty$. ما دامت A قابلة للتقطير فانه سيكون للمعادلة التفاضلية n من الحلول الأسية الخالصة، وسيكون أي حل محدد $u(t)$ $\lambda_1 t$ تركيباً لهذه الحلول من الشكل :

$$u(t) = Se^{\Lambda t}S^{-1}u_o = c_1e^{\lambda_1 t}x_1 + \dots + c_ne^{\lambda_n t}x_n.$$

تتحكم العوامل $e^{\lambda_1 t}$ باستقرار المعادلة. إذا كانت جميعها تتقرب من الصفر، فإن $u(t)$ تتقرب من الصفر، أيضاً؛ وإذا ازداد واحد منها دون توقف، فان الحل العام، باستثناء بعض شروط الانطلاق الخاصة جداً، يزداد بدون توقف. علاوة على ذلك، بما أن القيمة المطلقة للدالة $e^{\lambda t}$ تتعلق، فقط، بالجزء الحقيقي من λ ، ***فإن الأجزاء الحقيقية فقط هي التي تتحكم بالإستقرار*** : إذا كانت $\lambda = a + ib$ فإن:

$$e^{\lambda t} = e^{at}e^{ibt} = e^{at}(\cos bt + i \sin bt) \quad و \quad |e^{\lambda t}| = e^{at}.$$

تتخامد القيمة المطلقة ، إذا كـان $a < 0$ وهي ثابتة إذا كـان $a = 0$ وتنفجر (تزداد دون توقف) إذا كان $a > 0$. أما الجزء التخيلي b فإنه ينتج تذبذباً صرفا ، اما السعة فإنها تنتج عن الجزء الحقيقي .

٥ م تكون المعادلة التفاضلية $du / dt = Au$

مستقره و $a^{At} \longrightarrow 0$ عندما يكون $Re\,\lambda_i < 0$

مستقرة حيادياً إذا كان جميع $Re\,\lambda_i < 0$ وبعضها $Re\,\lambda_i = 0$

غير مستقرة و e^{At} غير محدودة عندما تحقق إحدى القيم الذاتية $Re\,\lambda_i > 0$.

يدعى في بعض النصوص ، الشرط $Re\,\lambda < 0$ استقراراً مقارباً ، لأنه يتكفل التخامد عند القيم الكبيرة لـ t. مناقشتنا تتعلق بوجود n من الحلول الأُسية الخلص ، ولكن ، حتى عندما تكون A غير قابلة للتقطير (هناك حدود من الصورة $t\,e^{\lambda t}$) فان النتيجة تبقى أيضاً ، صحيحة : ***تتقرب كل الحلول من الصفر ، إذا وإذا فقط ، كان لجميع القيم الذاتية أجزاء حقيقية سالبة .***

من السهل إثبات الاستقرار في نظام من النوع 2×2 (وهو شائع جداً في التطبيقات) . المعادلة هي :

$$\frac{du}{dt} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} u,$$

وإننا بحاجة لمعرفة متى يكون للقيمتين الذاتيتين لهذه المصفوفة جزءان حقيقيان سالبان . (لاحظ ، أيضاً ، أنه من الممكن أن تكون القيم الذاتية مركبة) . إختبار الاستقرار مباشر فعلاً :

يجب أن يكون الأثر $a + d$ سالباً .

يجب أن تكون المحددة $ad - bc$ موجبة .

عندما تكون القيم الذاتية حقيقية ، يضمن هذان الاختباران أن تكون القيم الذاتية سالبة . إن جداءها يساوي المحددة ؛ إذا كانت موجبة فإن القيمتين الذاتيتين إما موجبتان

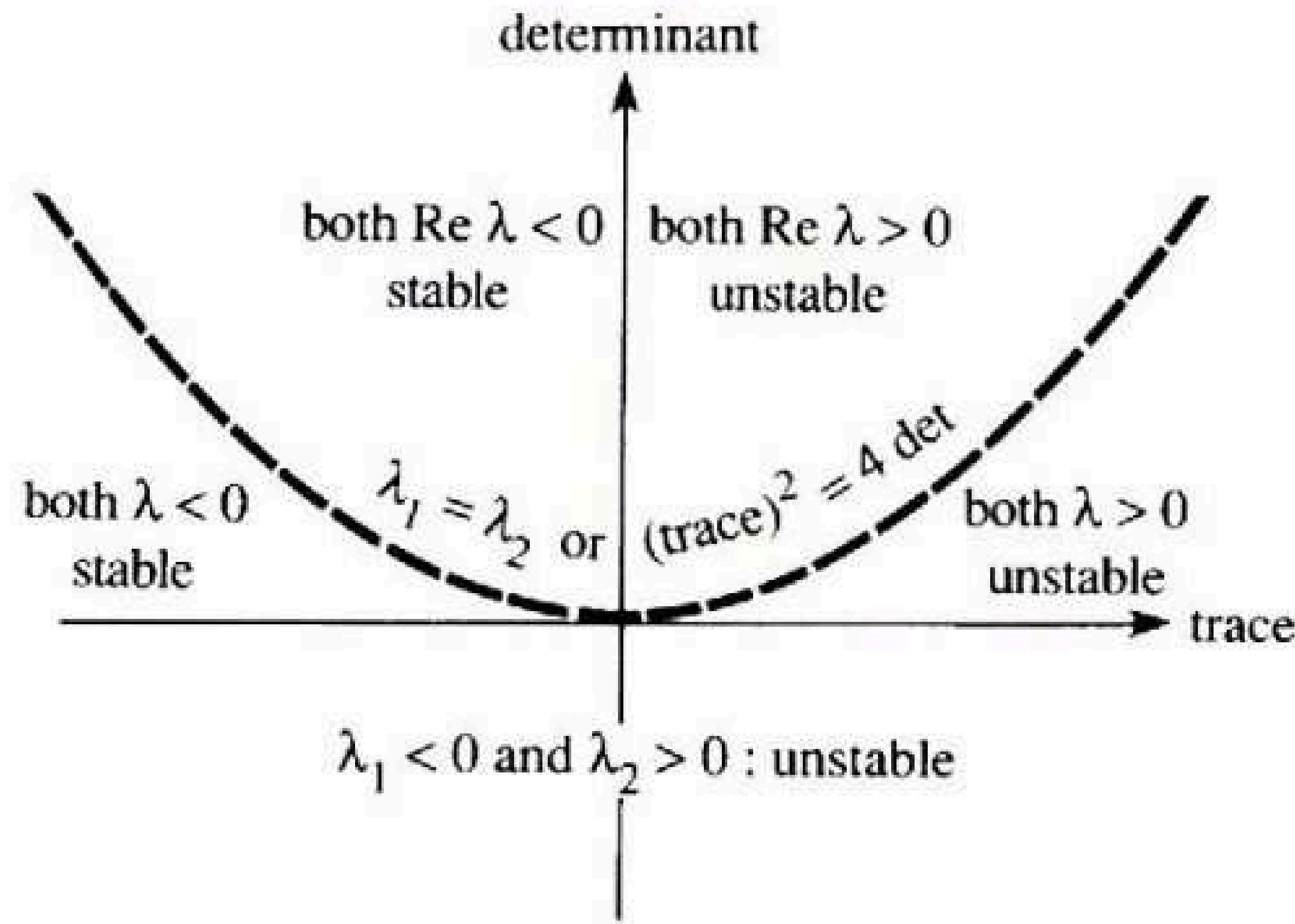
معاً أو سالبتان معاً . مجموعهما هو الأثر ؛ إذا كان سالباً فان القيمتين الذاتيتين سالبتان .

عندما تكون القيمتان الذاتيتان مركبتين $x \pm iy$ فان الاختبارين يبقيان ناجحين : مجموعهما هو الأثر $2x$ (الذي هو سالب) والمحددة هي $(x+iy)(x-iy) = x^2+y^2$ (و هي موجبة) . يبين الشكل ربع الاستقرار الوحيد، ويبين، أيضاً، القطع المكافىء الذي هو الحد بين القيم الذاتية الحقيقية والمركبة . يكمن تفسير هذا القطع المكافىء في معادلة القيم الذاتية :

$$\det\begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - (\text{trace})\lambda + (\det) = 0$$

إنها معادلة من الدرجة الثانية لذا فان القيم الذاتية هي :

$$\lambda = \frac{1}{2}\left[\text{trace} \pm \sqrt{(\text{trace})^2 - 4(\det)}\right]. \qquad (11)$$



شكل (٥-٢) . مناطق الاستقرار لمصفوفة من النوع ٢ × ٢ .

فوق القطع المكافىء، يكون العدد الذي تحت الجذر التربيعي سالباً ـ لذا، فإن λ ليست حقيقية . على القطع المكافىء، يكون الجذر التربيعي صفراً لذا فان λ مكررة .

إنها حقيقية تحت القطع المكافىء. إنها تقع على القطع المكافىء أو تحته من أجل كل مصفوفة متناظرة، لأنه إذا كان $b = c$ فإن:

$$(\text{trace})^2 - 4\,(\det) = (a + d)^2 - 4\,(ad - b^2) = (a - d)^2 + 4b^2 \geq 0.$$

القيم الذاتية المركبة ممكنة، فقط، عندما يكون العددان c,b من إشارتين متعاكستين وكبيرين بقدر كاف.

مثال من كل ربع:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

على حدود الربع الثاني تكون المعادلة مستقرة حيادياً. باجتياز هذه الحدود يحصل عدم استقرار. على المحور الأفقي، تكون إحدى القيمتين الذاتيتين صفراً (لأن المحددة $\lambda_1\lambda_2 = 0$). وتكون على المحور الرأسي فوق نقطة الأصل القيمتان الذاتيتان تخيليتان (لأن الأثر صفر). اجتياز هذين المحورين هما الطريقان الأساسيان لضياع الاستقرار.

تعدُّ الحالة $n \times n$ أكثر صعوبة. لإيجاد شرط لازم وكاف للاستقرار، أي اختبار كامل ليكون جميع $Re\,\lambda_i < 0$، هناك إمكانان. الأول هو العودة إلى طريقة *Roth and Hurwitz* اللذين أوجدا متسلسلة من المتراجحات في العناصر a_{ij}. إنني لاأجد هذه الطريقة جيدة لمصفوفة كبيرة؛ من المحتمل أنه يمكن للحاسوب إيجاد القيم الذاتية بثقة كبيرة بحيث يمكنه اختبار هذه المتراجحات. الإمكان الآخر اكتشفه ليابونوف *Lyapunov* ونُشر عام ١٨٩٧م. ***تقوم هذه الطريقة على إيجاد مصفوفة محملة W بحيث يبقى الطول المحمل $\|Wu(t)\|$ دوماً متناقصاً.*** إذا وُجدت مثل هذه المصفوفة فان $u' = Au$ تكون مستقرة؛ $\|Wu(t)\|$ سيتناقص نحو الصفر بثبات، وبعد قليل من التموج، يصل u إلى ذلك، أيضاً. تظهر القيمة الحقيقية لطريقة ليابونوف في الحالة غير الخطية،

حيث يمكنها أن تجعل المعادلة غير ممكنة الحل. ولكنها، مع ذلك، تترك $\|Wu(t)\|$ متناقصة بحيث يمكن برهان الاستقرار دون معرفة قانون $u(t)$.

مثال ١ نضع المعادلة $du/dt = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u$ حول دائرة.

لما كان الأثر صفراً والمحددة تساوي الواحد، فان القيمتين الذاتيتين تخيليتان:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0 \quad \text{لذا} \quad \lambda = i, -i$$

المتجهان الذاتيان هما $(1, -i)$ و $(1, i)$ والحل هو:

$$u(t) = c_1 e^{it} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} + c_2 e^{-it} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}.$$

إن ذلك صحيح ولكنه غير بديع. إذا عوضنا

e^{it} بـ $\cos t + i \sin t$ و (e^{-it} بـ $\cos t - i \sin t$) ***تعود الأعداد الحقيقية للظهور:***

$$u(t) = \begin{bmatrix} (c_1 + c_2) \cos t + i (c_1 - c_2) \sin t \\ -i (c_1 - c_2) \cos t + (c_1 + c_2) \sin t \end{bmatrix}. \qquad (١٢)$$

عند $t = 1$، حيث $\cos t = 1$، يجب أن يطابق ذلك القيمة $u_0 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$. لذا، فإنه يجب أن يضرب العددان a و b بـ $\cos t$ وينتهي $u(t)$ إلى الصورة:

$$u(t) = \begin{bmatrix} a \cos t - b \sin t \\ b \cos t + a \sin t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}. \qquad (١٣)$$

لدينا أمر مهم! المصفوفة الأخيرة تضرب u_0، لذا، يجب أن تكون الدالة الأسية e^{At}. (تذكر أن الحل هو $u = e^{At} u$). هذه المصفوفة في الجيب وجيب التمام هي مثالنا الذي نفتتح به موضوع *المصفوفات القائمة*. للأعمدة طول يساوي الواحد، جداؤهما الداخلي صفر، وهذا مايؤكد الحقيقة البديعة التالية:

إذا كانت A متناظرة ـ تخالفية فان e^{At} مصفوفة قائمة.

هذه هي، تماماً، مصفوفة النظام المحافظ حيث لايوجد ضياع في القدرة بسبب التخامد

أو الانتشار :

$$A^T = -A \quad , \quad (e^{At})^T = e^{-At} \quad , \quad \|e^{At}u_o\| = \|u_o\|.$$

تمثل المعادلة الأخيرة خاصة أساسية للمصفوفات القائمة . عندما تضرب متجهاً، فإن طوله لايتغير . لقد دار المتجه u_0 ، فقط، ليمثل حل المعادلة $du/dt = Au$: إنه يتحرك على دائرة .

في هذه الحالة غير المستخدمة فعلاً، يمكن التعرف على e^{At} مباشرة من المتسلسلات اللانهائية . لاحظ أن $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ تحقق $A^2 = -I$ واستخدام ذلك بازدياد مستمر .

$$e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2} + \frac{(At)^3}{6} + \dots$$

$$= \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{t^2}{2} + \dots\right) & \left(-t + \frac{t^3}{6} - \dots\right) \\ \left(t - \frac{t^3}{6} + \dots\right) & \left(1 - \frac{t^2}{2} + \dots\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

مثال ٢ معادلة الانتشار $du/dt = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} u$ كانت مستقرة وكان $\lambda = -1$ و $\lambda = -3$.

مثال ٣ إذا سددنا نهايتي القطعتين اللانهائيتين، فلا يوجد شيء يترك النظام :

$$\begin{matrix} du/dt = w - v \\ dw/dt = v - w \end{matrix} \quad \text{أو} \quad \frac{du}{dt} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} u$$

إن ذلك طريقة ***ماركوف المتصلة*** . عوضاً عن الانتقال في كل عام، يتحرك الأفراد في كل لحظة . المجموع العام $v + w$ ثابت . ينتج ذلك عن جمع المعادلتين الواقعتين في اليمين : $d/dt\,(v + w) = 0$.

يساوي مجموع عناصر أي عمود من مصفوفة ماركوف $\lambda_{max} = 1$. ويساوي مجموع عناصر أي عمود من مصفوفة ماركوف المتصلة $\lambda_{max} = 0$. تكون A مصفوفة

ماركوف إذا وإذا فقط كانت $B = A - I$ مصفوفة ماركوف المتصلة . الحالة الثابتة في الحالتين هي المتجه الذاتي المقابل لـ λ_{max} . إنه مضروب بالعدد $1^k = 1$ في معادلة فرق وبالعدد $e^{0t} = 1$ في معادلة تفاضلية . وهو غير متحرك .

في هذا المثال ، الحالة الثابتة هي $v = w$.

مثال ٤ في مفاعل ذري ، يُقال عن حالة إنها حرجة إذا كانت مستقرة حيادياً ؛ الانشطار يوازن الضياع . وبطء الانشطار يجعلها مستقرة أو *دون الحرج*، وأخيراً ، يتوقف . وانشطار غير مستقر يمثل قنبلة .

معادلات المرتبة الثانية :

يؤدي قانون الانتشار إلى نظام من المرتبة الأولى وكذلك كثير من التطبيقات الأخرى في الكيمياء وعلم الحياة وفي مجالات أخرى . لكن قوانين الفيزياء الأكثر أهمية لاتؤدي إلى مثل ذلك . من ذلك ، قانون نيوتن $F = m a$، حيث التسارع a مشتقة من المرتبة الثانية . يؤدي مبدأ العطالة إلى معادلات من المرتبة الثانية (علينا أن نحل معادلة من الشكل $d^2u/dt^2 = Au$. بدلاً من المعادلة $du/dt = Au$) . هدفنا الأساسي هنا هو معرفة تأثير هذا التحول إلى المشتقة الثانية ، على سلوك الحل . (١) إن ذلك اختياري في الجبر الخطي ولكنه ليس كذلك في الفيزياء .

ستكون المقارنة مثالية إذا احتفظنا بالمصفوفة A ذاتها :

$$\frac{d^2u}{dt^2} = Au = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} u. \tag{١٤}$$

يجب تعيين شرطين ابتدائيين في اللحظة $t = 0$ وذلك لتحديد انطلاق النظام - «الانتقال» $u = u_0$ والسرعة $du/dt = u'_0$. لملاءمة هذه الشروط ، نحتاج إلى $2n$ دالة

---

(١) المشتقة الرابعة ممكنة أيضا ، في التواء العوارض ، لكن يظهر أن الطبيعة تقاوم وجود أعلى من المرتبة الرابعة .

أسية عوضاً عن n.

لنستخدم ω مفضلين ذلك على λ ولنكتب الحلول الخاصة على الصورة $u = e^{i\omega t}x$. لنعوض هذه الدالة الأسية في المعادلة التفاضلية التي عليها أن تحقق:

$$\frac{d^2}{dt^2}(e^{i\omega t}x) = Ae^{i\omega t}x) \quad \text{أو} \quad -\omega^2 x = Ax \qquad (١٥)$$

على المتجه x أن يكون أحد متجهات A الذاتية، تماماً، كما سبق. القيمة الذاتية المقابلة هنا هي $-\omega^2$، أي أن التواتر ω مرتبط مع معدل التخامد λ بالعلاقة $\lambda = -\omega^2$. كل حل خاص $e^{\lambda t}x$ لمعادلة المرتبة الأولى يؤدي إلى حلين خاصين $e^{i\omega t}x$ لمعادلة المرتبة الثانية، الأسان هما $\omega = \pm\sqrt{-\lambda}$. يتعطل ذلك، فقط، عندما تكون $\lambda = 0$، الصفر هو العدد الوحيد الذي له جذر تربيعي واحد، فقط؛ إذا كان المتجه الذاتي x فإن الحلين الخاصين هما x, tx .

لمصفوفة انتشار حقيقية، تكون جميع القيم الذاتية λ سالبة ولذلك تكون كل التواترات ω حقيقية: *يتحول الانتشار الخالص إلى تذبذب خالص* . يؤدي العامل $e^{i\omega t}$ إلى استقرار حيادي، الحل لايتعاظم ولايتخامد وتبقى، فعلاً، الطاقة ثابتة.

الحل العام للمعادلة $d^2u/dt^2 = Au$، إذا كانت A ذات قيم ذاتية سالبة $\lambda_1,...,\lambda_n$، وإذا كان $\omega_j = \sqrt{-\lambda_j}$ هو:

$$u(t) = (c_1e^{i\omega_1 t} + d_1e^{-i\omega_1 t})x_1 + \ldots + (c_ne^{i\omega_n t} + d_ne^{-i\omega_n t})x_n. \qquad (١٦)$$

كما يجري، دائماً، نستنتج قيم الثوابت من الشروط الابتدائية. إن ذلك سهل إجراؤه (على حساب قانون إضافي) بالانتقال من التذبذب الأسّي إلى الجيب وجيب التمام الأكثر إلفة:

$$\boxed{u(t) = a_1 \cos\omega_1 t + b_1 \sin\omega_1 t)x_1 + \ldots + (a_n \cos\omega_n t + b_n \sin\omega_n t)x_n.} \qquad (١٧)$$

يمكن للانتقال الابتدائي أن يعمل بصورة منفصلة: $t = 0$، يعني أن $\sin\omega t = 0$ و $\cos\omega t = 1$، يبقى، عندئذ:

$$a = S^{-1}u_o \quad \text{أو} \quad u_o = Sa, \quad \text{أو} \quad u_o = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n,$$

يتلاءم الانتقال مع الأعداد a، إنّه يؤدّي الى $S^{-1}u_o$ كما سبق. ثمّ إذا اشتققنا $u(t)$ (وجعلنا $t = o$ فإن الأعداد b تتعيّن بالسرعة الابتدائية :

$$u'_o = b_1\omega_1x_1 + \ldots + b_n\omega_nx_n.$$

بتعويض المعاملات a ، b في قانون $u(t)$ تعتبر المعادلة قد حُلّت .

نريد أن نطبّق هذه القوانين على المثال الوارد أعلاه، حيث القيمتان الذاتيتان هما $\lambda_1 = -1$ ، $\lambda_2 = -3$، لذا، فإن التواترين هما $\omega_1 = 1$ و $\omega_2 = \sqrt{3}$. إذا انطلق النظام من السكون (السرعة الابتدائية u_o تساوي الصفر)، فان الحدود التي من الشكل $b \sin \omega t$ تختفي. وإذا فرضنا أن الذبذبة الأولى أعطت انتقالاً قدره واحد، فإن $u_o = a_1x_1 + a_2x_2$ يصبح :

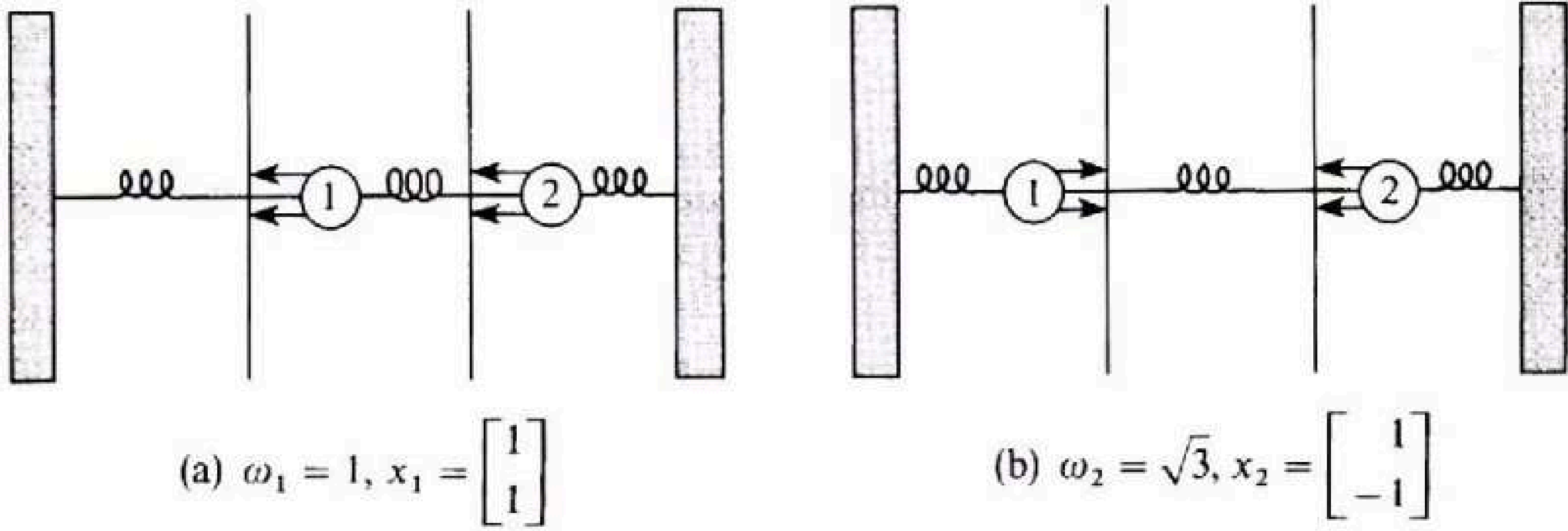
$$a_1 = a_2 = \tfrac{1}{2} \quad \text{أو} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

لذا فإن الحل هو :

$$u(t) = \tfrac{1}{2} \cos t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \tfrac{1}{2} \cos \sqrt{3}\, t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

يمكننا تفسير هذا الحل فيزيائياً . توجد كتلتان ترتبطان فيما بينهما وبحائطين ثابتين بوساطة ثلاثة نوابض متماثلة (الشكل ٥-٣). دفعت الكتلة الأولى بسرعة إبتدائية $u_o = 1$، بقيت الكتلة الثانية في مكانها وجرى الانطلاق من اللحظة $t = o$. تُأخذ حركة الكتلتين $u(t)$، متوسّط حركتين اهتزازيتين خالصتين تقابلان المتّجهين الذاتيين . في النموذج الأوّل، تتحرّك الكتلتان بانسجام دون أي تمدّد في النابض الأوسط (شكل ٥ - ٣ a) . التواتر $\omega_1 = 1$ مطابق للحالة التي يكون فيها نابض واحد وكتلة واحدة . في الحالة الأسرع حيث $x_2 = (1,-1)$ بمركبتين من إشارتين مختلفتين وتواتر يساوي $\sqrt{3}$، تتحرّك الكتلتان باتّجاهين مختلفين ولكن بسرعتين من طولين

متساويين. (شكل ٥ - ٣ b). الحل العام هو تركيب لهذين النموذجين النظاميين والحل الخاص الذي اخترناه مكوّن من نصف كل منهما.



(a) $\omega_1 = 1,\ x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (b) $\omega_2 = \sqrt{3},\ x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

شكل (٥-٣). النموذجان البطيء والسريع للذبذبة.

عندما يواصل الزمن تقدّمه، تظهر الحركة التي نسمّيها «دورية تقريباً»، إذا كانت النسبة ω_1/ω_2 كسراً فان الكتلتين ستعودان الى $w = o$ و $v = 1$ ثمّ، يبدأ النمط من جديد. لأي تركيب للدالّتين $sin\ 2t$ و $sin\ 3t$ دور يساوي 2π. ولكن، بما أن العدد $\sqrt{3}$ عدد أصم، فمن المفضّل أن نقول، يمكن للكتلتين ***أن تقتربا بصورة اعتباطية*** من الوضع البدائي: إنهما سيقتربان أيضاً، إذا انتظرنا طويلاً، وبقدر كاف، من الوضع المقابل لـ $v = o$, $w = 1$. مثل كرة البليارد والتي ترتد باستمرار على طاولة ملساء تماماً، إن الطاقة الكلية ثابتة عاجلاً أو آجلاً، ستقترب الكتلتان، من أي حالة لها هذه الطاقة.

هنا أيضاً، لا يمكننا أن نترك المسألة دون أن نستنتج توازياً مع الحالة المتّصلة. عوضاً عن كتلتين أو N من الكتل، يوجد مستمر. مثل الحالة المنفصلة، تندمج الكتل والنوابض في قضيب صلب، تتحول «الفروق الثانية» التي تعطى بمعاملات المصفوفة 1,-2,1، الى مشتقّات من المرتبة الثانية. توصف هذه النهاية ***بمعادلة الموجات الشهيرة.***

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

تمـــاريـــن

٥-٤-١ تبعاً لأوّل مثال في هذا البند، أوجد القيمة الذاتية والمتّجهات الذاتية والدالّة الأسّية e^{At} لـ :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

٥-٤-٢ من أجل مصفوفة التمرين السابق، أوجد الحل العام للمعادلة $du/dt = Au$ والحل الخاص الذي يتلاءم مع $u_0=(3,1)$. ***ما هي الحالة الثابتة*** عندما $t \longrightarrow \infty$ (إن ذلك قضية ماركوف متّصلة؛ في معادلة تفاضلية $\lambda = 0$ تقابل $\lambda = 1$ في معادلة فرق، لأن $e^{0t}=1$).

٥-٤-٣ نفرض أن اتّجاه الزمن قد عكس ليعطي المصفوفة A - :

$$\frac{du}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} u \quad \text{بـ} \quad u_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

أوجد $u(t)$ وبرهن أنّه يتعاظم بدلاً من أن يتخامد عندما $t \longrightarrow \infty$.
(الانتشار غير عكوس ولا يمكن لمعادلة الحرارة أن تتحوّل الى الخلف).

٥-٤-٤ إذا كانت p مصفوفة إسقاط، برهن بالاستعانة بمتسلسلة لا نهائية أن :

$$e^P \approx I + 1.718P$$

٥-٤-٥ تحقّق مصفوفة قطرية مثل $\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ المعادلة المعروفة $e^{\Lambda(t+T)} = e^{\Lambda t}e^{\Lambda T}$، لأن هذه القاعدة صحيحة لكل عنصر قطري.

(أ) فسّر لماذا $e^{A(t+T)} = e^{At}.e^{AT}$، باستخدام القانون $e^{At} = S e^{\Lambda t} S^{-1}$.

(ب) برهن أن القانون $e^{A+B} = e^A.e^B$ غير صحيح من أجل المصفوفات، وذلك انطلاقاً من المثال التالي (استخدم متسلسلتي e^A, e^B):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

٥-٤-٦ يمكن كتابة معادلة المرتبة الثانية $y''+y=0$ على صورة نظام من المرتبة الأولى بادخال السرعة y' كمجهول آخر:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y' \\ -y \end{bmatrix}.$$

إذا كان ذلك هو $du/dt = Au$ فما هي المصفوفة A ذات النوع $2x2$ ؟ أوجد قيمها الذاتية ومتّجهاتها الذاتية واحسب الحل الذي ينطلق من $y_0 = 2, y'_0 = 0$.

٥-٤-٧ حوّل $y'' = 0$ الى نظام من المرتبة الأولى $du/dt = Au$:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y' \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix}.$$

هذه المصفوفة ذات النوع 2×2 معيبة (لها قيمة ذاتية واحدة، فقط، ولا يمكن تقطيرها). احسب e^{At} من المتسلسلة $I + At + ...$ واكتب الحل $e^{At}u_0$، منطلقاً من $y_0 = 3, y'_0 = 4$ تحقّق من أن $u = \begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix}$ يحقّق $y'' = 0$

٥-٤-٨ نفرض أن عدد الأرانب r وعدد الذئاب w وأنّه تتحكّم بها المعادلتان التفاضليتان:

$$\frac{dr}{dt} = 4r - 2w,$$
$$\frac{dw}{dt} = r + w.$$

(أ) هل هذا النظام مستقر أم مستقر حيادياً أم غير مستقر؟

(ب) إذا كان في البدء $r = 300$, $w = 200$ ، فما هو عدد كل منها في اللحظة t ؟

(جـ) بعد زمن طويل، ما هي نسبة عدد الأرانب الى عدد الذئاب؟

٥-٤-٩ أوجد القيم الذاتية لكل من المصفوفات :

(أ) $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ (ب) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

(جـ) $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ (د) $A=\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

٥-٤-١٠ قرّر فيما يتعلّق باستقرار أو عدم استقرار النظام $dv/dt = w$ و $dw/dt = v$ هل يوجد حل متخامد؟

٥-٤-١١ إنطلاقاً من الأثر والمحدّدة، عند أي قيمة للزمن t تتغيّر المصفوفات التالية من مستقرّة بقيم ذاتية حقيقية إلى مستقرّة بقيم ذاتية مركّبة الى غير مستقرّة؟

$$A_1=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ t & -1 \end{bmatrix},\quad A_2=\begin{bmatrix} 0 & 4-t \\ 1 & -2 \end{bmatrix},\quad A_3=\begin{bmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{bmatrix}.$$

٥-٤-١٢ أوجد القيم الذاتية والمتّجهات الذاتية لـ:

$$\frac{du}{dt}=Au=\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} u.$$

لماذا يمكنك أن تعرف، دون حساب، أن e^{At} مصفوفة قائمة وأن $\|u(t)\|^2 = u_1^2+u_2^2+u_3^2$ سيكون ثابتاً ؟

٥-٤-١٣ المعادلة التالية متناظرة – تخالفية

$$\frac{du}{dt}=Au=\begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

(أ) اكتب u'_1, u'_2, u'_3 وأكّد أن $u'_1u_1 + u'_2u_2 + u'_3u_3 = 0$.

(ب) استنتج أن الطول $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$ ثابت .

(جـ) أوجد القيم الذاتية للمصفوفة A .

سيدور الحل حول المحور $w=(a,b,c)$ لأن Au هو «الجداء المتصالب (الخارجي)» $u \times w$ – المتعامد مع كل من w و u .

٥-٤-١٤ ما هي القيمة الذاتية λ والتواتر ω المتعلّقين بالمعادلة :

$$\frac{d^2 u}{a t^2} = \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} u \text{ ؟}$$

اكتب الحل العام كما في المعادلة (١٧).

٥-٤-١٥ حل معادلة المرتبة الثانية :

$$\frac{d^2 u}{a t^2} = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} u \quad \text{بـ} \quad u_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad u'_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

٥-٤-١٦ في معظم التطبيقات، تظهر معادلة المرتبة الثانية مثل $Mu''+k\,u = 0$، حيث تضرب مصفوفة الكتل M بالمشتقّة الثانية. عوّض بالدالّة الأسّية الصرفة $u = e^{i\omega t}x$ وأوجد "مسألة القيمة الذاتية المعممة" التي يجب أن تحل بالنسبة التواتر ω والمتّجه x .

٥-٤-١٧ في المعادلة $u''+Fu'-Au = 0$ ، تمثل F مصفوفة احتكاك. عوّض بدالّة أسّية $u = e^{\lambda t}x$ وأوجد مسألة قيمة ذاتية تربيعية لـ λ .

٥-٤-١٨ أوجد للمعادلة (١٤) في النص، حركة الكتلة الثانية إذا كانت الأولى قد صدمت في اللحظة $t = 0$ ، حيث $u' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $u_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. التواتران هما 1 و $\sqrt{3}$

٥-٤-١٩ يمكن كتابة مصفوفة أثرها صفر بالصورة :

$$A = \begin{bmatrix} a & b+c \\ b-c & -a \end{bmatrix}.$$

برهن أن قيمها الذاتية حقيقية فعلاً عندما تكون $a^2+b^2 > c^2$

٥-٤-٢٠ بالتعويض - التراجعي أو بحساب القيم الذاتية، حل النظام :

$$\frac{du}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} u. \quad \text{بـ} \quad u_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

٥ - ٥ المصفوفات المركّبة : المتناظرة ، الهرميتية القائمة و الواحدية

لم يعد من الممكن العمل بالمتجهات والمصفوفات الحقيقية ، فقط . في النصف الأوّل من هذا الكتاب حيث كانت المسألة الأساسية هي $Ax = b$ ، كان من المؤكد أن x سيكون حقيقيّاً عندما يكون كل من b و A حقيقيّاً . لذلك ، مالم يكن هناك حاجة للأعداد المركّبة . لقد كان ذلك ممكناً ، ولكنّه لم يكن قادراً على المشاركة بأي شيء جديد . لا يمكننا الآن تجنّب ذلك . إنَّ معاملات كثيرة الحدود المميزة ، لمصفوفة حقيقية ، أعداد حقيقية ، لكن القيم الذاتية (مثل الدوران) يمكن أن تكون مركّبة .

لذلك ، سنقدم هنا C^n مع فضاء المتّجهات التي مركّباتها أعداد مركّبة . يتبع جمع المصفوفات وضربها القواعد السابقة ذاتها . ***لكن طول المتّجه يختلف*** عن صورته السابقة . لو كان $\| x \|^2 = x_1^2 + ... + x_n^2$ ، فإن طول المتّجه $(1, i)$ سيكون صفراً : $1^2 + i^2 = 0$. بينما يجب أن يكون طوله $\sqrt{2}$ ؛ مربّع الطول $1^2 + |i|^2$. يفرض علينا هذا التبديل في حساب الطول سلسلة كاملة من التغييرات الأخرى . الجداء الداخلي لمتجهين ومنقول مصفوفة وتعريف التناظر ، والتناظر - التخالفي والمصفوفات القائمة ، كل ذلك يحتاج الى تغيير بسبب وجود الأعداد المركّبة . في كل حالة ، يتطابق التعريف الجديد مع القديم عندما تصبح المتّجهات حقيقية .

لقد أحصينا كل هذه التغييرات في نهاية هذا البند وستكون هذه القائمة كافية بصورة عملية للانتقال بين الحالتين الحقيقية والمركّبة ونأمل أن تكون مفيدة للقارئ . تحوي هذه القائمة أيضاً ، من أجل كل صنف من المصفوفات أفضل المعلومات المعروفة عن مواقع قيمها الذاتية . بصورة خاصّة ، نريد أن نكتشف كل ما يتعلّق ***بالمصفوفات التناظرية :*** أين تقع قيمها الذاتية وماهي الأمور الخاصّة بالمتّجهات الذاتية ؟ إن ذلك ، من الناحية العملية ، أهم مسائل نظرية القيم الذاتية ، لذلك ندعو مقدّماً للانتباه الى النتيجتين الأساسيتين :

١ . للمصفوفة المتناظرة قيم ذاتية حقيقية .

٢ . يمكن إختيار متّجهاتها الذاتية متعامدة .

من الغريب، لبرهان كون القيم الذاتية حقيقية، تنطلق من الإمكان المعاكس- وهذا ينقلنا إلى الأعداد المركّبة والمتّجهات المركّبة والمصفوفات المركّبة. التغييرات سهلة وهناك فائدة إضافية: سنجد بعض المصفوفات المركّبة التي لها قيم ذاتية حقيقية ومتّجهات ذاتية متعامدة نظامية. إنّها المصفوفات الهرميتية، ولقد رأينا، وسنرى فيما بعد، أنّها تضم المصفوفات المتناظرة الحقيقية وتشترك معها في كثير من الخواص الأساسية.

الأعداد المركّبة ومرافقاتها

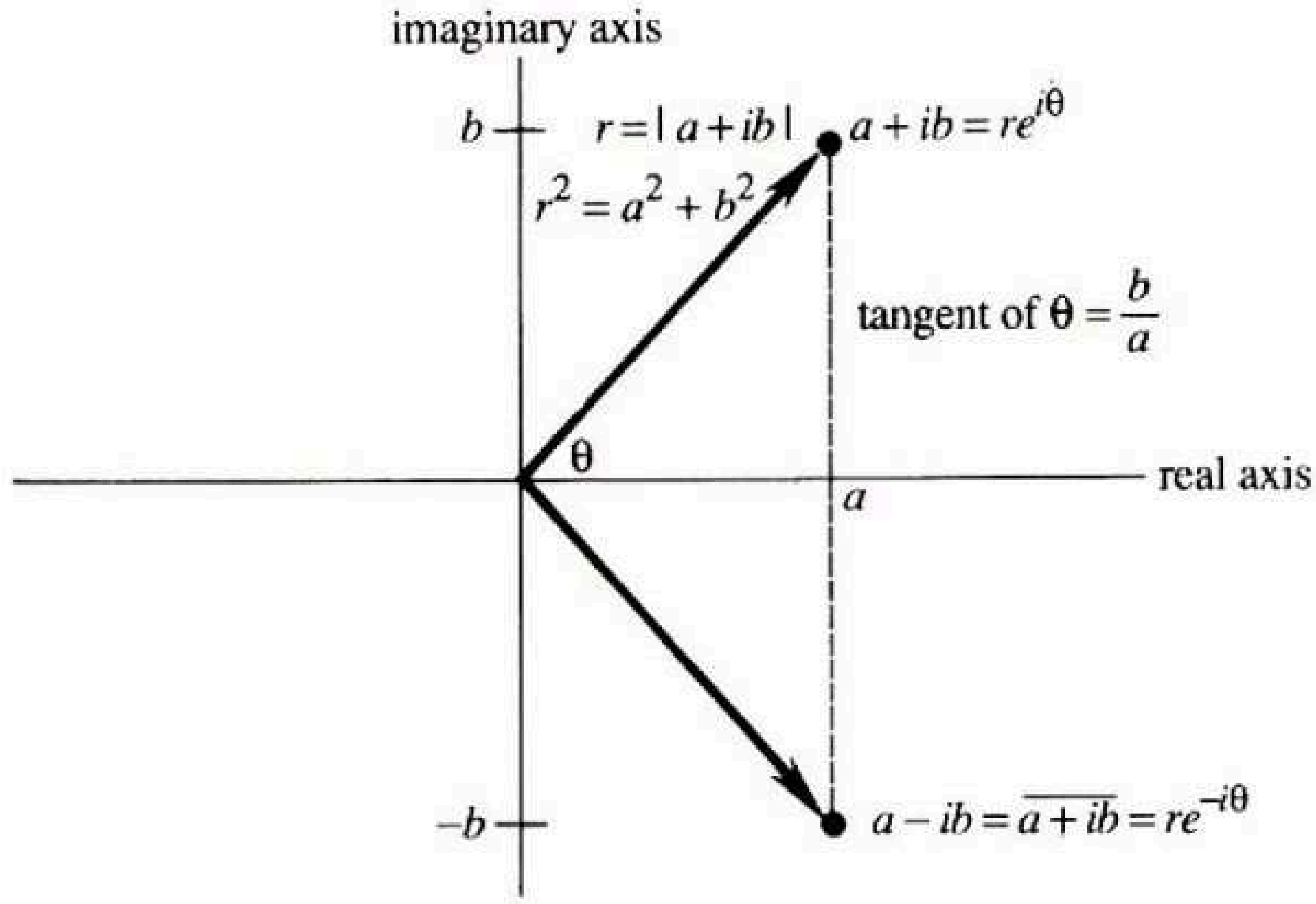
من المحتمل أن يكون القارئ على معرفة بالأعداد المركّبة. وبما أنّنا نحتاج، فقط، إلى الأمور الأساسية منها فسيكون من السهل تقديم مراجعة مختصرة (الفكرتان المهمّتان هما المرافق المركّب والقيمة المطلقة) ـ الكل يعرف أن العدد i يحقّق المعادلة $i^2=-1$، إنّه عدد تخيّلي بحت وكذلك مضاعفه ib ، حيث b عدد حقيقي. مجموع عدد حقيقي وآخر تخيلّي هو عدد مركّب $a+ib$ ؛ ولقد مثّل بصورة طبيعية في المستوي المركّب شكل (٥ – ٤).

الأعداد الحقيقية (حيث $b = 0$) والأعداد التخيّلية (حيث $a = 0$) محتواة، كحالات خاصّة في الأعداد المركّبة، إنّها تقع على واحد من المحورين، الإحداثيين. يجمع العددان المركّبان وفق القاعدة :

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i\,(b + d),$$

ويضربان باستخدام القاعدة $i^2=-1$:

$$(a + ib)(c + id) = ac + ibc + iad + i^2bd = (ac - bd) + i\,(bc + ad).$$



(شكل ٥-٤). المستوي المركّب مع عدد مركّب ومرافقه.

العدد المركّب المرافق للعدد $a + ib$ هو العدد $a - ib$ وذلك بعكس *إشارة الجزء التخيّلي* منه. هندسيّاً، إنّه نظير الأوّل بالنسبة للمحور الحقيقي؛ أي عدد حقيقي مرافق لنفسه. يمثّل المرافق بشرطة تعلوه $\overline{a + ib} = a - ib$. للعدد المرافق ثلاث خواص مهمّة:

(١) مرافق الجداء يساوي جداء المرافقين:

$$\overline{(a + ib)(c + ia)} = (ac - ba) - i\,(bc + ac) = \overline{(a + ib)\,(c + ia)}. \qquad (١)$$

(٢) مرافق المجموع يساوي مجموع المرافقين:

$$\overline{(a + c) + i\,(b + a)} = (a + c) - i\,(b + a) = \overline{(a + ib)} + \overline{(c + ia)}.$$

(٣) جداء أي عدد $a + ib$ بمرافقه $a - ib$ يساوي عدداً حقيقيّاً وهو مربّع طول الوتر في الشكل (٥-٤).

$$(a + ib)\,(a - ib) = a^2 + b^2 = r^2. \qquad (٢)$$

هذا البعد يسمّى ***القيمة المطلقة*** للعدد الأصلي $a + ib$ (أو قياس) ويرمز له بإضافة قطعتين رأسيتين $|a + ib| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

أخيراً، يربط علم المثلّثات الضلعين a, b في المثلّث القائم بالوتر r . بالعلاقتين :

$$a = r\cos\theta, \quad b = r\sin\theta$$

بتركيب هاتين العلاقتين ننتقل الى الاحداثيّات القطبية :

$$a + ib = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}. \qquad (٣)$$

هناك حالة خاصّة مهمّة، وذلك عندما يكون القياس r مساوياً الواحد . يكون، عندئذ، العدد المركّب هو $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ ، إنّه واقع على **_دائرة الوحدة_** في المستوي المركّب . عندما تتحوّل θ من الصفر إلى 2π ، يدور العدد المركّب $e^{i\theta}$ حول نقطة الأصل ببعد نصف قطري ثابت $|e^{i\theta}| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$.

مثال : جداء $x = 3+4i$ بمرافقة $\bar{x}$ يساوي مربّع قيمته المطلقة :

$$x\bar{x} = (3+4i)(3-4i) = 25 = |x|^2 \quad \text{so} \quad r = |x| = 5.$$

للتقسيم على العدد $3+4i$ ، اضرب البسط والمقام بمرافق هذا العدد :

$$\frac{2+i}{3+4i} = \frac{(2+i)\ (3-4i)}{(3+4i)\ (3-4i)} = \frac{10-5i}{25}.$$

بالإحداثيّات القطبية يكون الضرب والتقسيم أسهل من ذلك :

لجداء $r_1 e^{i\theta_1}$ في $r_2 e^{i\theta_2}$ ؛ القيمة المطلقة $r_1 r_2$ والزاوية $\theta_1+\theta_2$

لخارج قسمة $r_1 e^{i\theta_1}$ على $r_2 e^{i\theta_2}$ ؛ القيمة المطلقة r_1/r_2 والزاوية $\theta_1-\theta_2$

الأطوال والمنقولات في الحالة المركّبة

لنعد إلى الجبر الخطّي ولنقم بتحويل من الحقيقي الى المركّب . أوّل خطوة هي قبول المتّجه المركّب، الأمر الذي لا يمثّل مشكلة : بالتعريف، ***يتكوّن الفضاء C^n من جميع المتّجهات التي لها n مركّبة مركّبة :***

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad x_j = a_j + ib_j .$$

يجمع المتّجهان x , y هنا أيضاً، مركّبة إلى مركبة، لكن الضرب بعدد يجري بأعداد مركّبة. كما سبق، تكون المتّجهات $v_1,....,v_k$ مرتبطة خطّياً إذا وجد تركيب غير تافه $c_1v_1+...+c_kv_k$ مساوياً الصفر؛ يمكن للأعداد c_j أن تكون هنا مركّبة. متّجهات الوحدة الاحداثية موجودة في C^n وهي هنا مستقلّة خطّياً، أيضاً، وتكوّن أساساً. لذا، فإن C^n فضاء متّجهات عدد أبعاده n.

لقد أكّدنا سابقاً أنّه لا بدّ من أن يتغيّر تعريف الطول؛ مربّع عدد مركّب ليس بالضرورة عدداً موجباً وإن $\|x\|^2=x_1^2+....+x_n^2$ غير مستخدم هنا. التعريف الجديد طبيعي تماماً: لقد استعيض عن x_j^2 بقياسها $|x_j|^2$ ويحقّق عندها الطول:

$$\boxed{\|x\|^2 = |x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2.} \qquad (٤)$$

مثال : $x = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$ و $\|x\|^2 = 2$ و $y = \begin{bmatrix} 2+i \\ 2-4i \end{bmatrix}$ و $\|y\|^2 = 25$

في حالة المتّجهات الحقيقية، يوجد ترابط بين الطول والجداء الداخلي $\|x\|^2=x^Tx$. نريد أن نحافظ على هذه الرابطة. لذا، علينا أن نعدّل في تعريف الجداء الداخلي بحيث ينسجم مع التعريف الجديد للطول، والتعديل القياسي هو أن نغيّر المتّجه الأوّل x في الجداء الداخلي بمرافقة $\overline{x}$ وهذا يعني أن x أصبحت $\overline{x}$ ***ويصبح الجداء الداخلي للمتّجهين*** x,y ***بالتعريف :***

$$\overline{x}^T y = \overline{x}_1 y_1 + \ldots \overline{x}_n y_n. \qquad (٥)$$

مثال نموذجي من الفضاء C^2 هو $x = (1+i ,3i)$, $y = (4,2-i)$:

$$\overline{x}^T y = (1-i)4 + (-3i)(2-i) = 1 - 10i .$$

وإذا أخذنا الجداء الداخلي للمتّجه x بذاته فانّنا نحصل من جديد على مربّع الطول :

$$\overline{x}^{T}x = \overline{(1+i)}\,(1+i) + \overline{(3i)}(3i) = 2 + 9 = \|x\|^{2}.$$

لاحظ أن $\overline{y}^{T}x$ يختلف بصورة عامّة عن $\overline{x}^{T}y$ ، لذا، فإن علينا بعد الآن أن نعير انتباهنا الى ترتيب المتّجهين في الجداء الداخلي . هناك أشياء جديدة أخرى : إذا تغيّر x فأصبح cx فإن الجداء الداخلي للمتّجهين x, y لا يضرب بالعدد c بل بالعدد $\overline{c}$.

إن ما سبق يستدعي تغييراً آخر علينا فعله . إنّه تغيير بالرمز أكثر من كونه شيئاً آخر وإنّه يدمج رمزين في رمز واحد : عوضاً عن الشرطة المستخدمة في المرافق و T المستخدمة في النقل ، فان هاتين العمليتين تدمجان في ما يسمّى ***نقل المرافق*** ويرمز لها بالدليل الفوقي H . أي أن $\overline{x}^{T} = x^{H}$ ، ويستخدم الرمز نفسه من أجل المصفوفات : منقول مرافق المصفوفة A هو :

$$\overline{A}^{T} = A^{H} \quad \text{بالعناصر} \quad (A^{H})_{ij} = \overline{A}_{ji} \qquad (٦)$$

إذا كانت A مصفوفة من النوع $m \times n$ فإن A^{H} مصفوفة من النوع $n \times m$، مثال ذلك :

$$\begin{bmatrix} 2+i & 3i \\ 4-i & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^{H} = \begin{bmatrix} 2-i & 4+i & 0 \\ -3i & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

يؤدّي الرمز A^{H} تمييزاً رئيسيّاً للواقع وهو أنّه عندما تكون العناصر مركّبة ، فمن النادر جدّاً أن نسعى الى نقل A فقط ، بل نقل المرافق أو *النقل الهرميتي* وهو الملائم فعلاً لكل الحالات[1] . يمكن تلخيص التغييرات التي يتطلّبها استخدام الأعداد المركّبة بسهولة كما يلي :

---

(١) كثيراً ما يُشار إلى المصفوفة A^{H} بـ " A هرميتية " . علينا أن ننتبه بدقّة للتمييز بين هذا الاسم والجملة " A هرميتية " التي تعني أن A تساوي A^{H} .

٥ ت (١) الجداء الداخلي لـ x و y هو $x^H y$، ويكونان متعامدين إذا كان $x^H y = 0$.
(٢) طول المتّجه x هو $\|x\| = (x^H x)^{1/2}$.
(٣) $(A\ B)^T = B^T A^T$ يصبح بعد تغيير كل عنصر بمرافقه $(A\ B)^H = B^H A^H$.

المصفوفات الهرميتية

لقد تكلّمنا في أبواب سابقة عن المصفوفة المتناظرة: $A = A^T$. سنوسّع الآن مفهوم التناظر بعد أن تعرّفنا على المصفوفات ذوات العناصر المركّبة. ليس التعميم الحقيقي هو المصفوفة التي تساوي منقولها ***بل المصفوفة التي تساوي منقول مرافقتها.*** هذه هي التي نسمّيها المصفوفة الهرميتية. إليك مثالاً نموذجيّاً:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 - 3i \\ 3 + 3i & 5 \end{bmatrix} = A^H. \qquad (٧)$$

لاحظ أن على عناصر القطر، أن تكون حقيقية وهي لا تتغيّر عند أخذ مرافق المصفوفة. كل عنصر غير قطري يقابل خياله في مرآة القطر الرئيسي و $3 - 3i$ مرافق للعدد $3 + 3i$ ***في كل الأحوال، سيكون*** $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$. وسيوضّح هذا المثال الخواص الأربع الأساسية للمصفوفات الهرميتية.

سيكون هدفنا الأساسي هو إثبات هذه الخواص. ومن الضروري التأكّد من جديد أن هذه الخواص تتحقّق، أيضاً، من قبل المصفوفات التناظرية؛ فمن المؤكّد أن مصفوفة تناظرية هي هرميتية. من أجل المصفوفات الحقيقية، لا يوجد فرق بين A^T و A^H، السؤال الرئيسي هو ماالأشياء التي لا يغيرها النقل. إذا وجد ذلك، فان القيم الذاتية تبقى حقيقية كما سنبرهن ذلك.

الخاصة ١ إذا كان $A = A^H$ فان لكل متّجه مركّب x، يكون $x^H A x$ حقيقيّاً. هناك إسهام من كل عنصر من A في $x^H A x$:

$$x^H A x = \begin{bmatrix} \overline{u} & \overline{v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 - 3i \\ 3 + 3i & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

$$= 2\bar{u}u + 5\bar{v}v + (3 - 3i)\bar{u}v + (3 + 3i)u\bar{v}.$$

الحدّان الناتجان عن العنصرين القطريين حقيقيّان لأن $2\bar{u}u = 2|u|^2$، و $2\bar{v}v = 5|v|^2$. أمّا الحدّان الناتجان عن العنصرين غير القطريين فانهما مترافقان . لذا، إذا جمعا معاً ينتج عن ذلك مثلي الجزء الحقيقي لـ $(3-3i)\bar{u}v$ أي أن لـ x^HAx حقيقي .

من أجل برهان عام لهذه الخاصّة، يمكننا حساب $(x^HAx)^H$. سوف نصل الى مرافق المصفوفة x^HAx التي هي من النوع 1×1، ولكنّنا سنصل فعلاً، من جديد، للعدد نفسه : $(x^HAx)^H = x^HA^Hx^{HH} = x^HAx$. وهذا يعني أن هذا العدد حقيقي .

الخاصّة –٢ جيمع القيم الذاتية لمصفوفة هرميتية أعداد حقيقية .

البرهان : لنفرض أن λ قيمة ذاتية وأن x هو المتّجه الذاتي غير الصفري المقابل لهذه القيمة : $Ax = \lambda x$. ***الطريقة تستدعي أن نضرب بالمصفوفة*** x^H:

$x^HAx = \lambda x^Hx$. الطرف الأيسر حقيقي بسبب الخاصّة (١) كما أن الطرف الأيمن $x^Hx = \|x\|^2$ حقيقي موجب وذلك لفرضنا $x \neq 0$. لذلك، فإن على λ أن يكون حقيقيّاً . نلاحظ في مثالنا، $\lambda = 8$ أو $\lambda = -1$:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3-3i \\ 3+3i & 5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 10 - |3-3i|^2 \quad (٨)$$

$$= \lambda^2 - 7\lambda - 8 = (\lambda - 8)(\lambda + 1).$$

ملاحظة : يلاحظ أنّه يمكن أن يكون البرهان أسهل من ذلك إذا كانت A حقيقية :

$Ax = \lambda x$ تعطي $x^TAx = \lambda x^Tx$ لذا $\lambda = \dfrac{x^TAx}{x^Tx}$ حقيقي

لكن، يبدو أن ذلك محقّق لأي مصفوفة حقيقية، ولكن في ذلك خدعة : يمكن *للمتّجه الذاتي* x *أن يكون مركباً* . يكون ذلك، فقط، في الحالة التي يكون فيها A

$A^T=$ ، حيث يمكننا أن نؤكّد أن λ و x يبقيان حقيقيين . أكثر من ذلك ، *المتّجهات الذاتية متعامدة* $x^Ty = 0$ في المصفوفة المتناظرة الحقيقية و $x^Hy = 0$ في الحالة الهرميتية المركّبة .

الخاصّة ٣ المتّجهات الذاتية لمصفوفة متناظرة حقيقية أو هرميتية ، المقابلة لقيم ذاتية مختلفة ، متعامدة فيما بينها .

ينطلق البرهان من المعلومات المعطاة ، $Ax = \lambda_1 x,\ Ay = \lambda_2 y,\ A = A^H$:

$$(\lambda_1 x)^H y = (Ax)^H y = x^H A y = x^H (\lambda_2 y). \qquad (٩)$$

العددان المتطرّفان يحقّقان $\lambda_1 x^H y = \lambda_2 x^H y$ لأن العددين λ حقيقيّان . نستخدم الآن الفرض $\lambda_1 \neq \lambda_2$، الأمر الذي يفرض النتيجة $x^H y = 0$. في مثالنا :

$$(A - 8I)x = \begin{bmatrix} -6 & 3-3i \\ 3+3i & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1+i \end{bmatrix}$$

$$(A + I)y = \begin{bmatrix} 3 & 3-3i \\ 3+3i & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 1-i \\ -1 \end{bmatrix}.$$

هذان المتّجهان الذاتيّان متعامدان :

$$x^H y = \begin{bmatrix} 1 & 1-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-i \\ -1 \end{bmatrix} = 0.$$

من الواضح أن أي مضاعفين x/α و y/β يصلحان متّجهين ذاتيين . لنفرض أنّنا اخترنا $\alpha = \|x\|,\ \beta = \|y\|$ بحيث يصبح المتّجهان x/α و y/β متّجهي وحدة ، فنكون بذلك قد نظّمنا المتّجهين الذاتيين ليكونا بطول يساوي الواحد . وبما أنّهما متعامدان فإنهما ***متعامدان نظاميّان*** . إذا اخترنا هذه المتّجهات الذاتية أعمدة لمصفوفة S ، فيكون لدينا $S^{-1}AS = \Lambda$ (كما كان عندما كانت المتّجهات الذاتية أعمدة) . ***أعمدة المصفوفة المقطّرة متعامدة نظامية .***

إذا كانت المصفوفة الأصلية A حقيقية ومتناظرة ، فإن قيمها الذاتية حقيقية حسب

الخاصّة (٢). و متّجهاتها الذاتية متعامدة حسب الخاصّة (٣). هذه المتّجهات الذاتية حقيقية، أيضاً، (إنّها تحل $(A - \lambda I)x = 0$ كما رأينا ذلك عند دراسة الفضاء الصفري في الفصل (٢) ويمكن تنظيم أطوالها لتصبح مساوية الواحد. لذا، يمكنها أن تقع في مصفوفة قائمة:

إذا كان $A = A^T$ ***فانّه يمكن للمصفوفة المقطّرة أن تكون مصفوفة قائمة*** Q .

إن كون الأعمدة متعامدة نظامية يكافئ $Q^TQ = I$ أو $Q^T = Q^{-1}$. يصبح التقطير المعتاد $S^{-1}AS = \Lambda$ خاصاً - إنه $Q^{-1}AQ = \Lambda$ أو $A = Q\Lambda Q^T$ لقد وصلنا الى أضخم نظريّات الجبر الخطّي:

٥ س يمكن تحليل مصفوفة متناظرة حقيقية وفق $A = Q\Lambda Q^{-1}$ ـ تقع المتّجهات الذاتية المتعامدة النظامية في Q والقيم الذاتية في Λ.

في الهندسة أو الميكانيك، هذه هي نظرية ***المحاور الأساسية***. إنها تعطي الاختيار الصحيح لمحوري القطع الناقص. هذان المحوران متعامدان ويتّجهان في اتّجاه المتّجهين الذاتيين للمصفوفة المقابلة. (البند ٦-٢ يربط المصفوفات المتناظرة بمجسمّات القطوع الناقصة في فضاء ذي n بعداً). في الميكانيك، تُعطي المتّجهات الذاتية الاتّجاهات الأساسية التي يقَع عليها الضغط المحض أو التوتّر المحض- في الاتّجاهات الأخرى، يحصل «تشوه».

في الرياضيّات، يعرف القانون $A = Q\Lambda Q^T$ بنظرية *الطيف*. إذا ضربنا أعمدة A بأسطرها فإن هذه المصفوفة تصبح تركيباً لمساقط وحيدة البعد - التي هي المصفوفات الخاصّة xx^T من الرتبة واحد.

$$A = Q\Lambda Q^T = \begin{bmatrix} | & & & | \\ x_1 & & & x_n \\ | & & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{---} & x_1^T & \text{---} \\ & \text{---} & \\ & \text{---} & \\ \text{---} & x_n^T & \text{---} \end{bmatrix} \qquad (١٠)$$

$$= \lambda_1 x_1 x_1^T + \lambda_2 x_2 x_2^T + \cdots + \lambda_n x_n x_n^T.$$

لمصفوفتنا ذات النوع 2×2 القيمتان الذاتيتان (3) و (1) :

مثال :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

المتّجهان الذاتيّان اللذان عدّل طولاهما الى الواحد، هما :

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad و \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

لذا فإن المصفوفتين الواقعتين في الطرف الأيمن هما $x_1 x_1^T$ و $x_2 x_2^T$ – جداء عمود بسطر – إنّهما المسقطان على المستقيم الحامل لـ x_1 والمستقيم الحامل لـ x_2.

نؤكّد أن ذلك هو التقطير $A = S \Lambda S^{-1}$ نفسه المعتاد. لقد خُصّص بـ $S = Q$ و $S^{-1} = Q^T$ ، وعلاوة على ذلك، يجزأ الى أجزاء منفصلة بحيث تعطي كل قيمة ذاتية قطعة : النتيجة هي بناء كل مصفوفة متناظرة من مساقط ذوات بعد واحد– وهي مصفوفات متناظرة من رتبة تساوي الواحد .

ملاحظة : إذا كانت مصفوفة حقيقية وصدف أن كانت قيمها الذاتية حقيقية، فإن متّجهاتها الذاتية حقيقية، أيضاً، إنّها تحل $(A - \lambda I)\ x = 0$ ويمكن حسابها بالحذف. لكنّها ليست متعامدة إلاّ إذا كانت A متناظرة : $A^T = A$ يؤدّي الى $A = Q \Lambda Q^T$.

إذا كانت المصفوفة حقيقية، إلاّ أن بعض قيمها الذاتية مركّبة، فان هذه القيم الذاتية تظهر على صورة أزواج مترافقة. *إذا كان* $a + ib$ *قيمة ذاتية لمصفوفة حقيقية*، فإن $a - ib$ أيضاً. إن محدّدة $A - \lambda I$ كثيرة حدود بمعاملات حقيقية، ولمثل الكثيرة الحدود هذه، تكون الجذور المركبة أزواجاً. في المصفوفة ذات النوع 2×2، يحوي قانون الدرجة الثانية الحد $\pm (b^2 - 4ac)^{1/2}$.

تنبيه : بقول دقيق، لقد برهنت نظرية الطيف $A = Q\Lambda Q^T$ ، فقط، في الحالة التي تكون فيها القيم الذاتية للمصفوفة A مختلفة، لذا، فإن هناك، حتماً، n من المتّجهات الذاتية المستقلّة، ويمكن تقطير A بأمان. مع ذلك (انظر البند ٥-٦)، فمن الصحيح أنّه ***إذا كان لمصفوفة متناظرة قيم ذاتية مكرّرة، فإنها تبقى مع ذلك ذات مجموعة كاملة من المتّجهات الذاتية المتعامدة النظامية***. الحالة القصوى هي مصفوفة الوحدة التي تقبل $\lambda = 1$ قيمة ذاتية مكرّرة n مرّة - لا يوجد نقص في المتّجهات الذاتية.

لانهاء الحالة المركّبة، نحتاج الى مشابه للمصفوفة الحقيقية القائمة - وبامكانك أن تخمّن ماذا سيحدث للشرط $QQ^T = I$. سيحوّل النقل الى ***نقل المرافق***. يصبح الشرط $U^H U = I$. الحرف الجديد U يعكس الاسم الجديد. ***تدّعى مصفوفة مركّبة ذات أعمدة متعامدة نظامية مصفوفة واحدية***.

المصفوفة الواحدية :

هل يمكننا أن نفرض التشابه التالي؟ ***يمكن مقارنة مصفوفة هرميتية مع عدد حقيقي، ومصفوفة واحدية بعدد واقع على دائرة الوحدة*** - عدد مركّب تساوي قيمته المطلقة الواحد. من أجل القيم الذاتية لهذه المصفوفات، ستكون المقارنة أكثر من تشابه: الأعداد λ أعداد حقيقية إذا كان $A^H = A$ وتقع على دائرة الوحدة إذا كان $U^H U = 1$. ستكون المتّجهات الذاتية متعامدة ويمكن جعلها متعامدة نظامية[(١)].

لقد أثبتت هذه القضايا من أجل المصفوفات الهرميتية (بما في ذلك المتناظرة) ولكنّها لم تبرهن من أجل المصفوفات الواحدية (بما في ذلك القائمة). لذا سنسعى مباشرة الى خواص U الثلاث التي تقابل الخواص ١ , ٢ , ٣ للمصفوفة A . ولنتذكّر أن U ذات أعمدة متعامدة نظامية:

---

(١) سنقارن فيما بعد المصفوفات «الهرميتية - التخالفية» بأعداد تخيّلية بحتة والمصفوفات «النظامية» بأعداد مركّبة $a + ib$. المصفوفة التي متّجهاتها الذاتية غير متعامدة لا تقع في هذه الأصناف، وهي خارج التشابه.

$$U^H = U^{-1} \text{ أو } UU^H = I \text{ أو } U^HU = 1$$

يؤدّي ذلك مباشرة الى الخاصّة (1') ، لايؤثّر الضرب بـ U على الجداء الداخلي أو الزاوية أو الطول . البرهان ، كما كان من أجل Q ، بسطر واحد ، فقط .

الخاصة ١َ $(Ux)^H(Uy) = x^HU^HUy = x^Hy$ و (باختيار $y = x$) نجد أن الطول محفوظ :

$$\|Ux\|^2 = \|x\|^2. \quad (١١)$$

الخاصّة التالية تعيّن مواضع قيم U الذاتية ، كل λ في نقطة من دائرة الوحدة .

الخاصة ٢َ لكل قيمة ذاتية للمصفوفة U قيمة مطلقة $|\lambda| = 1$.

ينتج ذلك مباشرة من العلاقة $Ux = \lambda x$ وذلك بالمقارنة بين طولي الطرفين : $\|Ux\| = \|x\|$ ، استناداً الى الخاصّة (١َ) ، ولكن $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ دائماً ، لذا ، فإن $|\lambda| = 1$.

الخاصة ٣َ المتّجهات الذاتية المقابلة لقيم ذاتية مختلفة متعامدة فيما بينها .

يفرض البرهان أن $Ux = \lambda_1 x$ ، $Uy = \lambda_2 y$ ، ونجري ضرباً داخليّاً ونستند الى الخاصّة ١ :

$$x^Hy = (Ux)^H(Uy) = (\lambda_1 x)^H(\lambda_2 y) = \overline{\lambda}_1 \lambda_2 x^Hy.$$

إذا قارنّا الطرف الأيسر بالطرف الأيمن ، نجد أنّه يجب أن يكون $\overline{\lambda}_1\lambda_2 = 1$ أو $x^Hy = 0$. لكن الخاصة ٢َ تعطي $\overline{\lambda}_1\lambda_1 = 1$ لذا فلا يمكن أن يكون أيضاً $\overline{\lambda_1}\lambda_2 = 1$ ينتج عن ذلك أن $x^Hy = 0$ والمتّجهات الذاتية متعامدة .

مثال ١ . $U = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$

القيمتان الذاتيتان لهذا الدوران هما e^{it} , e^{-it} بقيمتين مطلقتين تساويان الواحد . المتّجهان الذاتيّان هما $x = (1,-i)$ و $y = (1,i)$ وهما متعامدان (تذكر بأن تأخذ المرافق في $x^Hy = 1 + i^2 = 0$) . بعد التقسيم على $\sqrt{2}$ ، يصبحان متعامدين نظاميين

ويكون تقطير U ما يلي:

$$\begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{it} & \\ & e^{-it} \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix}.$$

ننبّه الى أن إشارتي i , $-i$ تنقلبان عند النقل. في الحقيقة، الطرف الأيمن هو جداء ثلاث مصفوفات واحدية وينتج مصفوفة واحدية في الطرف الأيسر. المثال التالي هو أكثر المصفوفات الواحدية أهمّية.

مثال ٢ مصفوفة فورية

$$U = \frac{F}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & . & 1 \\ 1 & w & . & w^{n-1} \\ . & . & . & . \\ 1 & w^{n-1} & . & w^{(n-1)^2} \end{bmatrix}.$$

المعامل $\sqrt{n}$ يرد الأعمدة الى متّجهات وحدة. (القيمة المطلقة لكل عنصر تساوي الواحد، لذا، فإن طول كل عمود من المصفوفة الأصلية F يساوي $\sqrt{n}$). كون $U^H U = I$ هو المتطابقة الأساسية في تحويل فوريه المنتهي، ولتعد الى ذاكرتنا النقطة الأساسية من البند (٣–٥):

جداء السطر 1 من U^H بالعمود 2 من U هو $0 = \frac{1}{n}(1+w+w^2+...+w^{n-1})$

جداء السطر i من U^H بالعمود j من U هو $0 = \frac{1}{n}(1+W+W^2+...+W^{n-1})$.

في الحالة الأولى، العدد المركّب w هو الجذر الأصلي (الأول) من الدرجة n للواحد. إنّه واقع على دائرة الوحدة، زاويته $\theta = 2\pi/n$. إنّه يساوي $e^{2\pi i/n}$، قواه موزّعة بالتساوي على دائرة الوحدة. يحقّق هذا التوزيع كون مجموع جميع قوى w التي عددها n ـ جميع جذور الدرجة n للواحد ـ يساوي الصفر. جبريّاً، هذا المجموع هو $(w^n-1)/(w-1)$ ولكن $w^n - 1 = 0$.

في الحالة الثانية، W هي قوّة لـ w. إنّها w^{j-i} وهي، أيضاً، جذر للواحد. إنّها ليست الجذر الأوّل للواحد، وذلك لأننا لم ننظر في عناصر قطر $U^H U$ أي $i \neq j$. مجموع قوى W يساوي الصفر، أيضاً: $0 = (W^n-1)/(W-1)$.

وهكذا وجدنا أن U مصفوفة واحدية. لقد كتبنا من قريب معكوسها ـ الذي له الصورة ذاتها عدا الاستعاضة عن w بـ $w^{-1}=e^{-i\theta}=\overline{w}$. الآن لنتعرّف على ما حدث. لمّا كانت U واحدية فانّنا نجد معكوسها بالانتقال (الذي لا يغيّر شيئاً) وأخذ المرافق (الذي يغيّر w إلى $\overline{w}$). معكوس U هذه هو $\overline{U}$.

استناداً الى '1 من خواص المصفوفة الواحدية، فإن طول المتّجه x يساوي طول Ux. الطاقة في فضاء ما تساوي الطاقة في متَحوّل هذا الفضاء. والطاقة هي المجموع $|x_j|^2$ وهي أيضاً مجموع الطاقات في مختلف «المتوافقات». يحوي متّجه مثل $x = (1,0,...,0)$ كميّات متساوية من كل مركّبة للتواتر، المتّجه $Ux = (1,1,...,1)/\sqrt{n}$ هو متّجه وحدة.

لنذكر أنّه يمكن حساب Ux بسرعة بطريقة تحويل فوريه السريع.

مثال ـ٣

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

هذه المصفوفة مصفوفة قائمة، لذا، استناداً، الى '٣، يجب أن يكون لها متّجهات ذاتية متعامدة. إنّها أعمدة مصفوفة فوريه! يجب أن يكون لقيمها الذاتية قيم مطلقة تساوي الواحد. إنّها الأعداد $1, w_1, ..., w^{n-1}$ (أو $1, i, i^2, i^3$، في هذه الحالة: 4×4).
إنّها مصفوفة حقيقية، لكن قيمها الذاتية ومتّجهاتها الذاتية مركّبة.

ملاحظة أخيرة. تحقّق المصفوفة الهرميتية التخالفية $K^H = -K$ تماماً كما تحقّق مصفوفة تناظرية تخالفية $K^T = -K$. تنتج خواصّها مباشرة من ارتباطها القريب مع المصفوفات الهرميتية:

إذا كانت A هرميتية فان $K = iA$ هرميتية تخالفية.

القيم الذاتية للمصفوفة K تخيّلية بحتة بدلاً من كونها حقيقية خالصة، لقد ضربنا بـ i . المتّجهات الذاتية لم تتغيّر . يؤدّي المثال الهرميتي الوارد في الصفحات السابقة الى :

$$K = iA = \begin{bmatrix} 2i & 3+3i \\ -3+3i & 5i \end{bmatrix} = -K^H.$$

العناصر القطرية مضاعفات (باستثناء الصفر) i. القيم الذاتية هي $8i$, $-i$. تبقى المتّجهات الذاتية متعامدة ويبقى لدينا $K = U\Lambda U^H$ ـ بمصفوفة واحدية U عوضاً عن المصفوفة الحقيقية Q القائمة، و بـ $8i$, $-i$ الواقعة على قطر Λ .

يلخّص هذا البند بالجدول الذي يمثّل التوازي بين الحقيقي والمركّب .

الحقيقي مقابل المركّب

R^n فضاء متّجهات بـ n مركّبة حقيقية $\leftrightarrow$ C^n فضاء متّجهات بـ n مركّبة مركّبة

الطول : $\|x\|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$ $\leftrightarrow$ الطول : $\|x\|^2 = |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2$

النقل : $A^T_{ij} = A_{ji}$ $\leftrightarrow$ النقل الهرميني : $A^H_{ij} = \overline{A_{ji}}$

$(AB)^T = B^T A^T \leftrightarrow (AB)^H = B^H A^H$

الجداء الداخلي $x^T y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ $\leftrightarrow$ الجداء الداخلي $x^H y = \bar{x}_1 y_1 + \dots + \bar{x}_n y_n$

$(Ax)^T y = x^T (A^T y) \leftrightarrow (Ax)^H = x^H (A^H y)$.

التعامد : $x^T y = 0$ $\leftrightarrow$ التعامد $x^H y = 0$

مصفوفات تناظرية : $A^T = A$ $\leftrightarrow$ مصفوفات هرميتية : $A^H = A$

$A = Q\Lambda Q^{-1} = Q\Lambda Q^T$ (Λ حقيقية) $\leftrightarrow$ $A = U\Lambda U^{-1} = U\Lambda U^H$ (Λ حقيقية)

مصفوفات تناظرية تخالفية $k^T = -k$ $\leftrightarrow$ مصفوفات هرميتية تخالفية $k^H = -k$

مصفوفات قائمة $Q^T = Q^{-1}$ أو $Q^T Q = I$ $\leftrightarrow$ مصفوفات واحدية $U^H = U^{-1}$ أو $U^H U = I$

$(Qx)^T (Qx) = x^T y$ و $\|Qx\| = \|x\|$ $\leftrightarrow$ $(vx)^H (vy) = x^H y$ و $\|vx\| = |x|$

الأعمدة والأسطر والمتّجهات الذاتية من Q و U متعامدة نظامية وكل $|\lambda| = 1$.

تمـاريـن

٥-٥-١ من أجل العددين المركّبين $1-i$ و $3+4i$

(أ) أوجد موضعيهما في المستوي المركّب .

(ب) أوجد مجموعهما وجداء هما .

(ج) أوجد مرافقيهما والقيمة المطلقة لكل منهما .

هل يقعان داخل دائرة الوحدة أم في خارجها ؟

٥-٥-٢ ماذا يمكنك أن تقول حول :

(١) مجموع عدد مركّب ومرافقه ؟

(٢) مرافق عدد يقع على دائرة الوحدة ؟

(٣) جداء عددين واقعين على دائرة الوحدة ؟

(٤) مجموع عددين واقعين على دائرة الوحدة ؟

٥-٥-٣ إذا كان $x=2+i$, $y=1+3i$ ، فأوجد $\overline{x}$, $x\overline{x}$, xy, $1/x$, x/y . تحقّق من أن القيمة المطلقة $|xy|$ تساوي جداء $|x|$ بـ $|y|$ والقيمة المطلقة $|1/x|$ تساوي خارج قسمة 1 على $|x|$.

٥-٥-٤ أوجد العددين a, b من العدد المركّب $a+ib$ الواقع على دائرة الوحدة عند الزوايا $\theta = 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$. تحقّق، بضرب، مباشر، من أن مربّع الأوّل يساوي الثاني وأن مكعّب الأوّل يساوي الثالث .

٥-٥-٥ (أ) إذا كان $x=e^{i\theta}$ فما هو x , x^{-1}, x^2 في الاحداثيّات القطبية ؟

أين يقع العدد المركّب الذي يحقّق $x^{-1}=\overline{x}$ ؟

(ب) في اللحظة $t=0$ ، يكون العدد المركّب $e^{(-1+i)t}=1$ مساوياً الواحد .

ارسم الخط الذي يرسمه عندما تزداد t من الصفر الى 2π .

٥-٥-٦ أوجد طولي المتّجهين التاليين وجداء هما الداخلي :

$$y = \begin{bmatrix} 2+4i \\ 4 \end{bmatrix} \quad و \quad x = \begin{bmatrix} 2-4i \\ 4i \end{bmatrix}.$$

٥-٥-٧ اكتب المصفوفة A^H واحسب $C = A^H A$ إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ i & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

مهي العلقة بين C^H , C ؟ هل ذلك صحيح عندما تنشأ Cمن $A^H A$ ؟

٥-٥-٨ (١) بالمصفوفة السابقة A ، استخدم الحذف لحل $Ax = 0$.

(٢) برهن أن الفضاء الصفري الذي انتهيت من حسابه متعامد مع $\mathscr{R}(A^H)$وليس مع فضاء الأسطر $\mathscr{R}(A^T)$ المعتاد. الفضاءات الأساسية الأربعة في الحالة المركّبة هي $\mathscr{N}(A)$, $\mathscr{R}(A)$ كالسابق ثم، $\mathscr{R}(A^H)$, $\mathscr{N}(A^H)$.

٥-٥-٩ (أ) ما هي محدّدة A^H بدلالة محدّدة A ؟

(ب) برهن أن محدّدة أي مصفوفة هرميتية هي عدد حقيقي .

٥-٥-١٠ (أ) ما هو عدد درجات الحرّية في مصفوفة متناظرة حقيقية ، في مصفوفة قطرية حقيقية ، وفي مصفوفة حقيقية قائمة ؟ (الجواب الأوّل هو مجموع الجوابين الآخرين ، لأن $A = Q\Lambda Q^T$.)

(ب) برهن أن للمصفوفات الهرميتية من النوع 3×3 تسع درجات حربة وللمصفوفات الواحدية ست . (يمكن ضرب أعمدة U الجديدة بأي عدد من الشكل $e^{i\theta}$) .

٥-٥-١١ اكتب المصفوفات التالية بالصورة $\lambda_1 x_1 x_1^H + \lambda_2 x_2 x_2^H$ لنظرية الطيف :

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

٥-٥-١٢ أعط سبب الصحّة ومثالاً معاكساً في حالة الخطأ:

(أ) إذا كانت A هرميتية فان $A + iI$ قابلة للعكس.

(٢) إذا كانت Q قائمة فان $Q + \frac{1}{2} I$ قائمة أيضاً

(٣) إذا كانت A حقيقية فان $A + iI$ قابلة للعكس.

٥-٥-١٣ افرض أن A متناظرة من النوع 3×3 ، قيمها الذاتية $0,1,2$.

(أ) ما هي الخواص المضمونة للمتّجهات الذاتية الواحدية المقابلة لـ u,v,w؟

(ب) بدلالة u,v,w ، صف الفضاء الصفري، الصفري اليساري، فضاء الأسطر وفضاء الأعمدة لـ A .

(جـ) أوجد متّجهاً x يحقّق $Ax = v + w$. هل هو وحيد ؟

(د) تحت أي شروط على b يكون للنظام $Ax = b$ حل ؟

(هـ) إذا كانت u,v,w أعمدة S، فما هي S^{-1} و $S^{-1}AS$ ؟

٥-٥-١٤ في القائمة الواردة أدناه ، أي صنف يحوي المصفوفة A وأيّها يحوي المصفوفة B ؟

$$B = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

قائمة، قابلة للعكس، إسقاط، مبادلة، هرميتية، من المرتبة واحد، قابلة للتقطير، ماركوف. أوجد القيم الذاتية لـ A و B.

٥-٥-١٥ ما هو عدد أبعاد الفضاء S لجميع المصفوفات المتناظرة الحقيقية من النوع $n \times n$ ؟ تقول نظرية الطيف إن كل مصفوفة متناظرة تركيب لـ n من مصفوفات الاسقاط. بما أن عدد الابعاد هنا يزيد على n ، كيف يمكن تفسير هذه الزيادة ؟

٥-٥-١٦ اكتب الوقائع ذوات الشأن المتعلقة بالقيم الذاتية لما يلي :

(١) مصفوفة متناظرة حقيقية

(٢) مصفوفة مستقرة : جميع حلول المعادلة $du / dt = Au$ تتقرب من الصفر

(٣) مصفوفة قائمة

(٤) مصفوفة ماركوف

(٥) مصفوفة معيبة (غير قابلة للتقطير)

(٦) مصفوفة شاذة

٥-٥-١٧ برهن أنه إذا كانت كل من U و V واحدية ، فان UV تكون كذلك . استخدم المعيار $U^{H}U = I$

٥-٥-١٨ برهن أن محددة مصفوفة واحدية تحقق $|\det U| = 1$ ولكن المحددة ليست ، بالضرورة ، مساوية الواحد . صف جميع المصفوفات الواحدية من النوع 2×2 .

٥-٥-١٩ أوجد عموداً ثالثاً لتصبح المصفوفة التالية واحدية . مامقدار الحرية في هذا الاختيار؟

$$U = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 0 \\ i/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

٥-٥-٢٠ قطّر المصفوفة الهرميتية-التخالفية K ذات النوع 2×2 والتي جميع عناصرها تساوي i . احسب $e^{Kt} = Se^{\Lambda t}S^{-1}$ وتحقق من أن e^{Kt} واحدية . ماقيمة مشتقتها عند $t = 0$؟

٥-٥-٢١ صف جميع مصفوفات النوع 3×3 التي تتصف بكونها هرميتية وواحدية وقطرية في وقت معاً . كم واحدة نجد مثل تلك المصفوفة؟

٥-٥-٢٢ يمكن تجزئة أي مصفوفة Z إلى مصفوفة هرميتية وهرميتية تخالفية، $Z = A + K$ تماماً مثل العدد المركب z الذي يجزأ بالصورة $a + i\,b$. الجزء الحقيقي لـ z هو نصف $z + \overline{z}$ و«الجزء الحقيقي» لـ Z هو نصف $Z + Z^H$. أوجد قانوناً مشابهاً «للجزء التخيلي» وجزيء المصفوفتين التاليتين بالصورة $A + K$:

$$Z = \begin{bmatrix} i & i \\ -i & i \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad Z = \begin{bmatrix} 3+i & 4+2i \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

٥-٥-٢٣ برهن أن أعمدة مصفوفة فوريه F ذات النوع 4×4 هي متجهات مصفوفة المبادلة P في المثال ٣.

٥-٥-٢٤ لمصفوفة المبادلة تلك، اكتب المصفوفة *الدوارة*:
$C = c_0 I + c_1 P + c_2 P^2 + c_3 P^3$ (مصفوفة متجهاتها الذاتية هي، أيضاً، مصفوفة فوريه). أكتب أيضاً المركبات الأربع لجداءمصفوفة بمتجه Cx الذي هو التفاف لـ $c = (c_0, c_1, c_2, c_3)$ و $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$.

٥-٥-٢٥ من أجل المصفوفة الدوارة $C = F \Lambda F^{-1}$، لماذا يكون الضرب بـ F^{-1} ثم بـ Λ ثم بـ F (قاعدة الالتفاف) أكثر سرعة من الضرب مباشرة بـ C؟

٥ - ٦ تحويلات التشابه :

لقد تضمنت كل خطوة في هذا الباب، فعلاً، التركيب $S^{-1}AS$، حيث المتجهات الذاتية للمصفوفة A قد وضعت أعمدة للمصفوفة S والتركيب $S^{-1}AS$ كان مصفوفة قطرية (سميت Λ). عندما كانت A متناظرة كتبنا Q عوضاً عن S كتذكرة بأنه من الممكن اختيار المتجهات الذاتية متعامدة نظامية. في الحالة المركبة، عندما كانت A هرميتية، فقد كتبنا U، لكنها بقيت مصفوفة المتجهات الذاتية. الآن، في هذا البند الأخير

سننظر في تركيب آخر $M^{-1}AM$ ـ شكل بالطريقة نفسها، *ولكن* ***بأية مصفوفة قابلة للعكس*** M ***تقع في اليمين ومعكوسها في اليسار***. قد يصدف أن تكون المتجهات الذاتية غير ممكنة التكوين (الحالة المعيبة)، أو أننا لانعرفها أو أننا لانريد استخدامها.

لنصف أولاً، العلاقة بين A و $M^{-1}AM$. يقال عن هاتين المصفوفتين إنهما متشابهتان. يدعى الانتقال من إحداهما إلى الأخرى ***تحويل تشابه***. إنها الخطوة الطبيعية التي يجب القيام بها عند التعامل مع معادلات تفاضلية أو قوى مصفوفة أو قيم ذاتية ــ تماماً، كما كانت خطوات الحذف طبيعية عندما تعاملنا مع $Ax=b$ (الحذف يضرب A من اليسار بـ L^{-1}، ولكن لايضرب من اليمين بـ L). عادةً، يكون هناك جماعة كاملة من المصفوفات $M^{-1}AM$، جميعها مشابهة لـ A، وهناك مسألتان أساسيتان:

(١) ماهي الأمور المشتركة بين هذه المصفوفات $M^{-1}AM$؟

(٢) باختيار خاص لـ M، ما هو الشكل الخاص الذي يمكن أن نصل إليه بـ $M^{-1}AM$؟

الجواب الاخير يعطى من قبل **صيغة جوردان** التي ينتهي بها هذا الباب.

من المستحسن أن نذكر كيف أنشىء هذا التركيب. لنفرض أننا أعطينا معادلة تفاضلية أو معادلة فرق بالمتغير u، ولنفرض أننا أجرينا التغيير $u=Mv$ لإدخال المتغير الجديد v، فيكون:

$$\frac{du}{dt}=Au \quad \text{تصبح} \quad M\frac{dv}{dt}=AMv, \quad \text{أو} \quad \frac{dv}{dt}=M^{-1}AMv$$

$$u_{n+1}=Au_n \quad \text{تصبح} \quad Mv_{n+1}=AMv_n \quad \text{أو} \quad u_{n+1}=M^{-1}AMv_n$$

المصفوفة الجديدة في المعادلة هي $M^{-1}AM$. في الحالة الخاصة، يكون $M=S$ ويتفكك النظام لأن $\Lambda=S^{-1}AS$ قطرية. تتطور النماذج النظامية بصورة مستقلة. إذا تكلمنا بلغة التحويلات الخطية التي قدمت قبل، فإن المتجهات الذاتية قد اختيرت

بحيث تكون قاعدة للفضاء. إن ذلك هو أقصى تبسيط، لكن تبسيطات أخرى أقل تطرفا مستعملة أيضاً. نحاول أن نجعل العمل بـ $M^{-1}AM$ أكثر سهولة من العمل بـ A.

السؤال الأول كان حول جماعة المصفوفات $M^{-1}AM$ التي تضم A ذاتها، وذلك باختيار M مصفوفة الوحدة. يمكن جعل كل واحدة من هذه المصفوفات تظهر في معادلة تفاضلية أو معادلة فرق نتيجة لتغيير المتغير $u = Mv$، لذا، من المتوقع أن يكون بينها أشياء مشتركة وهي واقعة، فعلاً: ***المصفوفات المتشابهة مشتركة بالقيم الذاتية.***

٥ ع إذا كان $B = M^{-1}AM$ فان للمصفوفتين B و A القيم الذاتية نفسها ويقابل متجه ذاتي لـ A متجهاً ذاتياً $M^{-1}X$ لـ B .

البرهان مباشر، لما كان $A = MBM^{-1}$:

$$Ax = \lambda x \Rightarrow MBM^{-1}x = \lambda x \Rightarrow B(M^{-1}x) = \lambda(M^{-1}x).$$

لذا تكون λ قيمة ذاتية للمصفوفة B أيضاً. المتجهات الذاتية ضربت بـ M^{-1}.

يمكننا، أيضاً، أن نتحقق من أن المحددتين لـ $A - \lambda I$ و $B - \lambda I$ متطابقتان، وذلك من قاعدة ضرب محددتين :

$$\begin{aligned} \det(B - \lambda I) &= \det M^{-1}AM - \lambda I) = \det M^{-1}(A - \lambda I.)M) \\ &= \det M^{-1} \det(A - \lambda I) \det M = \det(A\ \lambda I). \end{aligned}$$

المحددتان ـ كثيرتا الحدود المميزتان لـ A و B ـ متساويتان. لذا، فان جذورهما ـ القيم الذاتية لـ A و B ـ متطابقة. المثال التالي يوجد بعض المصفوفات المشابهة للمصفوفة

مثال : المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ قطرية قيمتاها الذاتيتان 1 و 0 .

إذا كانت $M = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ فإن $B = M^{-1}AM = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$: مثلثية قيمتاها الذاتيتان 1 و 0

إذا كانت $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ فإن $B = M^{-1}AM = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$: مصفوفة إسقاط قيمتاها الذاتيتان

1 و 0

إذا كانت $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ فان $B = M^{-1}AM$ مصفوفة اختيارية قيمتاها الذاتيتان 1 و 0 .

في هذه الحالة، يمكننا أن ننتج أي مصفوفة لها القيم الذاتية الصحيحة، إنها حالة سهلة لأن القيمتين الذاتيتين 1 و 0 مختلفتان . شكل جوردان يمكنه أن يتدبر أمر حالة القيم الذاتية المكررة وأي نقص ممكن في المتجهات الذاتية . كل مايمكننا قوله الآن هو أن لـ $M^{-1}AM$ العدد ذاته من المتجهات الذاتية المستقلة مثل A (لأن المتجهات الذاتية ضربت بـ M^{-1}) .

الخطوة الأولى منفصلة ونظرية، وهي النظر في التحويلات الخطية التي تقع بعد المصفوفات . إن ذلك يعيدنا إلى البند ٢-٦ حيث نظرنا بالدوران أو الانعكاس أو الإسقاط بتعابير هندسية كشيء يقع في فضاء ذي n بعداً . يمكن أن يحدث التحويل خارج الجبر الخطي لكن الجبر الخطي يعيده إلى ضرب المصفوفات .

تغيير الأساس = تحويل تشابه :

ستكون العلاقة بين المصفوفتين المتشابهتين A و $B = M^{-1}AM$ شديدة القرب، لنعد إلى التحويلات الخطية و لنذكر الفكرة الأساسية : ***يمثل كل تحويل خطي بمصفوفة .*** لقد ظهرت في البند (٢-٦) نقطة إضافية واحدة : *تتعلق المصفوفة باختيار الأساس* . إذا غيرنا الأساس فاننا نغير المصفوفة . نحن الآن مستعدون لرؤية ماذا يفعل تغيير الأساس في المصفوفة .

تمثل المصفوفات المتشابهة تحويلاً خطياً واحداً بالنسبة لأسس مختلفة .

الجبر دقيق غالباً . لنفرض أن لدينا التحويل T (مثل الدوران) والأساس $v_1,\dots\dots,v_n$ يمكن تكوين مصفوفة A كما يلي : ينتج العمود j في A عن تطبيق T على v_j :

Tv_j = تركيب في المتجهات v هو $a_{1j}v_1+\dots+a_{nj}v_n$

وإذا كان لدينا أساس جديد $V_1,\dots,V_n$ فان مصفوفة جديدة (لنسمها B) تبنى بالطريقة ذاتها : TV_j= تركيب في المتجهات V هو $\sum_{i=1}^{n} b_{ij}V_i$. لكن، يجب أن

يكون كل V أيضاً تركيباً في متجهات القاعدة القديمة $V_j = \sum m_{ij} v_i$. المصفوفة M هذه، تمثل، حقاً، التحويل المطابق (!) عندما يكون الشيء الوحيد الذي يحدث هو تغيير الأساس. تبعاً للقاعدة الواردة في البند (٢-٦)، لقد طبقنا، فقط، التحويل المطابق (الذي يترك V_j كما هو) وكتبنا الناتج بتركيب في v. المصفوفة المعاكسة M^{-1} تمثل، أيضاً، التطبيق المطابق، عندما يتغير الأساس من v إلى V. قاعدة الجداء تعطي النتيجة التي نريدها:

٥ ف المصفوفتان A و B اللتان تمثلان التحويل الخطي T نفسه بالنسبة لأساسين مختلفين v و V هما مصفوفتان متشابهتان:

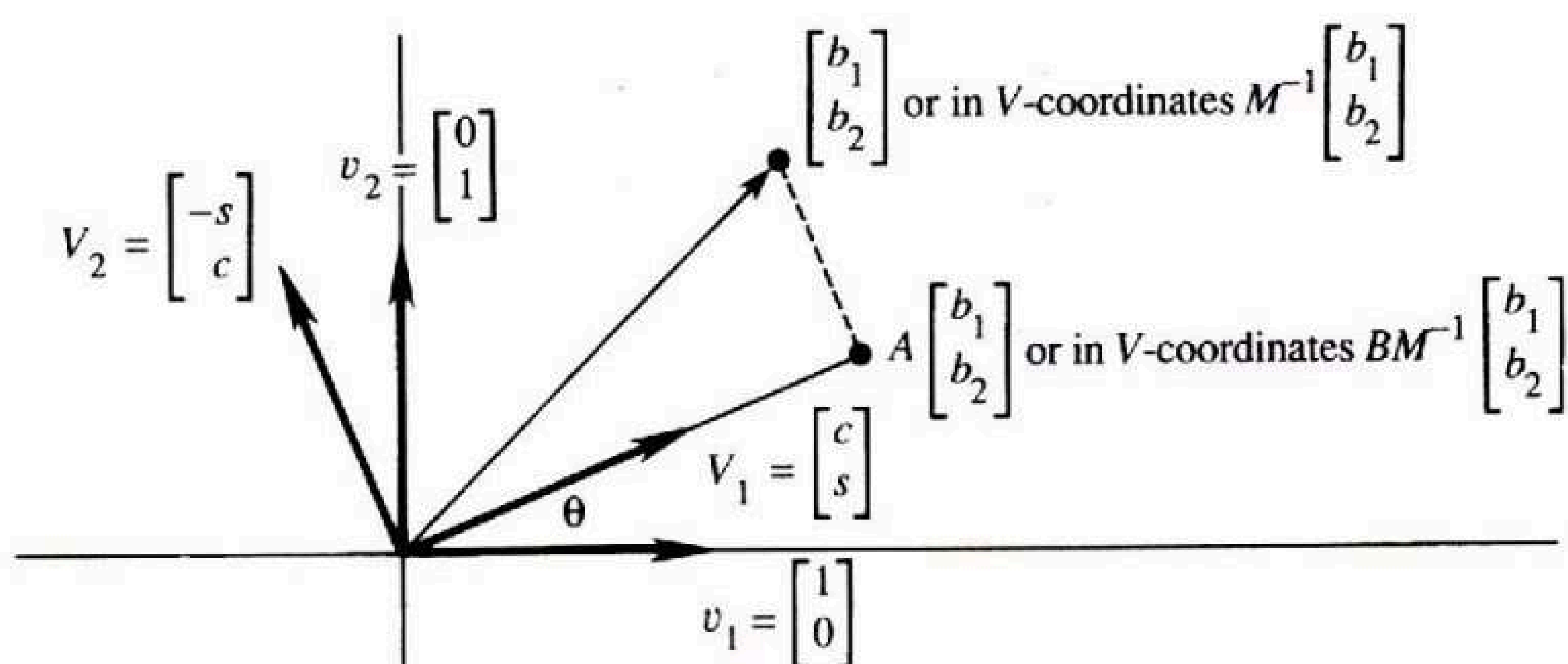
$$\underset{B}{[T]_{V \text{ to } V}} = \underset{=M^{-1}}{[I]_{u \text{ to } V}} \; \underset{A}{[T]_{v \text{ to } v}} \; \underset{M}{[I]_{V \text{ to } v}}$$

هذا البرهان (الناتج عن قاعدة الضرب) إلى حد ما غامض، والمثال هو أفضل طريقة لتفسير ذلك. نفرض أن T هو *الإسقاط على مستقيم* L يصنع مع المحور الأفقي زاوية قدرها θ . إن ذلك تحويل خطي وهو موصوف بصورة كاملة دون الاستعانة بأساس. ولكن، لتمثيل ذلك بمصفوفة، فنحن بحاجة إلى أساس، يعرض الشكل (٥-٥) إختيارين. أحدهما الأساس المعتاد $v_1 = (1,0)$ و $v_2 = (0,1)$ والآخر أساس اختير خصيصاً من أجل T. في الحقيقة $TV_1 = V_1$ (لأن V_1 واقع على المستقيم L مسبقاً) و $TV_2 = 0$ (لأن V_2 متعامد مع المستقيم). في هذا الأساس، تكون المصفوفة قطرية ـ لأن V_1 و V_2 متجهان ذاتيان :

$$\beta = [T]_{\text{vtov}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

الشيء الآخر هو المصفوفة M التي تغير الأساس. من أجل ذلك نعبر عن V_1 بالتركيب $v_1 \cos\theta + v_2 \sin\theta$ ونضع معاملاته في العمود الأول. بصورة مشابهة V_2 (أو IV_2، التحويل هو التطابق) هو $-v_1 \sin\theta + v_2 \cos\theta$ وينتج العمود الثاني :

$$B = [T]_{V \text{ to } V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$



شكل (٥-٥). تغيير الأساس لجعل مصفوفة الإسقاط قطرية.

$$M = [I]_{\text{V to v}} = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}.$$

ينقل معكوس المصفوفة M^{-1} (الذي هو هنا المنقول) من v إلى V. إذا ركبت مع B و M فإنه يعطي مصفوفة الإسقاط التي كتبت في الأصل في البند (٢-٦):

$$A = MBM^{-1} = \begin{bmatrix} c^2 & cs \\ cs & s^2 \end{bmatrix}.$$

يمكننا تلخيص هذه النقطة. نفرض أننا أعطينا مصفوفة مثل A. طريقة تبسيطها-بالفعل، هو تقطيرها - هو إيجاد المتجهات الذاتية. إنها توضع في أعمدة M (أو S) فنحصل على مصفوفة قطرية $M^{-1}AM$. يقول الجبريون الأمر ذاته بلغة التحويل الخطي: طريقة إيجاد مصفوفة قطرية تمثل T هي اختيار *أساس مكون من متجهات ذاتية*. الأساس المعتاد v يؤدي إلى A التي ليست بسيطة؛ الأساس الملائم V يؤدي إلى B التي هي قطرية.

نؤكد من جديد أن تركيباً مثل $M^{-1}AM$ لا يظهر للوجود خلال حل $Ax=b$؛ العملية الأساسية هناك هي ضرب A (من اليسار، فقط) بمصفوفة تطرح مضاعف سطر من سطر آخر. إن مثل هذا التحويل يحافظ على الفضاء الصفري وعلى فضاء أسطر A الذي ليس له أي عمل على القيم الذاتية. بالمقابل، تبقي تحويلات التشابه القيم الذاتية ذاتها، التي تحسب، في الواقع، بمتتالية من التشابهات البسيطة. تتحول المصفوفة بالتدرج إلى مصفوفة مثلثية الشكل، وتظهر القيم الذاتية بالتدرج، أيضاً، على القطر الرئيسي. (لقد وصفت هذه المتتالية في الفصل السابع كما أن خطوة واحدة قد وُضحت في التمرين السابع أدناه). إن ذلك أفضل محاولة لحساب كثيرة الحدود $\det(A-\lambda I)$ التي جذورها هي القيم الذاتية. من أجل مصفوفة كبيرة، من المستحيل حسابياً حشد كل هذه المعلومات في كثيرة الحدود ومن ثم استخراجها من جديد.

الأشكال المثلثية بوساطة مصفوفة واحدية M

إن أول انتقال لنا بعد الحالة المعتادة $S=M$ هو خطوة صغيرة: عوضاً عن استخدام الحالة الأكثر عمومية M، نتجه في طريق آخر *ونقتصر على مصفوفة واحدية*. المسألة هنا هي أن نجد شكلاً مبسطاً بحيث يمكن إنجاز التركيب $M^{-1}AM$ تحت تأثير هذا القصر. يتطلب ذلك أن تكون أعمدة $U=M$ متعامدة نظامية (في الحالة الحقيقية، كتبنا $Q=M$). مالم تكن المتجهات الذاتية متعامدة، فمن المستحيل الحصول على مصفوفة قطرية؛ لكن نظرية شور *Schur* التمهيدية التالية تنتج شكلاً كثير الفائدة ـ على الأقل - من الناحية النظرية[١].

---

(١) سنكرس بقية هذا الباب لأمور نظرية أكثر منها عملية. إن شكل جوردان في ٥ ر مستقل عن الشكل المثلثي في ٥ ف.

٥ ص توجد لأي مصفوفة مربعة A، مصفوفة واحدية $U = M$ بحيث تكون $U^{-1}AU$ $T=$ مثلثية عليا. القيم الذاتية للمصفوفة A مشتركة مع المصفوفة المشابهة لها T وتظهر على قطرها الرئيسي.

البرهان لكل مصفوفة، مثل أية مصفوفة من النوع 4×4، قيمة ذاتية واحدة λ_1 على الأقل؛ في أسوأ الحالات، يمكنها أن تتكرر أربع مرات. لذا فان للمصفوفة A متجهاً ذاتياً واحداً x على الأقل. لنجعله نظامياً x_1، ولنضعه في العمود الأول للمصفوفة U. في هذه الحالة، يتعذر تعيين الأعمدة الثلاثة الباقية، لذا، نتمم المصفوفة بأي طريقة شرط أن تبقى واحدية ولنسمها U_1. (طريقة غرام شميدت تؤكد إمكانية ذلك). سيكون، على الأقل العمود الأول من الجداء $U_1^{-1}AU_1$ بالصورة الصحيحة: $Ax_1 = \lambda_1 x_1$ تعني أن:

$$U_1^{-1} A U_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{bmatrix} \quad \text{أو} \quad A U_1 = U_1 \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{bmatrix}.$$

في المرحلة الثانية، نتعامل مع المصفوفة ذات النوع 3×3 التي تقع الآن في القرنة الدنيا واليمنى. لهذه المصفوفة قيمة ذاتية λ_2 ومتجه ذاتي واحدي x_2، يمكن وضعه في العمود الأول في مصفوفة واحدية من النوع 3×3. فيكون:

$$U_2^{-1} (U_1^{-1} A U_1) U_2 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & * & * \\ 0 & \lambda_2 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad U_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & M_2 & \\ 0 & & & \end{bmatrix}.$$

أخيراً، كمرحلة أخيرة، نضع متجاً ذاتياً للمصفوفة ذات النوع 2×2 الواقعة في القرنة اليمنى والدنيا، في مصفوفة واحدية M_3 توضع في قرنة U_3 ويكون عندئذ:

$$U_3^{-1} (U_2^{-1} U_1^{-1} A U_1 U_2) U_3 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & * & * \\ 0 & \lambda_2 & * & * \\ 0 & 0 & \lambda_3 & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix} = T.$$

الجداء $U = U_1 U_2 U_3$ مصفوفة واحدية أيضاً ـ لقد تحقق ذلك بالتمرين ٥-٥-١٧ ـ وبذلك، نجد المصفوفة المثلثية المطلوبة $U^{-1}AU=T$.

بسبب كون هذا التمهيد يطبق على جميع المصفوفات، فان ذلك يجعلنا، في الغالب، نهمل فرضية كون A قابلة للتقطير . يمكننا استخدام ذلك لبرهان ***كون القوة A^k تتقرب من الصفر عندما تكون كل*** $|\lambda_i| < 1$ ***وتكون الدالة الأسية*** e^{At} متقاربة من الصفر عندما يكون كل $Re\,\lambda_i < 0$ ـ دون الحاجة إلى المجموعة الكاملة للمتجهات الذاتية التي فرضت نظرية الاستقرار وجودها في البندين (٥-٣) و (٥-٤) .

مثال :

للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ القيمة الذاتية $\lambda = 1$ (مزدوجة) .

أحد مستقيمات المتجهات الذاتية (بالفعل هو الوحيد) يمر من النقطة $(1,1)$. بعد التقسيم على $\sqrt{2}$ ، نصل إلى العمود الأول لـ U والعمود الثاني قائم عليه :

$$U^{-1}AU = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

تلك هي المصفوفة المثلثية T ، تقع قيمها الذاتية على القطر . من أجل مصفوفة أكبر، توجد الخطوة الأولى U_1ـ يتبعها ... ,U_2, U_3 ، جميعها مضروبة فيما بينها في U . ليس حساب T ، بصورة خاصة، مسلياً .

تقطير المصفوفات المتناظرة والمصفوفات الهرميتية

كتطبيق لهذا الشكل المثلثي، نريد أن نبين أن لكل مصفوفة متناظرة أو هرميتية ـ سواء أكانت قيمها الذاتية مختلفة أم لا ـ مجموعة كاملة من المتجهات الذاتية المتعامدة النظامية . نحتاج لمصفوفة واحدية U بحيث تكون $U^{-1}AU$ قطرية، ولقد أوجدها تمهيد شور في ٥ ق . هناك خطوتان للانتقال من المثلثية الى القطرية :

(١) إذا كانت A هرميتية فان $U^{-1}AU$ هرميتية أيضاً:

$$(U^{-1}AU)^H = U^H A^H (U^{-1})^H = U^{-1}AU.$$

(٢) إذا كانت مصفوفة متناظرة أو هرميتية وكانت أيضاً مثلثية، فانها تكون قطرية. بما أن $T = U^{-1}AU$ هرميتية مثلثية معاً فإنها، بصورة آلية، قطرية. وهذا ما ينهي برهان نظرية أساسية في الجبر الخطي:

٥ ق *(نظرية الطيف)* يمكن تقطير أي مصفوفة متناظرة وحقيقية بمصفوفة قائمة، ويمكن تقطير أي مصفوفة هرميتية بمصفوفة واحدية:

(الحالة الحقيقية) $Q^{-1}AQ = \Lambda$ (الحالة المركبة) $U^{-1}AU = \Lambda$

أعمدة Q (أو U) تحوى مجموعة كاملة من المتجهات الذاتية المتعامدة النظامية.

ملاحظة ١ إذا كانت A حقيقية ومتناظرة، فان قيمها الذاتية ومتجهاتها الذاتية حقيقية في كل خطوة من خطوات ٥ ف. ينتج ذلك مصفوفة حقيقية واحدية U ـ بقول آخر ينتج Q.

ملاحظة ٢ من المؤكد أن للمصفوفات المتناظرة مجموعة كاملة من المتجهات الذاتية المتعامدة، ولو كانت بعض قيمها الذاتية مكررة. يمكننا أن نعتبر A نهاية لمصفوفة متناظرة ذات قيم ذاتية مختلفة، وعندما تتقرب من النهاية، فإن متجهاتها الذاتية، في النهاية، تبقى متعامدة. بالمقابل، للمصفوفة غير المتناظرة:

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & \cos\theta \\ 0 & \sin\theta \end{bmatrix}$$

المتجهان الذاتيان $(1,0)$ و $(\cos\theta, \sin\theta)$. عندما $\theta \longrightarrow 0$، يتقرب المتجه الذاتي الثاني من الأول ـ الذي هو المتجه الذاتي الوحيد للمصفوفة غير القابلة للتقطير $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

مثال لقد برهنت الآن نظرية الطيف بالنسبة لمصفوفة متناظرة مثل:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

التي لها قيمة ذاتية مكررة $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$. أحد اختيارات المتجهات الذاتية :

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, \quad x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}.$$

إن هذه المتجات أعمدة مصفوفة قائمة Q وتصبح $A = Q\Lambda Q^{-1} = Q\Lambda Q^T$:

$$A = \sum \lambda_i x_i x_i^{\mathrm{T}} = \lambda_1\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} + \lambda_2\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} + \lambda_3\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

لما كان $\lambda_2 = \lambda_1$ فان تركيب الإسقاطين الأولين (كل منها من المرتبة الأولى) يعطي إسقاطاً P_1 من المرتبة الثانية ، وتكون A :

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \lambda_1 P_1 + \lambda_3\ P_3 = (+1)\ y\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

هنا يوجد مستو كامل من المتجهات الذاتية التي تقابل $\lambda = 1$ ؛ المتجهان x_1, x_2 قد اختبرا بصورة اعتباطية تقريباً . لذلك ، فإن المقدارين المتمايزين $x_1 x_1^T$, $x_2 x_2^T$ اعتباطيان أيضاً ، وليس سوى مجموعهما ـ إسقاط P على المستوي الكامل ـ هو الذي عين بصورة وحيدة . ***لكل مصفوفة هرميتية ذات k من القيم الذاتية المختلفة «تحليلها الطيفي» الخاص وفق*** $A = \lambda_1 P_1 + ... + \lambda_k P_k$ ، ***حيث P_i إسقاط على الفضاء الذاتي المتعلق بـ*** λ_i .
لما كان هناك مجموعة كاملة من المتجهات الذاتية ، فان مجموع الإسقاطات يساوي المطابقة . ولما كانت الفضاءات الذاتية متعامدة ، فإن جداء كل أثنتين من هذه الإسقاطات يساوي الصفر $P_j P_i = 0$.

أصبحنا الآن قريبين جداً من الإجابة عن سؤال طبيعي ومهم وقادرين ، أيضاً ،

على متابعة الطريق حتى نهايته. ما هي المصفوفات التي تكون فيها المصفوفة المثلثية T هي المصفوفة القطرية Λ ذاتها ؟ لقد وضعت المصفوفات الهرميتية والمصفوفات الهرميتية التخالفية والواحدية، سابقاً، في هذا الصنف؛ إنها تقابل على الترتيب أعداداً من المحور الحقيقي، أعداداً تخيلية بحته، ودائرة الوحدة. نريد الآن الصنف الكامل وهو الذي يقابل مجموعة الأعداد المركبة كاملة. تدعى هذه المصفوفات نظامية.

٥ ر نقول عن مصفوفة N إنها مصفوفة ***نظامية***، إذا كانت تبادلية مع N^H: $NN^H=N^HN$ في هذه المصفوفات دون غيرها، تكون المصفوفة المثلثية $T=U^{-1}NU$ هي المصفوفة القطرية Λ. المصفوفات النظامية هي، بالضبط، تلك المصفوفات التي لها ***مجموعة كاملة من المتجهات الذاتية المتعامدة النظامية***.

نلاحظ أن المصفوفات الهرميتية (أو المتناظرة) هي مصفوفات نظامية حتماً: إذا كان $A=A^H$ فإن كلا من A^HA و AA^H يساوي A^2. المصفوفة الواحدية نظامية، أيضاً: كل من U^HU و UU^H يساوي الوحدة. في هذه الحالات الخاصة، نكون قد برهنا أن $T=\Lambda$ بمرحلتين وتستخدم هاتان المرحلتان بالذات مصفوفة نظامية:

(١) إذا كانت N نظامية فان $T=U^{-1}NU$ نظامية لأي أيضاً:

$$TT^{\mathrm{H}}=U^{-1}NUU^{\mathrm{H}}N^{\mathrm{H}}U=U^{-1}NN^{\mathrm{H}}U=U^{-1}N^{\mathrm{H}}NU=U^{\mathrm{H}}N^{\mathrm{H}}UU^{-1}NU=T^{\mathrm{H}}T.$$

(٢) إذا كانت مصفوفة مثلثية T نظامية، فإنه يجب أن تكون مصفوفة قطرية (التمرينان ٥-٦-١٩ إلى ٢٠).

وهكذا نجد أنه إذا كانت N نظامية فان المصفوفة المثلثية $U^{-1}NU$ مصفوفة قطرية ولما كان لها القيم الذاتية لـ N نفسها فانها تكون المصفوفة Λ بالذات. المتجهات الذاتية للمصفوفة N هي أعمدة U وهي متعامدة نظامية. هذه هي الحالة الجيدة ولننتقل الآن الى الحالة العامة ـ من أفضل المصفوفات الممكنة الى الأسوأ الممكن.

صيغة جوردان

لقد عملنا حتى الآن، في هذا البند، أفضل مانقدر عليه باستخدام المصفوفة

الواحدية في التشابه؛ باشتراطنا كون M مصفوفة واحدية، توصلنا بالمصفوفة $M^{-1}AM$ إلى شكل مثلثي T. سنرفع الآن هذا القيد عن المصفوفة M. ستكون أي مصفوفة مقبولة، وسيكون هدفنا جعل المصفوفة $M^{-1}AM$ *أقرب مايمكن من القطرية*.

ستكون نتيجة هذا الجهد الكبير في التقطير الحصول على صيغة جوردان J. في الحالة التي يكون فيها للمصفوفة A مجموعة كاملة من المتجهات الذاتية المستقلة، نأخذ $M=S$ ونصل إلى $J=S^{-1}AS=\Lambda$؛ تتحد، في هذه الحالة، صيغة جوردان مع المصفوفة القطرية Λ. إن هذا الأمر متعذر لمصفوفة معيبة، وستحوي صيغة جوردان، من أجل كل متجه ذاتي مفقود، العدد واحد فوق قطرها الرئيسي مباشرة. تظهر القيم الذاتية على القطر الرئيسي لأن J مثلثية. يمكن لقيمتين ذاتيتين مختلفتين أن تنفصلا دائماً. القيمة الذاتية المكررة λ، فقط، هي التي تتطلب (أو لاتتطلب) عنصراً غير قطري في J.

٥ ش إذا كان للمصفوفة A متجهات ذاتية مستقلة، فإنها تكون مشابهة لمصفوفة ذات s كتلة:

$$J=M^{-1}AM=\begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & J_s \end{bmatrix}.$$

كل كتلة J_i من كتل جوردان مصفوفة مثلثية بقيمة ذاتية فريدة λ_i ومتجه ذاتي واحد:

$$J_i=\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}.$$

عندما تكون الكتلة من مرتبة $m > 1$ ، فان القيمة الذاتية λ_i تتكرّر m مرّة ويوجد $m-1$ من الوحدان فوق القطر. يمكن للقيمة الذاتية λ_i ، نفسها أن تظهر في كتل متعدّدة، إذا كانت تقابل متّجهات ذاتية متعدّدة ومستقلّة. تكون مصفوفتان متشابهتين إذا اشتركتا بصيغة جوردان.

يضع كثير من المؤلّفين هذه النظرية في ذروة مقرّرهم في الجبر الخطّي. بصراحة، إنّني أعتبر ذلك خطأ. من المؤكّد أنّه لا يمكن تقطير كل مصفوفة، وتُعد صيغة جوردان هي الحالة الأكثر عمومية؛ ولكن، بسبب ذلك، سيكون إنشاء ها تقنيّاً وغير مستقر. (أي تغيير طفيف في A قادر على إعادة المتّجهات الذاتية المفقودة وتغيير أمكنة الوحدان الموجودة خارج القطر).

لذا، كان أفضل موضع للتفصيلات هو الملحق [(١)] ، والطريقة المفضّلة للانطلاق بصيغة جوردان، هي النظر في أمثلة خاصّة سهلة الحل.

مثال ١ :

تؤدي كل من $T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ إلى $J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

لهذه المصفوفات الأربعة القيمتان الذاتيتان (١) و (١) مع متّجه *ذاتي وحيد* ـ لذا، فإن J مكوّنة من *كتلة واحدة*. لنحقّق الآن ذلك. المحدّدة تساوي الواحد والأثر (مجموع عناصر القطر الأساسي) هو (٢). تحقّق القيمتان الذاتيتان $1.1=1$, $1+1=2$. من أجل J ، B , A ، التي هي مصفوفات مثلّثية، تقع القيم الذاتية على القطر. نريد أن نبيّن أن هذه مصفوفات متشابهة ـ إنّها واقعة في الجماعة ذاتها ـ و J هي صيغة جوردان لهذه الجماعة.

---

(١) كل مؤلف يحاول جعل هذه التفصيلات سهلة المتابعة وأعتقد أن برهان فيليبوف ***Filippov*** هو الأفضل. إنه سهل بصورة كافية ليجعلنا نعكس قرارنا وننقل إنشاء J من الملحق.

الانتقال من T الى J ، هو تغيير الاثنين بواحد ويمكن لمصفوفة قطرية M أن تفعل ذلك :

$$M^{-1}TM = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = J.$$

من A إلى J ، العمل هو جعل المصفوفة مثلّثية ومن ثمّ تغيير ٢ بـ ١ :

$$U^{-1}AU = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = T \quad \text{يؤدي إلى} \quad M^{-1}TM = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = J$$

لقد كانت $U^{-1}AU$ مثال تمهيد شور (٥ ف أعلاه)؛ جداء Uفي M يعطي J.

من B إلى J ، العمل هو نقل ومبادلة يعطيان :

$$P^{-1}BP = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = J.$$

مثال ٢

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

لّما كان الصفر قيمة ذاتية مكرّرة ثلاث مرّات لكل من هاتين المصفوفتين ، فإنّها ستظهر في كل كتلة من كتل جوردان ، سواء وجدت كتلة واحدة من النوع 3×3 أو واحدة من النوع 2×2 وواحدة من النوع 1×1 أو ثلاثة من النوع 1×1 . لذا فإن الأشكال الممكنة لصيغة جوردان هي :

$$J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{و} \quad J_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

في حالة المصفوفة A ، سيكون المتّجه الذاتي الوحيد هو (1,0,0) . لذا فان صيغة جوردان ستكون ذات كتلة واحدة، واستناداً الى النظرية الأساسية (٥ ش)، ستكون Aمشابهة للمصفوفة J_1. للمصفوفة B متّجه ذاتي آخر هو (0,1,0)، لذا، فإن صيغة جوردان هي J_2. توجد كتلتان على طول القطر. أمّا فيما يتعلّق بالمصفوفة J_3، فانّها تقع في صنف خاص بها؛ ستكون $M^{-1}0M = 0$ وهي المصفوفة الوحيدة المشابهة لصفر المصفوفات.

في هذين المثالين، يكفي تعداد المتّجهات الذاتية لتعيين المصفوفة J- وإن ذلك ممكن دوماً إذا لم يكن هناك تعقيدات تزيد على ثلاثيّة القيمة الذاتية. ولكن، سيظهر كون تقنية التعداد قاعدة عامّة في التمرين الأخير.

تطبيقات على معادلات الفروق والمعادلات التفاضلية (القوى والدوّال الأسّية).

إذا أمكن تقطير A ، فان قوى $A = S\Lambda S^{-1}$ سهلة: $A^k = S\Lambda^k S^{-1}$. إذا لم يكن من الممكن تقطيرها، فسيبقى لدينا $A = MJM^{-1}$ ، بصيغة جوردان في الوسط- نحتاج الآن الى قوى J :

$$A^k = (MJM^{-1})(MJM^{-1}) \dots (MJM^{-1}) = MJ^k M^{-1}.$$

J كتلة قطرية ويمكن أخذ قوى هذه الكتل بصورة منفصلة:

$$J_i^n = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & n(n-1)\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{bmatrix}.$$

يمكن أن يدخل ذلك في حل معادلة فرق، إذا كان هناك قيمة ذاتية ثلاثية ومتّجه ذاتي فريد. إنّها تؤدّي، أيضاً، الى حل المعادلة التفاضلية المقابلة:

$$e^{j_i t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{1}{2}t^2e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}.$$

يأتي ذلك من جمع المتسلسلة $I + J_i t + (J_i t)^2/2! + ...$ الذي ينتج $1+\lambda t+...=e^{\lambda t}$ على القطر و $t\,e^{\lambda t}$ مباشرة فوق تلك.

مثال يظهر العمود الثالث من $e^{j_i t}$ في حل المعادلة $du/dt = j_i u$:
تنطلق

$$u_o = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{من} \quad \begin{bmatrix} du_1/dt \\ du_2/dt \\ du_3/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

يحل النظام بالتعويض - التراجعي (لأن المصفوفة مثلّثية). تؤدّي المعادلة الأخيرة الى $U_3=e^{\lambda t}$. معادلة u_2 هي $du_2/dt = \lambda u_2 + u_3$، وإن حلّها هو $t\,e^{\lambda t}$. المعادلة الأخيرة $du_1/dt = \lambda u_1 + u_2$ وحلّها هو $\frac{1}{2}t^2e^{\lambda t}$. من أجل كتلة من حجم m ـ من قيمة ذاتية مضاعفتها m ومتّجه ذاتي واحد فقط ـ يظهر العامل الاضافي t, m -1 مرّة.

هذه القوى والقوى الأسّية لـ j هي جزء من قانون الحل. الجزء الآخر هو المصفوفة M التي تربط المصفوفة الأصلية A بأكثر المصفوفات J موافقة:

إذا كان $u_{k+1} = Au_k$ فإن $u_k = A^k u_o = MJ^kM^{-1}u_o$

إذا كان $du/dt = Au$ فإن $u = e^{At}u_o = Me^{Jt}M^{-1}u_o$

عندما تكون M و J هما S و ٨ (الحالة القابلة للتقطير) سيكون هذان القانونان هما قانوني البندين (٥-٣)، (٥-٤). يتعرض الملحق (ب) الى المصفوفات غير القابلة للتقطير ويبيّن لماذا يمكن لصيغة جوردان أن تتمدد.

آمل أن تكون القائمة التالية تلخيصاً ملائماً.

جدول تحويل التشابه

١ - A قابلة للتقطير : أعمدة S هي متّجهات A الذاتية ، و $S^{-1}A\,S = \Lambda$ مصفوفة قطرية .

٢ - A اختيارية : أعمدة M متّجهات A الذاتية ومتّجهاتها الذاتية المعمّمة وتكون صيغة جوردان هنا $M^{-1}A\,M = J$ *قطرية بالكتل .*

٣ - A اختيارية و U واحدية : يمكن اختيار U بحيث تكون $U^{-1}AU = T$ مثلّثية .

٤ - A نظامية ، $AA^H = A^HA$: يمكن اختيار U بحيث يكون $U^{-1}A\,U = \Lambda$.

حالات خاصّة من (٤) ، جميعها ذوات متّجهات ذاتية متعامدة نظامية :

ا - إذا كانت A هرميتية فان Λ حقيقية .

أ - إذا كانت A حقيقية متناظرة فإن Λ حقيقية وإن $Q = U$ قائمة .

ب - إذا كانت A هرميتية - تخالفية فان Λ تخيّلية .

جـ - إذا كانت A قائمة أو واحدية فان $|\lambda_i| = 1$.

تمـــاريـــن

٥-٦-١ إذا كانت B مشابهة A وكانت C مشابهة B، برهن أن C مشابهة A. (افرض $C = N^{-1}BN$ و $B = M^{-1}AM$) . ماهي المصفوفات المشابهة لمصفوفة الوحدة؟

٥-٦-٢ صف بالكلام كل المصفوفات المشابهة لـ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ وعيّن اثنتين منها .

٥-٦-٣ فسّر لماذا لا تكون A أبداً مشابهة لـ $A + I$.

٥-٦-٤ أوجد مصفوفة قطرية M مركّبة من (١) و (-١) لبرهان أن :

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & -1 & 2 & -1 \\ & & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{مشابهة لـ} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ 1 & 2 & 1 & \\ & 1 & 2 & 1 \\ & & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

٥-٦-٥ برهن أنّه إذا كانت B قابلة للعكس فان BA مشابهة لـ AB .

٥-٦-٦ (أ) إذا كان $CD = DC$ ، (وكانت D قابلة للعكس) برهن أن C مشابهة لـ $-C$.

(ب) استنتج أن القيم الذاتية لـ C تظهر أزواجاً بالاشارتين + أو − .

(جـ) برهن مباشرة أنّه إذا كان $Cx = \lambda x$ فان $C(Dx) = -\lambda(Dx)$.

٥-٦-٧ لتكن A مصفوفة ما و M «دوراناً خاصّاً للمستوي» :

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

اختر زاوية الدوران θ بحيث ينعدم العنصر $(3,1)$ في $M^{-1}AM$.

تنبيه : ليس من السهل متابعة هذه الابادة لأن الدوران الذي يحدث صفرين عوضاً عن h, d يمكن أن يغيّر الصفر الواقع في القرنة . علينا أن نُبقي قطرا واحداً تحت القطر الرئيسي وننهي حساب القيم الذاتية بطرق مختلفة . وإلاّ ، إذا تمكنّا من جعل A قطرية ورأينا قيمها الذاتية ، فسوف نجد جذور كثيرة الحدود $\det(A - \lambda I)$ باستخدام الجذر التربيعي ، فقط ، الذي يعين $\cos\theta$ ، ولكن ذلك مستحيل .

٥-٦-٨ ما هي المصفوفة M التي تغيّر الأساس $V_1=(1,1)$, $V_2=(1,4)$ الى الأساس $v_1 = (2,5)$, $v_2 = (1,4)$ ؟ أعمدة M تنتج عن التعبير عن V_1 و V_2 كتركيبين في v .

٥-٦-٩ بالنسبة للأساسين السابقين ، عبّر عن المتّجه $(3,9)$ كتركيب من الصورة $c_1V_1+c_2V_2$ أو $d_1v_1+d_2v_2$. حقّق حسابياً أن M تربط c بـ d : $Mc = d$

٥-٦-١٠ أكّد التمرين الأخير جبريّاً : إذا كان :

$V_1 = m_{11}v_1 + m_{21}v_2$ و $V_2 = m_{12}v_1 + m_{22}v_2$ و $m_{11}c_1 + m_{12}c_2 = d_1$ و
$m_{21}c_1 + m_{22}c_2 = d_2$ ، فان المتجهين $c_1V_1 + c_2V_2$ و $d_1v_1 + d_2v_2$
متطابقان . إن ذلك هو «قانون تغيير الأساس» $Mc = d$.

٥-٦-١١ إذا كان التحويل T هو الانعكاس على المستقيم الذي يصنع ٤٥° مع محور x، أوجد مصفوفة هذا التحويل بالنسبة للأساس المعتاد $v_1 =$ $(1,0)$ $v_2 = (0,1)$, وأيضاً، بالنسبة للأساس $V_1=(1,1)$, $V_2=(1,-1)$. برهن أن هاتين المصفوفتين متشابهتان .

٥-٦-١٢ التحويل المطابق يطبّق كل متّجه على نفسه : $Tx = x$: أوجد المصفوفة المقابلة لهذا التحويل، إذا كان الأساس الاول $v_1 = (1,2)$, $v_2 = (3,4)$ والأساس الثاني هو $w_1 = (1,0)$, $w_2 = (0,1)$. (ليست هي مصفوفة الوحدة !) .

٥-٦-١٣ مشتقّة $a + bx + cx^2$ هي $b + 2cx + 0x^2$.

(أ) اكتب مصفوفة D من النوع 3×3 بحيث يكون :

$$D = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 2c \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(ب) احسب D^3 وفسّر الناتج بدلالة المشتقّات .

(جـ) ما هي القيم الذاتية والمتّجهات الذاتية للمصفوفة D؟

٥-٦-١٤ برهن أنّه ليس للتحويل $Tf(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ قيم ذاتية، بينما يصلح كل عدد قيمة ذاتية للتحويل $Tf(x) = df/dx$. الدالّة معرّفة لكل قيمة لـ x .

٥-٦-١٥ في فضاء المصفوفات من النوع 2×2 ، نفرض أن T هو التحويل الذي ينقل كل مصفوفة ، أوجد القيم الذاتية و«المصفوفات الذاتية» لـ T(المصفوفات التي تحقّق $A^T=\lambda A$) .

٥-٦-١٦ (أ) أوجد مصفوفة قائمة Q حيث $Q^{-1}AQ = \Lambda$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

ثمّ أوجد زوجاً آخر من المتّجهات الذاتية المتعامدة النظامية $x_1 x_2$ من أجل $\lambda= 0$.

(ب) حقّق أن $P =: x_1x_1^T + x_2x_2^T$ هي نفسها من أجل الزوجين .

٥-٦-١٧ برهن أن كل مصفوفة واحدية A قابلة للتقطير بمرحلتين :

(١) إذا كانت A واحدية وكانت U كذلك، فانّه يكون $T = U^{-1}AU$

(٢) كل مصفوفة مثلّثية عليا وواحدية، هي مصفوفة قطرية Λ .

ينتج عن ذلك أن المصفوفة المثلّثية Tهي Λ، وأن لأي مصفوفة واحدية(سواءً كانت قيمها الذاتية مختلفة أم لا) مجموعة كاملة من المتّجهاتالذاتية المتعامدة النظامية : $U^{-1}AU = \Lambda$. جميع القيم الذاتية تحقّق $|\lambda| = 1$.

٥-٦-١٨ أوجد مصفوفة نظامية ليست هرميتية ولا هرميتية تخالفية، ولا واحدية أو قطرية. برهن أن جميع مصفوفات المبادلة نظامية .

٥-٦-١٩ نفرض أن T مصفوفة مثلّثية عليا من النوع 3×3، عناصرها t_{ij} . قارن بين عناصر $T\,T^H$وعناصر T^HT، وبرهن أنّه إذا كانتا متساويتين فان Tقطرية .

٥-٦-٢٠ إذا كانت N نظامية، برهن أن $\| Nx \| = \| N^Hx \|$ لأي متّجه x .

استنتج أن للسطر i من N طول العمود i نفسه. **تنبيه**: إذا كانت N، أيضاً، مثلّثية عليا، فان ذلك يؤدّي من جديد لاستنتاج أن N يجب أن تكون قطرية.

٥-٦-٢١ برهن أن مصفوفة ذات متّجهات ذاتية متعامدة نظامية هي مصفوفة نظامية، كما أدعي في (٥ ر):
إذا كان $U^{-1}NU = \Lambda$ أو $N = U\Lambda U^H$ فإن $NN^H = N^HN$

٥-٦-٢٢ أوجد مصفوفة واحدية ومثلّثية T بحيث يكون $U^{-1}AU = T$ من أجل:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \quad و \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

٥-٦-٢٣ إذا كان للمصفوفة A القيم الذاتية $0,1,2$ فما هي القيم الذاتية لـ $A(A-I)(A-2I)$؟

٥-٦-٢٤ (أ) برهن، بضرب مباشر، أن مصفوفة مثلّثية، مثل 3×3، تحقّق معادلتها المميّزة: $(T-\lambda_1 I)(T-\lambda_2 I)(T-\lambda_3 I) = 0$.
(ب) بتعويض T بـ $U^{-1}AU$، استنتج ***نظرية كايلي - هاملتون: كل مصفوفة تُحقّق معادلتها المميّزة:***
$(A-\lambda_1 I)(A-\lambda_2 I)(A-\lambda_3 I) = 0$.

٥-٦-٢٥ كثيرة الحدود المميّزة للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ هي $\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc)$. بتعويض مباشر، حقّق نظرية كايلي - هاملتون $A^2 - (a+b)A + (ad-bc)I = 0$.

٥-٦-٢٦ في المثال (٢) الوارد في نهاية هذا الباب، أوجد M التي تنجز $M^{-1}BM = J$.

٥-٦-٢٧ إذا كان $a_{ij} = 1$ للعناصر الواقعة فوق القطر الرئيسي و $a_{ij} = 0$ في بقيّة

المواضع، أوجد صيغة جوردان (مثلاً 4×4) وذلك بايجاد جميع متّجهاتها الذاتية.

٥-٦-٢٨ برهن بطريقة التجربة والخطأ (بمصفوفة M) أنّه لا توجد صيغتان متشابهتان من صيغ جوردان في المثال ذي النوع 3×3: $J_1 \neq M^{-1} J_2 M$ و $J_1 \neq M^{-1} J_3 M$ و $J_2 \neq M^{-1} J_3 M$.

٥-٦-٢٩ حل المعادلة الأولى بالتعويض التراجعي والثانية بالوصول الى $A = MJM^{-1}$:

$$\frac{dv}{dt} = Av = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \ v_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \frac{du}{dt} = Ju = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \ u_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

٥-٦-٣٠ احسب J^{10} و A^{10} و e^A إذا كانت $A = MJM^{-1}$.

$$A = \begin{bmatrix} 14 & 9 \\ -16 & -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

٥-٦-٣١ اكتب جميع صيغ جوردان الممكنة لمصفوفة من النوع 4×4 لها الصفر قيمة ذاتية مضاعفة أربع مرّات (بالاتّفاق، الكتل تصغر عندما تتحرّك تحت المصفوفة J نحو الأدنى). إذا كان هناك متّجهان ذاتيان مستقلاّن فبرهن أنّه يوجد إمكانان مختلفان لـ J.

تمارين مراجعة

٥-١ أوجد القيم الذاتية والمتّجهات الذاتية والمصفوفة المقطّرة S لما يلي:

$$B = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -15 & -4 \end{bmatrix}, \quad \text{و} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

٥-٢ أوجد محدّدة A و A^{-1} إذا كان:

$$A = S \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} S^{-1}.$$

٥-٣ إذا كان للمصفوفة A القيمتان الذاتيتان 1,0 اللتان تقابلان المتّجهين الذاتيين:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

لماذا يمكن أن تقول مقدّماً إن A متناظرة؟ ما هو أثرها ومحدّدتها؟ ما هي A؟

٥-٤ في التمرين السابق، ما هي القيم الذاتية والمتّجهات الذاتية لـ A^2؟ ما هي العلاقة بين A و A^2؟

٥-٥ هل توجد مصفوفة A بحيث تكون الجماعة $A + cI$ كاملة قابلة للعكس بكل عدد مركّب c؟ أوجد مصفوفة حقيقية A بحيث تكون $A + rI$ قابلة للعكس لكل عدد حقيقي r.

٥-٦ حل من أجل القيمتين الابتدائيتين ثمّ أوجد e^{At}:

$$\frac{du}{dt} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} u \quad \text{إذا كان} \quad u_o = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{وإذا كان} \quad u_o = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

٥-٧ هل يمكنك أن تفضّل ربحاً مركّباً بمعدّل ٤٠٪ يحسب في أرباع السنة أو ٥٠٪ يحسب سنويّاً .

٥-٨ صح أو خطأ (مع مثال معاكس إذا كان خطأ) .

(أ) إذا نشأت A عن B بالمبادلة بين سطرين فان B مشابهة لـ A .

(ب) إذا كانت مصفوفة مثلّثية مشابهة لمصفوفة قطرية فانّها قطرية مسبقاً .

(جـ) تؤدّي كل اثنتين من هذه القضايا الى الثالثة : A هرميتية ، A واحدية ، $A^2 = I$.

(د) إذا كانت A و B قابلتين للتقطير فإن AB كذلك .

٥-٩ ماذا يحدث لمتتالية فيبوناتشي إذا رجعنا بالزمن ، وكيف يرتبط F_{-R} بـ F_k؟

يبقي القانون $F_{k+2}=F_{k+1}+F_k$ ساري المفعول ، لذا ، يكون $F_{-1} = 1$.

٥-١٠ أوجد الحل العام للمعادلة $du/dt = Au$ إذا كان :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

هل يمكنك أن تجد زمناً T يعود فيه الحل $u(T)$ الى القيمة الابتدائية u_0؟

٥-١١ إذا كانت P المصفوفة التي تسقط R^n على فضاء جزئي S ، فسّر لماذا يكون كل متّجه من S متّجهاً ذاتيّاً وكذلك كل متّجه من $S^{\perp}$. ما هي القيم الذاتية ؟ (لاحظ العلاقة $P^2=P$ التي تعني أن $\lambda = \lambda^2$) .

٥-١٢ برهن أن كل مصفوفة ، تزيد مرتبتها عن الواحد ، هي مجموع مصفوفتين شاذّتين .

٥-١٣ (أ) برهن أن للمعادلة التفاضلية المصفوفية $dX/dt = AX + XB$ الحل $X(t) = e^{At}X(0)e^{Bt}$.

(ب) برهن أن حل $dX/dt = AX - XA$ ، يحافظ على القيم الذاتية لكل زمن .

٥-١٤ إذا كانت القيمتان الذاتيتان هما 3,1 والمتّجهان الذاتيّان (5,2) , (2,1)، فأوجد حل كل من المعادلتين $du/dt = Au$, $u_{k+1} = Au_k$ منطلقاً من $u_0 = (9,4)$.

٥-١٥ أوجد القيم الذاتية والمتّجهات الذاتية للمصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 1 & i \\ 0 & -i & 0 \end{bmatrix}.$$

ما هي الخاصّة التي تتوقّعها للمتّجهات الذاتية وهل هي صحيحة ؟

٥-١٦ بتجربة حل :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = A$$

برهن أنّه ليس للمصفوفة A جذر تربيعي.غيّر عنصري القطر الرئيسي لـ A بـ 4 ، ثمّ أوجد الجذر التربيعي .

٥-١٧ (أ) أوجد القيم الذاتية والمتّجهات الذاتية للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$

(ب) حل $du/dt = Au$ منطلقاً من $u_0 = (100,100)$. (جـ) إذا كانت $v(t)$ = دخل سمسار البورصة (سوق الأوراق المالية) و $w(t)$ (= دخل الزبون، ويتساعدان فيما بينهما وفق النظام $dv/dt = 4w$ و $dw/dt = \frac{1}{4}v$ ، الى ما تسعى النسبة v/w عندما $t \longrightarrow \infty$؟

٥-١٨ صح أو خطأ مع السبب في حالة الصحّة ومثال معاكس في حالة الخطأ :

(أ) بأي مصفوفة A ، يوجد حل للمعادلة $du/dt = Au$ انطلاقاً من

$u_0=(1,...,1)$ (ب) يمكن تقطير أي مصفوفة قابلة للعكس .

(جـ) يمكن عكس أي مصفوفة قابلة للتقطير .

(د) المبادلة بين سطري مصفوفة من النوع 2×2 بعكس إشارتي قيمتيهما الذاتيتين .

(هـ) إذا قابل المتّجهان x , y قيمتين ذاتيتين مختلفتين فان $x^H y = 0$.

٥-١٩ إذا كانت K مصفوفة متناظرة - تخالفية برهن أن $Q=(I-K)(I+K)^{-1}$ مصفوفة قائمة . أوجد Q إذا كانت $K=\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$.

٥-٢٠ إذا كان $K^H=K$ (هرميتية - تخالفية) فإن القيم الذاتية تخيّلية والمتّجهات الذاتية متعامدة .

(أ) كيف يمكنك أن تعرف أن $K-I$ قابلة للعكس ؟

(ب) كيف يمكنك أن تعرف أن $K=U\Lambda U^H$ من أجل مصفوفة واحدية U؟

(جـ) لماذا $e^{\Lambda t}$ واحدية ؟

(د) لماذا e^{Kt} واحدية ؟

٥-٢١ إذا كانت M قطرية عناصرها d,d^2,d^3 ، فما هي المصفوفة $M^{-1}AM$ وما هي قيمها الذاتية إذا كان :

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ ؟}$$

٥-٢٢ إذا كانت $A^2=-I$ فما هي القيم الذاتية لـ A ؟ إذا كانت A حقيقية ومن النوع $n\times n$، برهن أنّه من الضروري أن تكون n شفعاً، أعط مثالاً .

٥-٢٣ إذا كان $Ax=\lambda_1 x$ و $A^T y=\lambda_2 y$ (كل شيء حقيقي) برهن أن $x^T y = 0$

٥-٢٤ شكل مختلف لمصفوفة فوريه هو «مصفوفة الجيب»

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sin\theta & \sin 2\theta & \sin 3\theta \\ \sin 2\theta & \sin 4\theta & \sin 6\theta \\ \sin 3\theta & \sin 6\theta & \sin 9\theta \end{bmatrix}$$ بـ $6 = \frac{\pi}{4}$ ،

تحقّق من أن $S^T = S^{-1}$ (الأعمدة هي المتّجهات الذاتية لمصفوفة ثلاثية الأقطار -1,2,-1).

٥-٢٥ (أ) أوجد مصفوفة غير صفرية N بحيث يكون $N^3 = 0$.

(ب) إذا كان $Nx = \Lambda x$، برهن أنّه يلزم أن تكون $\lambda = 0$.

(جـ) برهن أن N (تسمّى مصفوفة «معدومة» القوى) ولا يمكن أن تكون متناظرة.

٥-٢٦ (أ) أوجد المصفوفة $P = a\,a^T/a^T a$ التي تسقط أي متّجه على مستقيم مار من $a = (2,1,2)$ (ومن نقطة الأصل).

(ب) ما هي القيمة الذاتية الوحيدة غير الصفرية لـ P وما هو المتّجه الذاتي المقابل ؟

(جـ) حل $u_{k+1} = Pu_k$ منطلقاً من $u_0 = (9,9,0)$.

٥-٢٧ نفرض أن السطر الأوّل من A هو(7,6) وأن قيمتيهما الذاتيتان i ,$-i$. أوجد A

٥-٢٨ (أ) من أجل أي قيمتين لـ c , d يكون للمصفوفة A قيم ذاتية حقيقية ومتّجهات ذاتية متعامدة ؟

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & d & c \\ 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

(ب) من أجل أي قيمتين لـ c, d يمكننا أن نجد ثلاثة متّجهات متعامدة

ـ نظامية وهي تراكيب للأعمدة. (لاتوجدها) ؟

٥-٢٩ إذا كان المتّجهان x_1 , x_2 عمودي S فما هي القيم الذاتية والمتّجهات الذاتية لما يلي:

$$A = S \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} S^{-1} \quad و \quad B = S \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} S^{-1} \text{ ؟}$$

٥-٣٠ ما هي نهاية $\begin{bmatrix} .4 & .3 \\ .6 & .7 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ (مصفوفة ماركوف في الحالة الثابتة) وذلك عندما $k \longrightarrow \infty$ ؟

الفصل السادس

المصفوفات المعرفة إيجابياً

٦ - ١ النهاية الصغرى والنهاية العظمى والنقط السرجية

حتى الآن، لم يكن لدينا أي مبرر للاهتمام بإشارة القيم الذاتية . في الحقيقة، سيكون قبل آوانه، السؤال عن اشارة λ قبل معرفة كونها حقيقية . لقد قرر الباب الخامس أن للمصفوفات الأكثر أهمية ـ المصفوفات المتناظرة في الحالة الحقيقية والمصفوفات الهرميتية في الحالة المركبة ـ قيماً ذاتية حقيقية . لذا سيكون عندئذ، مقبولاً أن نتساءل متى تكون هذه القيم موجبة وسيكون، عندها، أحد أهدافنا هو التالي : إيجاد معيار يمكن تطبيقه مباشرة على المصفوفة المتناظرة A ***يضمن لنا أن تكون جميع قيمها الذاتية موجبة***، وذلك دون ضرورة لحساب هذه القيم. يستدعي هذا المعيار ثلاثاً من أهم الأفكار الأساسية لهذا الكتاب وهي المحاور، المحددات والقيم الذاتية .

قبل النظر في مثل هذا المعيار، نريد عرض حالات جديدة يكون فيها لإشارة القيم الذاتية أهمية تذكر . إن ذلك مختلف، تماماً، عن مسألة الاستقرار في المعادلات التفاضلية حيث كنا بحاجة إلى قيم ذاتية سالبة أكثر من حاجتنا إلى الموجبة منها . (لم نكن بحاجة للعجلة في تجاوز هذه النقطة إلا أننا نريد ذلك : إذا اجتازت A المعيار الذي نبحث عنه بنجاح، فان للمعادلة $du / dt = Au$ حلاً متخامداً $e^{\lambda t}x$ لكل قيمة ذاتية $\lambda < 0$. ويكون للمعادلة $d^2u / dt^2 = Au$ حل تذبذبي خالص $e^{i\omega t}$ حيث $\omega = \sqrt{-\lambda}$. تظهر الحالة الجديدة في العديد من التطبيقات العلمية والهندسية وفي كل مسألة تفاؤلية، لذا نأمل من القارىء أن يكون مستعداً لأن يسلم جدلاً بهذه الخلفية وأن ينطلق مباشرة بالمسألة الرياضية .

المسألة التي ننظر فيها الآن هي تعيين **نهاية صغرى** وسنقدمها بمثالين :

$$F(x, y) = 7 + 2x + y)^2 - y \sin y - x^3$$

و

$$f(x, y) = 2x^2 + 4xy + y^2.$$

هل لكل من f أو F أو لإحداهما نهاية صغرى عند النقطة $x = y = 0$ ؟

ملاحظة ١ *ليس للقيمتين (من الرتبة صفر)* $f(0,0) = 0$ و $F(0,0) = 7$ أي تأثير على الجواب . إنهما يرفعان أو يخفضان بياني F و f .

ملاحظة ٢ يعطي *الجزء الخطي* من هاتين الدالتين شرطاً ضرورياً : لكي يكون هناك فرصة لنهاية صغرى عند نقطة الأصل، يجب أن تكون هذه النقطة نقطة توقف. على مشتقات المرتبة الأولى أن تنعدم عند $x = y = 0$. وهذا يعني :

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 4(x + y) - y \cos y - \sin y = 0 \quad و \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 4(x + y) - 3x^2 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4x + 2y = 0 \quad و \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 4x + 4y = 0$$

لذا، فإن نقطة الأصل نقطة توقف لكل من F, f . هندسيا، يمس السطح $z = F(x,y)$ المستوي الأفقي $z = 7$ كما يمس السطح $z = f(x,y)$ المستوي $z = 0$. المسألة هي ماإذا كان السطحان f و F واقعين فوق هذين المستويين عندما نتحرك عليهما مبتعدين عن نقطة التماس $x = y = 0$.

ملاحظة ٣ الحدود التربيعية، التي تنتج عنها مشتقات المرتبة الثانية، هي التي تعطي الرأي القاطع :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 4 - 6x = 4 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = 4 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\ \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\ \partial x} = 4$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 4 + y\ \sin\ y - 2\cos y = 2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$$

تحوي هذه المشتقات الجواب، وبما أنها، بالنسبة لـ F, f ، متطابقة، لذا، يجب أن تحوي الجواب ذاته لكل من هاتين الدالتين. تتصرف هاتان الدالتان بصورة واحدة بجوار نقطة الأصل، ***وإن للدالة F نهاية صغرى إذا وإذا فقط، كان للدالة f نهاية صغرى.***

ملاحظة ٤ *ليس لحدود الدرجات العليا في* F تأثير على مسألة النهاية الصغرى المحلية، إلا أنها قد تمنع هذه النهاية الضغرى من أن تكون شاملة. في مثالنا الأول سيدفع الحد $-x^3$، عاجلاً أو آجلاً، F نحو ـ ∞ ، بصرف النظر عن مايحصل في جوار $x = y = 0$. مثل هذا الاحتمال متعذر بالنسبة للدالة f أو لأي شكل تربيعي آخر لايحوي حدوداً من درجات عليا.

لكل شكل تربيعي $f = ax^2 + 2bxy + cy^2$ نقطة توقف في نقطة الأصل حيث $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ إذا كان لها نهاية صغرى محلية عند $x = y = 0$، فان هذه النقطة نهاية صغرى شاملة. يرسم السطح $f(x,y)$ بما يشبه الطاس، مستنداً على نقطة واحدة هي نقطة الأصل.

نلخص ماسبق: إن مسألة النهاية الصغرى المحلية للدالة F مكافئة لمسألة f ذاتها. إذا كانت نقطة توقف F عند $x = \alpha, y = \beta$ عوضاً عن $x = y = 0$ فإن التغير الوحيد الذي يطرأ على ماسبق هو استخدام مشتقات المرتبة الثانية عند α, β :

$$f(x, y) = \frac{x^2 \partial^2 F}{2\ \partial x^2}\ (\alpha, \beta) + xy\ \frac{\partial^2 F}{\partial x\ \partial y}\ (\alpha, \beta) + \frac{y^2}{2}\ \frac{\partial^2 F}{2\ \partial y^2}\ (\alpha, \beta). \qquad (١)$$

هذا الشكل التربيعي f يتصرف بجوار $(0,0)$ بالطريقة ذاتها التي تتصرف فيها الدالة F بجوار (α, β) .

هناك حالة تشذ عن ذلك، تقابل إمكان كون $F''=0$، وهي مشكلة كبيرة كما هو الحال في الدالة ذات المتغير الواحد. تستدعى مشتقات المرتبة الثالثة في مثل هذه المسألة لأن مشتقات المرتبة الثانية فشلت في اعطاء قرار محدد. لتحاشي هذه العقدة، من المعتاد اشتراط أن يكون الجزء التربيعي غير شاذ. من أجل نهاية صغرى حقيقية في نقطة الأصل، من المسلم به أن تنعدم f، فقط، في النقطة $x=y=0$. يدعى الشكل التربيعي الموجب، فعلاً، في بقية النقاط، **معرفاً إيجابياً**.

تصل المسألة الآن إلى مايلي: من أجل دالة في متغيرين x,y، ماهو البديل الصحيح عن الشرط $F''>0$؟ في دالة ذات متغير واحد، إشارة المشتقة الثانية كافية للتمييز بين نهاية صغرى ونهاية عظمى. لكن، هنا لدينا ثلاث مشتقات من المرتبة الثانية $F_{xx}, F_{xy}=F_{yx}, F_{yy}$. تعين هذه الأعداد الثلاثة الدالة f وهي تحدد متى يكون أو لايكون للدالة F (كذلك f) نهاية صغرى. ***ماهي الشروط المتعلقة بالمعاملات a,b,c التي تضمن كون $f=ax^2+2bxy+cy^2$ معرفاً إيجابياً*** ؟

من السهل إيجاد شرط ضروري:

(١) إذا كانت f معرفة إيجابياً، فمن الضروري أن يكون $a>0$.

يكفي أن ننظر في النقطة $x=1, y=0$ حيث يكون $ax^2+2xby+cy^2$ مساوياً a. على a أن يكون موجباً، إذا كان f معرفاً إيجابياً. لننتقل إلى F، إن ذلك يعني تماماً أن $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}>0$؛ نثبت $y=0$ ونترك x متحولاً بمفرده، فنجد أنه يجب أن تكون $F''>0$ لتكون هناك نهاية صغرى. وبصورة مشابهة، إذا ثبتنا $x=0$ وتركنا y متغيراً بمفرده، فإن ذلك يعطينا شرطاً متعلقاً بالمعامل c:

(٢) إذا كانت f معرفة إيجابياً فانه من الضروري أن يكون $c>0$.

هل يضمن الشرطان $a>0, c>0$ أن تكون f موجبة؟ الجواب لا ـ الحد المتصالب $2xy$ قادر على سحب f إلى ماتحت الصفر، إذا كان كبيراً بقدر كاف.

مثال $f=x^2-10xy+y^2$. في هذه الحالة $a=1, c=1$ وهما موجبان معاً. لنفرض أننا

اخترنا النقطة $x = y = 1$، فنجد $f(1,1) = -8$ لذا، فإن الدالة f غير معرفة إيجابياً. الشرطان $a > 0 , c > 0$ يؤكدان أن f متزايدة في اتجاهي x و y ولكنها قد تتناقص على طول خط آخر. هذه الدالة سالبة على المستقيم $x = y$ لأن $b = -10$ يطغى على a و c. من المستحيل اختبار التعريف الإيجابي بدراسة ذلك على طول أي عدد منته من المستقيمات الثابتة ـ يمكن لهذه الدالة f أن تزيد على الصفر وتنقص عنه كذلك.

من الواضح أن لـ b دخل في المسألة ولقد كانت في دالتنا الأصلية f موجبة. هل يكفي هذا لجعل f موجبة والتأكد من وجود نهاية صغرى؟ الجواب مرة أخرى لا؛ إن إشارة b ليست ذات أهمية في هذا الأمر. رغم أن جميع معاملات مثالنا الأصلي $2x^2 + 4xy + y^2$ موجبة، فانه ليس معرفاً إيجابياً ***وليس لأي من الدالتين f أو F نهاية صغرى***. نلاحظ، على المستقيم $x = -y$ أن f سالبة: $f(1,-1) = 2 - 4 + 1 = -1$.

إن كبر b، مقارنة بـ a,c، هو الذي يتحكم بكون f معرفة إيجابياً. نريد الآن أن نجد معياراً دقيقاً يعطي شرطاً لازماً وكافياً للتعريف الإيجابي. أبسط طريقة هي الاتمام إلى المربع الكامل:

$$f = ax^2 + 2bxy + cy^2 = a\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{a}\right)y^2. \qquad (٢)$$

الحد الأول من الطرف الأيمن غير سالب لأنه مربع كامل مضروب بالمعامل الموجب a. لايزال الشرط الضروري الأول محققاً. إلا أن المربع الكامل يمكن أن يكون صفراً، وحينئذ، يجب أن يكون الحد الثاني موجباً. هذا الحد هو y^2 مضروباً بالمعامل $(ac - b^2)/a$. الشرط الأخير كي يكون f موجباً هو أن يكون هذا المعامل موجباً:

(٣) *إذا كانت f موجبة فمن الضروري أن يكون* $ac > b^2$.

يلاحظ أنه إذا تحقق الشرطان (١) و (٣) معاً فان ذلك يؤدي إلى تحقق الشرط الثاني. إذا كان $ac > b^2$ و $a > 0$ فإن $c > 0$ حتماً. من المؤكد أن الطرف الأيمن من (٢) موجب ونكون أخيراً قد أجبنا عن السؤال.

٦ أ يكون الشكل التربيعي $f = ax^2 + bxy + cy^2$ معرفاً إيجابياً إذا وإذا فقط كان ac

إذا $x = y = 0$ عند (غير شاذة) نهاية صغرى F بالمقابل تكون للدالة. $a > 0$ و $- b^2 > 0$ وإذا فقط كان :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0, 0) > 0, \quad \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0, 0)\right]\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(0, 0)\right] > \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y}(0, 0)\right]^2.$$

شروط النهاية العظمى سهلة ، لأن f يكون في نهاية عظمى عندما يكون $-f$ في نهاية صغرى . إن ذلك يؤدي إلى قلب إشارات a,b,c. إن ذلك يبقى الشرط $ac - b^2 > 0$ قائماً : يكون الشكل التربيعي **معرفاً سلبياً** إذا وإذا فقط كان : $ac - b^2 > 0$ و $a < 0$. التغيير ذاته يطبق على F.

يكون الشكل التربيعي شاذاً عندما يكون $ac - b^2 = 0$؛ هذه الحالة لم نبحث بها حتى الآن . في هذه الحالة ، سيختفي الحد الثاني من (٢) ويبقى الحد التربيعي الأول فقط ـ إنه **شبه معرف إيجابياً** ، إذا كان $a > 0$ **وشبه معرف سلبياً** إذا كان $a < 0$. إن البادئة شبه تجيز إمكان مساواة f باالصفر كما يحصل عند النقطة $x = b , y = -a$. هندسياً، ينحط السطح $z = f(x,y)$ من شكل طاس حقيقي إلى قناة لانهائية الطول . (تشبه السطح $z = x^2$ في الفضاء ذي الأبعاد الثلاثة : تنمو هذه القناة فوق وتحت محور y وكل مقطع لها (مواز لمستوي zx) هو القطع المكافىء $z = x^2$ الواقع في هذا المقطع) . هناك شكل تربيعي أكثر شذوذاً وهو الذي يساوي الصفر دائماً، $a = b = c = 0$، هو ، بالوقت ذاته ، شبه معرف إيجابياً وشبه معرف سلبياً ويصبح الطاس مستوياً تماماً .

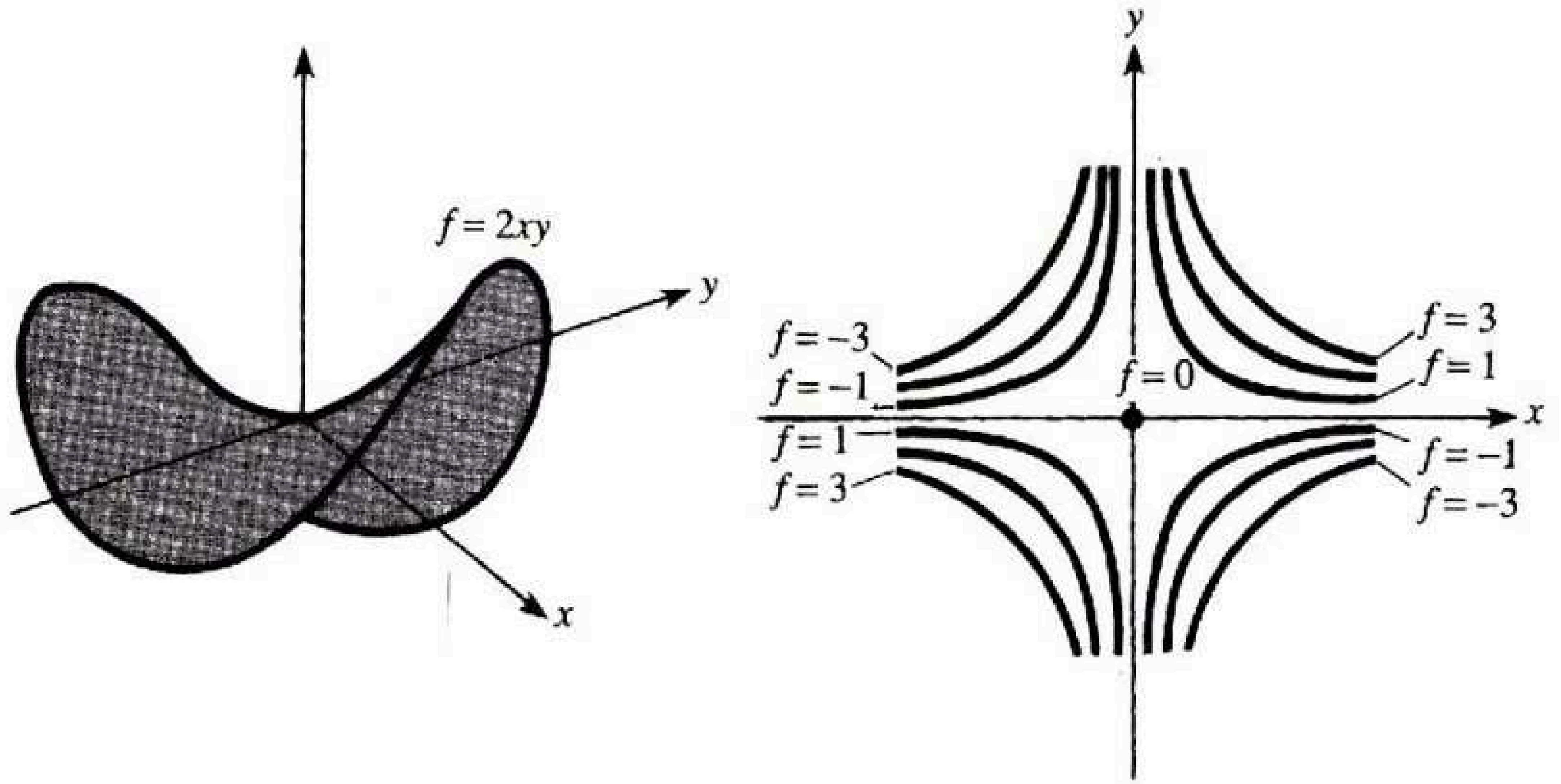
في حالة البعد الواحد ومن أجل دالة $F(x)$ ، يمكن معالجة الإمكانات المختلفة بصورة كاملة : إما أن توجد نهاية صغرى أو نهاية عظمى أو تكون $F'' = 0$. في حالة البعدين ، تبقى أمامنا حالة مهمة : *يمكن للتركيب* $ac - b^2$ *أن يكون سالباً* . لقد ظهر ذلك في مثالنا عندما كان كبر b مهيمناً على a و c : وكان f موجباً في بعض الاتجاهات وسالباً في اتجاهات أخرى . من المؤكد أن يحصل ذلك ، بصرف النظر عن b، إذا

كانت a و c من إشارتين مختلفتين، فإن اتجاهي x و y يعطيان نتيجتين متعاكستين، تكون f على أحدهما متزايدة وتكون متناقصة على الآخر. من المفيد أن ننظر في الحالتين الخاصتين:

$$f_2 = x^2 - y^2 \quad \text{و} \quad f_1 = 2xy$$

في الأولى، b مهيمنه حيث $a = c = 0$. في الثانية a و c من إشارتين مختلفتين. في كل من هاتين الدالتين، $ac - b^2 = -1$.

هاذان الشكلان التربيعيان **غير معرفين** لأنه يمكنهما أن يأخذا كلاً من الاشارتين؛ الحالتان $f>0$ و $f<0$ ممكنتان، بحسب قيم x و y. لذا، سيكون لدينا نقطة توقف وهي ليست نهاية عظمى ولانهاية صغرى. تدعى هذه النقطة ***نقطة سرجية***. (قد يكون ذلك لأن السطح $z = f(x,y)$، لنقل مثلاً، إن $z = x^2 - y^2$، يشبه سرج الحصان (شكل ٦-١)، يهبط إلى الأسفل باتجاه محور y في الجزء الملائم للفخذين ويصعد إلى الأعلى في اتجاه محور x). ربما تفضل أن تتصور ممراً جبلياً؛ أن أعلى نقطة في الممر هي نهاية صغرى إن أنت نظرت للجبال التي من حولك، ولكنها نهاية عظمى على طول الممر.



شكل (٦-١). السرج $f = 2xy$ وخطوط تسويته.

السرجان $x^2 - y^2$ ، $2xy$ متماثلان فعلاً، لأنه لو دورنا المحاور حول محور z دوراناً قدره ٤٥ فاننا ننتقل من أحدهما إلى الآخر، يكاد يكون من المستحيل رسمهما.

يكفي الحساب لإيجاد شرطي النهاية الصغرى : $F_{xx} > 0 , F_{xx}F_{yy} > F_{xy}^2$. لكن الجبر الخطي مستعد لفعل أكثر من ذلك عندما نعرف كيف نجعل معاملات f في مصفوفة متناظرة A. يقع معاملا الحدين ax^2 , cy^2 في القطر ويظهر معامل الحد المختلط $2bxy$ موزعاً بين العنصر الواقع فوق القطر والعنصر الواقع تحته، ويكون الشكل التربيعي مطابقاً، تماماً، للجداء المصفوفي :

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \qquad (٣)$$

هذه المتطابقة هي مفتاح هذا الفصل كاملاً. يمكن كتابتهما، أيضاً، بالصورة $f = x^TAx$ ؛ يمكن تعميمها مباشرة إلى حالة n بعداً؛ ستقدم هذه المطابقة طريقة مثالية ومختزلة لدراسة النهايتين العظمى والصغرى. عندما يكون هناك n من المتغيرات المستقلة $x_1,...,x_n$ عوضاً عن x و y، فان هذه المتغيرات توضع في متجه عمود x.

لكل مصفوفة متناظرة A ، يكون الجداء $f = x^TAx$ شكلاً تربيعياً خالصاً :

$$x^TAx = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{bmatrix}.$$

$$= a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_2x_1 + \dots a_{nn}x_n^2 \qquad (٤)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j.$$

ليس هناك حدود من درجات عليا أو دنيا ـ إنها حدود من الدرجة الثانية، فقط. الدالة تساوي الصفر عند $x = 0$ وكذلك مشتقاتها الأول. المماس مستو، و $x = 0$ هي نقطة توقف. وعلينا أن نقرر ما إذا كانت نهاية صغرى أو نهاية عظمى أو نقطة سرجية.

مثال ١ $f = 2x^2 + 4xy + y^2$ ، نقطة سرجية $\rightarrow$ $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

مثال ٢ $f = 2xy$ ، نقطة سرجية $\rightarrow$ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

مثال ٣ $f = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2$ تقابل :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \text{نهاية صغرى}$$

هذه الدوال جميعها تربيعية خالصة، إلا أن كل دالة $F(x_1,...,x_n)$ تعالج بالطريقة نفسها. إننا نبحث عن نقاط التوقف، حيث جميع المشتقات الأول أصفار. عند هذه النقاط، تكون A «مصفوفة مشتقات المرتبة الثانية» أو مايسمى بـ «مصفوفة هيسيان» (*Hessian*) عناصرها $a_{ij} = \frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_j}$. إنها بطبيعة الحال متناظرة للسبب نفسه الذي من أجله $\frac{\partial^2 F}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y}$. ***وحينئذ يكون للدالة F نهاية صغرى إذا كانت*** $f = x^TAx$ ***معرفة إيجابياً***. حدود المرتبة الثانية معزولة في f، وهي تتحكم في وضع F عند نقطة التوقف ـ كما تبين متسلسلة تيلور ذلك بالقرب من $x = 0$:

(٥) $F(x) = F(0) + x^T(\text{grad}F) + \frac{1}{2}x^TAx +$ حدود من المرتبة الثالثة

يكون عند نقطة التوقف $\left(\text{grad F} = \frac{\partial F}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_n}\right)$ متجهاً صفرياً. والصيغة التربيعية x^TAx تزيد من قيمة F أو تنقصها. إذا كانت نقطة التوقف عند x_0 بدلاً من الصفر فإن المتسلسلة تبدأ بـ $F(x_0)$ وتتغير x فتصبح $x - x_0$ على الطرف الأيمن من (٥).

سيتضمن البند التالي معايير لتقرير ما إذا كان $f = x^TAx$ موجباً. وهذا يكافىء قرار ما إذا كانت A معرفة إيجابياً، وهذا هو الهدف الرئيسي من هذا الباب.

تمــاريــن

٦-١-١ برهن أن للشكل التربيعي $f = x^2 + 4xy + 2y^2$ نقطة سرجية في نقطة الأصل، رغم أن معاملاته موجبة. بين كيف يمكن كتابة f من جديد على شكل فرق بين مربعين كاملين.

٦-١-٢ قرر ما إذا كانت المصفوفات التالية معرفة إيجابياً واكتب من أجل كل منها الدالة $f = x^T A x$ الموافقة:

(أ) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ (جـ) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -8 \end{bmatrix}$

محددة (ب) تساوي الصفر؛ على أي مستقيم تبقى الدالة f مطابقة للصفر؟

٦-١-٣ إذا كانت A مصفوفة متناظرة من النوع 2×2 تحقق من أن $a > 0$ و $ac > b^2$، حل المعادلة $det = (A - \lambda I) = 0$ وبين أن جذورها موجبة.

٦-١-٤ ميز بين نهاية صغرى أو نهاية عظمى أو نقطة سرجية للدوال:

(أ) $F = -1 + 4(e^x - x) - 5x \sin y + 6y^2$، عند النقطة $x = y = 0$.

(ب) $F = (x^2 - 2x) \cos y$ عند نقطة التوقف $x = 1 , y = \pi$.

٦-١-٥ (أ) من أجل أي الأعداد b تكون المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & b \\ b & 9 \end{bmatrix}$ معرفة إيجابياً؟

(ب) أوجد التحليل $A = LDL^T$ عندما تكون b في مدى التعريف الإيجابي.

(جـ) أوجد القيمة الصغرى للدالة $\frac{1}{2}(x^2 + 2bxy + 9y^2) - y$ حينما تكون b في هذا المدى.

(د) ماهي النهاية الصغرى في حالة $b = 3$؟

٦-١-٦ نفرض أن المعاملين الموجبين a , c يهيمنان على b بمعنى أن $a + c > 2b$.

هل يكفي ذلك لضمان أن $ac > b^2$ وأن المصفوفة معرفة إيجابياً ؟ اعط برهاناً لذلك أو مثالاً مضاداً .

٦-١-٧ (أ) أي المصفوفات من النوع 3×3 تقابل :

$$f_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

$$f_2 = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3 \quad \text{و}$$

(ب) بين أن f_1 مربع كامل وحيد وليس معرفاً إيجابياً . متى يكون f_1 مساوياً الصفر ؟

(جـ) عبر عن f_2 كمجموع لمربعات ثلاثة وحلل مصفوفته A على النحو LDL^T.

٦-١-٨ إذا كانت $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ معرفة إيجابياً، فبرهن أن A^{-1} معرفة إيجابياً .

٦-١-٩ الدالة التربيعية $f = 3(x_1 + 2x_2)^2 + 4x_2^2$ موجبة ، أوجد مصفوفتها ثم حللها إلى LDL^T، وأوجد العلاقة بين العنصرين D و L والدالة الأصلية f.

٦-١-١٠ إذا كانت $R = \begin{bmatrix} p & s \\ s & t \end{bmatrix}$ فاكتب R^2 وتأكد من أنها معرفة إيجابياً ما لم تكن R شاذة .

٦-١-١١ إذا كانت $A = \begin{bmatrix} a & b \\ \bar{b} & c \end{bmatrix}$ هرميتية (بعدد مركب b) فأوجد محاورها ومحددتها .

(ب) أتمم الطرف الأيمن المركب لتصبح المساواة صحيحة :

$$f = x^{\mathrm{H}}Ax = a\ |x_1|^2 + 2\mathrm{Re}b\ \overline{x_1}\ x_2 + c\,|x_2|^2 = a\left|x_1 + (\frac{b}{a})x_2\right|^2$$

(جـ) ماهي المعايير التي تقرر كون $f > 0$ لضمان أن تكون A معرفة إيجابياً ؟

(د) هل المصفوفتان التاليتان معرفتان إيجابياً ؟

$$\begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 3 & 4+i \\ 4-i & 6 \end{bmatrix}$$

٦-١-١٢ قرر ما إذا كان للدالة $F = x^2y^2 - 2x - 2y$ نهاية صغرى عند $x = y = 1$ (بعد اثبات أن المشتقتين الأوليين يساويان الصفر عند تلك النقطة).

٦-١-١٣ ماهي الشروط التي يجب أن يحققها a,b,c كي يكون :

$ax^2 + 2bxy + cy^2 \geq x^2 + y^2$ لكل x,y ؟

٦-٢ معايير التعريف الإيجابي

ماهي المصفوفات المتناظرة التي تتمتع بتحقيق العلاقة $x^TAx > 0$ لكل متجه x غير صفري ؟ إن هناك أربعة أو خمسة طرق للإجابة عن هذا السؤال، نأمل أن نكتشفها كلها . لقد ابتدأ البند السابق بتلميحات تتعلق باشارة القيم الذاتية، لكن هذه المناقشات كانت معلقة بالهواء . عوضاً عن ذلك، قد اعطت مسألة القيم الذاتية مكانا لشرطين متعلقين بمصفوفة :

إذا كان $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ فإننا نحتاج $a > 0,\ ac - b^2 > 0$

لتكون $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ معرفة إيجابياً، من الضروري أن يكون $a > 0\ ,\ a\,c - b^2 > 0$.

هدفنا الآن هو تعميم هذا الشرط لتشمل المصفوفة ذات المرتبة n، وإيجاد علاقة ذلك باشارة القيم الذاتية . في الحالة 2×2، على الأقل، يعني هذان الشرطان أن ***القيمتين الذاتيتين موجبتان*** : جداؤهما المحددة $ac - b^2 > 0$ ، أي أن القيمتين الذاتيتين موجبتان معاً أو سالبتان معاً، ويجب أن يتحقق الأول لأن مجموعهما الأثر $a + c > 0$

يلاحظ كيف يعكس، من قريب، هذان الفرضان ــ الأول مباشر وحسابي والثاني أكثر تعلقاً بالخواص الذاتية للمصفوفة (قيمها الذاتية) ــ جزأي هذا الكتاب . في الحقيقة إذا نظر بدقة في المعيار الحسابي، فمن الممكن اكتشاف ظهور المحاور . لقد

بدت عندما فرقنا f إلى مجموع مربعين :

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = a\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 + \frac{ac - b^2}{a}y^2. \quad (1)$$

المعاملان a و $(ac - b^2)/a$ هما، فعلاً، محورا المصفوفة ذات النوع 2×2 . إذا بقيت هذه العلاقة صحيحة من أجل المصفوفات الكبيرة، فانها تعطينا معياراً سهلاً جداً للتعريف الإيجابي : نفحص المحاور. بالوقت ذاته سيكون لذلك التفسير المألوف : يكون x^TAx معرفاً إيجابياً إذا وإذا فقط أمكن كتابته كمجموع n مربعاً مستقلة.

هناك ملاحظة تمهيدية اضافية. يرتبط جزءا هذا الكتاب بواسطة نظرية المحددات، لذا نتساءل عن الدور الذي تلعبه المحددات في التعريف الإيجابي. **من المؤكد أنه لا يكفي أن نتطلب** $\det A > 0$. لأن هذا المتطلب محقق، في مثالنا، إذا كان $a = c = -1$ و $b = 0$، الأمر الذي يؤدي إلى $A = -I$، وهو شكل معرف سلبياً. النقطة المهمة هنا هو أن معيار المحددة لم يطبق، فقط، على المصفوفة A ليعطي $ac - b^2 > 0$ بل طبق، أيضاً، على المصفوفة A الجزئية a ذات النوع 1×1 الواقعة في الزاوية اليسرى العليا ـ يجب أن يحيط التعميم الطبيعي بجميع المصفوفات الجزئية اليسارية العليا :

$$A_1 = \left[a_{11}\right], A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \ldots, A_n = A.$$

إليك النظرية الاساسية وبرهانها المفصل :

٦ب كل من المعايير الأربعة التالية شرط لازم وكاف لتكون المصفوفة الحقيقية المتناظرة ***معرفة إيجابياً*** :

(١) $x^TAx > 0$ لكل متجه غير صفري x .

(٢) جميع القيم الذاتية للمصفوفة A تحقق $\lambda_i > 0$.

(٣) لجميع المصفوفات الجزئية A_k محددات موجبة.

(٤) جميع المحاور (بدون مبادلالت سطرية) تحقق $d_i > 0$.

البرهان الشرط الأول يعرِّف المصفوفة المعرفة إيجابياً وستكون خطوتنا الأولى هي برهان تكافؤ هذا الشرط مع الشرط الثاني . لذا، نفرض أن (١) محقق، ولنستنتج أن كل قيمة ذاتية λ_i موجبة . البرهان سهل . لنفرض أن x_i هو المتجه الذاتي الواحدي المقابل . لذا

$$Ax_i = \lambda_i x_i \quad \text{لذا} \quad x_i^T A x_i = x_i^T \lambda_i x_i = \lambda_i,$$

لأن $x_i^T x_i = 1$. لما كان الشرط (١) محقق لكل x، فانه صحيح، بصورة خاصة من أجل المتجه الذاتي x_i، لذا، فإنه من الضروري أن يكون $x_i^T Ax_i = \lambda_i$ موجباً . ***أي للمصفوفة المعرفة إيجابياً قيم ذاتية موجبة .***

نتنقل الآن إلى الاتجاه الثاني، نفرض أن جميع $\lambda_i > 0$ ولنستنتج أن $x^T Ax > 0$ (يجب برهان ذلك لكل متجه x وليس، فقط، للمتجهات الذاتية) . بما أن للمصفوفة المتناظرة مجموعة كاملة من المتجهات الذاتية النظامية القائمة والمستقلة خطياً (نظرية الطيف)، فانه يمكننا أن نكتب أي متجه كتركيب خطي من الصورة $c_1x_1 + ... + c_nx_n$. لذا، فإن

$$Ax = c_1 Ax_1 + \dots + c_n Ax_n = c_1 \lambda_1 x_1 + \dots + c_n \lambda_n x_n .$$

بسبب كون المتجهات x_i نظامية ومتعامدة فان $x_i^T x_i = 1$،

$$\begin{aligned} x^T Ax &= (c_1 x_1^T + \dots + c_n x_n^T)(c_1 \lambda_1 x_1 + \dots + c_n \lambda_n x_n) \\ &= c_1^2 \lambda_1 + \dots + c_n^2 \lambda_n . \end{aligned} \qquad (٢)$$

إذا كان كل $\lambda_i > 0$ ، فإنه ينتج من (٢) أن $x^T Ax > 0$. لذا، فإن الشرط الثاني يؤدي إلى الأول .

نتنقل الآن إلى (٣) و (٤) المكافئين لـ (١) وسنبرهن ذلك على ثلاث مراحل :

إذا كانت (١) صحيحة فان (٣) كذلك : أولاً، محددة أي مصفوفة تساوي

جداء قيمها الذاتية . وإذا كان (١) صحيحاً فقد عرفنا سابقاً أن القيم الذاتية موجبة بسبب (٢) . لذا، يكون :

$$\det A = \lambda_1 \lambda_2 \ \ldots \ \lambda_n > 0.$$

لبرهان الأمر ذاته من أجل جميع المصفوفات الجزئية A_k، نحقق أنه إذا كانت A معرفة إيجابياً فان كل A_k كذلك . الطريقة هي فحص المتجهات التي مركباتها الـ $n-k$ الأخيرة أصفار :

$$x^{\mathrm{T}}Ax = \begin{bmatrix} x_{\mathrm{k}}^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{\mathrm{k}} & * \\ * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{\mathrm{k}} \\ 0 \end{bmatrix} = x_{\mathrm{k}}^{\mathrm{T}} A_{\mathrm{k}} x_{\mathrm{k}}.$$

إذا كانت $x^TAx > 0$ لكل متجه غير صفري x، فإنه يكون، بصورة خاصة، $x_k^T A_k x_k > 0$ لكل x_k غير صفري . لذا، فإن الشرط (١) صحيح لكل A_k وإن هذه المصفوفة الجزئية تجيز المناقشة التي أجريناها لـ A ذاتها . قيمها الذاتية (التي هي ليست λ_i ذاتها !) موجبة ومحددتها تساوي جداء هذه القيم الذاتية .

إذا كانت (٣) صحيحة فان (٤) كذلك : إن ذلك سهل البرهان لأن هناك علاقة مباشرة بين الأعداد $det\,A_k$ والمحاور . وفقاً لما جاء في البند (٤-٤)، المحور d_k يساوي تماماً النسبة بين $det\,A_k$ و $det\,A_{k-1}$. لذا، إذا كانت هذه المحددات موجبة فان جميع المحاور موجبة كذلك ـ وليس هناك ضرورة لمبادلات بين الأسطر لمصفوفة معرفة إيجابياً .

إذا كانت (٤) صحيحة فإن (١) كذلك : لقد فرضنا أن المحاور موجبة وعلينا أن نستنتج أن $x^TAx > 0$. هذا ماقمنا به في حالة 2×2، بالإتمام إلى مربع . لقد كانت المحاور هي الأعداد الواقعة خارج المربعات . لبرهان الأمر ذاته من أجل مصفوفات متناظرة من أي حجم كان، علينا أن نعود إلى منشأ المحاور ـ الحذف الغاوسي و $A = LDU$. هاهي الحقيقة الأساسية : *في الحذف الغاوسي لمصفوفة متناظرة، كانت المصفوفة المثلثية العليا U هي منقول المصفوفة المثلثية الدنيا L. لذا، فإن $A = LDU$ تصبح $A = LDL^T$*.

مثال

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & & \\ & \frac{3}{2} & \\ & & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{LDL}^{\mathrm{T}}$$

لنضرب من اليسار بالمتجه x^T ومن اليمين بالمتجه x فنحصل على مجموع مربعات معاملاتها المحاور $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}$:

$$x^{\mathrm{T}}Ax = \begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & & \\ & \frac{3}{2} & \\ & & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

$$= 2(u - \tfrac{1}{2}v)^2 + \tfrac{3}{2}(v - \tfrac{2}{3}w)^2 + \tfrac{4}{3}(w)^2 .$$

هذه المحاور موجبة مضروبة بمربعات كاملة تؤدي إلى كون x^TAx موجبة. والشرط (٤) يؤدي إلى الشرط (١) وهذا ماينهي البرهان. ستكون هذه النظرية ذاتها صحيحة، في الحالة المركبة، من أجل المصفوفات الهرميتية حيث $A = A^H$.

إنه شيء جميل أن يكون انشاءان اساسيان ـ الحذف والاتمام إلى مربع كامل ـ متطابقين فعلاً. المرحلة الأولى من الحذف تحذف x_1 من جميع المعادلات التي تلي الأولى. بصورة مشابهة يتعلق المربع الأول بكل حد من x^TAx يحوي x_1. جبرياً، مجموع المربعات (التي برهنا بها كون $x^TAx > 0$) هو :

$$x^{\mathrm{T}}Ax = (x^{\mathrm{T}}L)(D)(L^{\mathrm{T}}x) = d_1(L^{\mathrm{T}}x)_1^2 + d_2(L^{\mathrm{T}}x)_2^2 + \ldots + d_n(L^{\mathrm{T}}x)_n^2 . \qquad (٣)$$

المحاور واقعة في الخارج. المضاريب l_{ij} في الداخل ! يمكننا أن نرى $-\frac{1}{2}$ و $-\frac{2}{3}$ (وجميع أعمدة L) داخل مربعات المثال الثلاثة.

ملاحظة قد يكون من الخطأ أن نتخلى عن انطباعنا في الشرط الثالث وهو كون

المصفوفات الجزئية العلوية A_k حالات خاصة تماماً. يمكننا بصورة مطابقة أن نختبر محددات المصفوفات الجزئية اليمنى والدنيا. ويمكننا، أيضاً، استخدام أي سلسلة من المصفوفات الجزئية الرئيسية منطلقين من عنصر قطري a_{ii} كمصفوفة جزئية أولى، ثم اضافة سطر وعمود (متزاوجين) جديدين في كل مرة. بصورة خاصة، هناك شرط ضروري للتعريف الايجابي وهو أن يكون كل عنصر قطري a_{ii} موجباً. ذلك هو فعلاً معامل x_i^2. كما رأينا في الأمثلة، لكن النظر في عناصر القطر، فقط، لايمكنه أن يكون أبداً كافياً.

لايجوز الخلط بين المحاور d_i والقيم الذاتية. لمصفوفة نموذجية معرفة إيجابياً، توجد مجموعتان مختلفتان، تماماً، من الأعداد الموجبة. في مثالنا ذي النوع 3×3، من المحتمل أن يكون معيار المحددات هو الأكثر سهولة:

$$\det A_1 = 2, \quad \det A_2 = 3, \quad \det A_3 = \det A = 4.$$

من أجل مصفوفة كبيرة، من الأسهل النظر في المحاور من خلال عملية الحذف، وهي هنا النسب $d_1 = 2$, $d_2 = 3/2$, $d_3 = 4/3$. عادة، يكون معيار القيم الذاتية هو الأطول، لكننا، في هذا المثال نعلم أن جميعها موجبة،

$$\lambda_1 = 2 - \sqrt{2}, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 2 + \sqrt{2}.$$

رغم أنه من المتعب تطبيق ذلك على مصفوفة معينة A، فانه، فعلاً، أكثر المعايير استخداماً في القضايا النظرية. ***كل معيار كاف بحد ذاته.***

المصفوفات المعرفة إيجابياً والمربعات الأصغرية

آمل أنك تسمح بتقديم معيار إضافي للتعريف الإيجابي. لقد أصبح الآن قريباً وسيعطي فهماً أفضل للمعايير القديمة ـ وللارتباط مع بقية الكتاب. لقد ربطنا المصفوفات المعرفة إيجابياً بالمحاور (الفصل الأول) وبالمحددات (الفصل الرابع) وبالقيم الذاتية (الفصل الخامس). سندرسها الآن في مسائل المربعات الأصغرية الواردة في (الفصل الثالث)، منطلقين من المصفوفات المستطيلة من (الفصل الثاني).

ستكون المصفوفة المستطيلة R ومسألة المربعات الأصغرية $Rx = b$. لهذا النظام m معادلة حيث $m \geq n$ (تدخل في ذلك الأنظمة المربعة). نحتاج إلى الحرف A للمصفوفة المتناظرة R^TR التي تظهر في المعادلات النظامية : $\overline{x}$ اختيار المربعات الأصغرية هو حل $R^TR\,\overline{x} = R^Tb$. المصفوفة R^TR ليست، فقط، متناظرة بل معرفة إيجابياً كما سنبين الآن ـ شرط أن تكون أعمدة R الـ n مستقلة خطياً :

٦ جـ تكون A مصفوفة متناظرة معرفة إيجابياً إذا وإذا فقط حققت الشرط :

(٥) توجد مصفوفة R باعمدة مستقلة تحقق $A = R^TR$.

لكي نرى أن R^TR معرفة إيجابياً نلاحظ أن x^TR^TRx، هو مربع طول، $\|Rx\|^2$ لايمكنه أن يكون سالباً وهو، أيضاً، لايمكنه أن يكون صفراً (إلا إذا كان $x = 0$)، وذلك لأن لـ R أعمدة مستقلة : إذا كان xلايساوي الصفر فان Rx لايساوي الصفر. لذا، فإن $x^TAx = \|Rx\|^2$ موجب وإن $A = R^TR$ معرفة إيجابياً.

بقي علينا أن نبرهن أنه إذا كانت A محققة للشروط (١-٤) فانها تحقق أيضاً الشرط (٥). علينا أن نجد R التي تحقق $A = R^TR$، وبالفعل قد وجدناها مرتين قبل الآن :

(١) في المرحلة الأخيرة من النظرية الاساسية، فرّق الحذف الغاوسي A إلى LDL^T. كانت المحاور موجبة، وإذا حوت $\sqrt{D}$ الجذور التربيعية لهذه المحاور على طول قطرها

الرئيسي، فسيكون $A = L\sqrt{D}\,\sqrt{D}\,L^T$ [1]. لذا، سيكون هناك اختيار واحد للمصفوفة R وهي المصفوفة المثلثية $\sqrt{D}\,L^T$.

(٢) برهان آخر، يعطي مصفوفة R مختلفة عن السابقة ويقوم على استخدام (٢) عوضاً عن (٤) ـ قيم ذاتية موجبة عوضاً عن محاور موجبة. توضع المتجهات الذاتية في مصفوفة قائمة Q :

$$A = Q\Lambda Q^T = (Q\sqrt{\Lambda})(\sqrt{\Lambda}\,Q^T) = R^TR. \quad (٤)$$

هناك احتمال ثالث هو $R = Q\sqrt{\Lambda}\,Q^T$، وهو ***الجذر التربيعي المعرف إيجابياً للمصفوفة*** A.

كانت هذه الاختيارات الثلاثة لـ R مصفوفات مربعة. لسنا بحاجة لفرض R مستطيلة. هناك العديد من الاختيارات، مربعة أو مستطيلة ويمكننا تفسير ذلك. إذا ضربت أحد الاختيارات بأي مصفوفة ذات أعمدة متعامدة نظامية (مثل Q) فان الجداء سيحقق $(QR)^T(QR) = R^TQ^TQR = R^TIR = A$. لذا، سيكون QR اختياراً آخر. النقطة الاساسية هي أن مسائل المربعات الأصغرية تؤدي إلى مصفوفات معرفة إيجابياً ـ وفي التطبيقات التي نتجت عنها[1].

ملاحظة كثيراً ما يسأل صفي عن المصفوفات غير المتناظرة المعرفة إيجابياً. إنني لم استخدم، قط، هذا التعبير. تعريف واحد ممكن هو أن يكون الجزء $\frac{1}{2}(A + A^T)$ المتناظر معرفاً إيجابياً. (تحتاج الحالة المركبة أن يكون الجزء الهرميتي $\frac{1}{2}(A + A^H)$ معرفاً إيجابياً). ذلك يكفي لضمان كون الأجزاء الحقيقية للقيم الذاتية موجبة، لكن ذلك غير لازم كما يبين ذلك البرهان والمثال التاليان:

شرط كاف ليكون $Re\,\lambda > 0$: إذا كان $Ax = \lambda x$ فإن $x^HAx = \lambda x^Hx$ و $x^HA^Hx = \bar{\lambda}x^Hx$. بالجمع نجد الجزء الحقيقي

$$(Re\,\lambda)\,x^Hx = \frac{1}{2}x^H(A + A^H)\,x > 0$$

شرط غير لازم: في $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$، نجد $Re\,\lambda > 0$ لكن $\frac{1}{2}(A + A^T) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ غير معرف.

---

(١) لقد ادخلت تطبيقات المصفوفات المعرفة إيجابياً في الفصل الأول من كتابي Introduction to Applied Mathematics (wellesley - Cambridge Press).

مجسمات القطع الناقص في فضاء ذي n بعداً

خلال هذا الكتاب، كانت تأتي الانشاءات الهندسية خلف جبر المصفوفات. في الفصل الأول، مثلت المعادلة الخطية مستوياً. نظام المعادلات $Ax = b$ أدى إلى تقاطع مستويات وإلى إسقاط عمودي (المربعات الأصغرية) عندما لاتلتقي المستويات. المحددة كانت عبارة عن حجم متوازي سطوح. والآن، بالنسبة للمصفوفة A المعرفة إيجابياً وكذلك بالنسبة للدالة التربيعية $f = x^T Ax$، نحصل على شكل منحن. إنه *القطع الناقص* في الفضاء ذي البعدين، و*مجسم القطع الناقص* في فضاء ذي n بعداً.

المعادلة التي ننظر فيها هي $x^T Ax = 1$. إذا كانت A مصفوفة الوحدة فإن هذه المعادلة تبسط لتصبح : $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = 1$. إنها معادلة «كرة الوحدة». لاحظ إنه إذا ضربت المصفوفة A بـ 4، بحيث يكون $A = 4I$، فإن الكرة تصغر وتتغير المعادلة فتصبح $4x_1^2 + 4x_2^2 + ... + 4x_n^2 = 1$، وبدلاً من نقاط مثل $(1.0....,0)$ فإن الكرة تمر بالنقطة $(\frac{1}{2}, 0,...,0)$. مركز القطع الناقص هو نقطة الأصل، لأنه إذا كان المتجه x يحقق $x^T Ax = 1$ فإن المتجه المعاكس $-x$ يحققها أيضاً. إننا نتعامل مع صيغ تربيعية محضة، والخطوة التالية ـ الخطوة المهمة ـ هي الانتقال من مصفوفة الوحدة إلى مصفوفة قطرية :

من أجل $A = \begin{bmatrix} 4 & & \\ & 1 & \\ & & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$ تكون المعادلة $x^T Ax = 4x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{9} x_3^2 = 1$

بما أن العناصر غير متساوية (وموجبة !) فاننا نتحول من الكرة إلى مجسم قطع ناقص.

بامكانك أن ترى الحلول الرئيسية للمعادلة. أحد هذه الحلول هو $x = (\frac{1}{2}, 0,0)$ واقع على المحور الأول. وحل آخر هو $x = (0,1,0)$ واقع على طول المحور x_2. وفي الاتجاه الثالث، تقع النقطة $x = (0,0,3)$ وهي أبعد نقطة عن المركز يصل إليها المجسم. النقاط $(-\frac{1}{2}, 0,0)$ و $(0,-1,0)$ و $(0,0,-3)$ تقع عند النهايات الأخرى للمحور الصغير

والوسط والكبير. إنه يشبه كرة القدم أو كرة الركبي ولكن ليس تماماً. هذان المجسمان أقرب إلى : $x_1^2+x_2^2+\frac{1}{2}x_3^2=1$. يجعل المعاملان المتساويان هاتين الكرتين دائريتين في المستوي $x_1 - x_2$، يقطعهما المحور الكبير في $(0,0,\sqrt{2})$.

والآن، نأتي إلى الخطوة النهائية لجعل الأعداد غير الصفرية خارج القطر الرئيسي لـ A.

مثال $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ و $x^TAx = 5u^2 + 8\,uv + 5v^2 = 1$. إنه قطع ناقص في المستوي $u - v$. مركزه في نقطة الأصل، لكن المحاور ليست واضحة. فالعددان (٤) اللذان يقعان خارج القطر يبقيان المصفوفة معرفة إيجابياً، لكنهما يدوران القطع الناقص ـ لا يقع محوراه على المحورين الاحداثيين(شكل ٦-٢). ***سنبين أن محوري القطع الناقص في اتجاهي المتجهين الذاتيين للمصفوفة*** A. بما أن المصفوفة متناظرة، فإن متجهاتها الذاتية متعامدة. المحور الكبير للقطع الناقص ـ المقابل للقيمة الذاتية الصغرى لـ A ـ عمودي على المحور الصغير الذي يقابل القيمة الذاتية الكبرى.

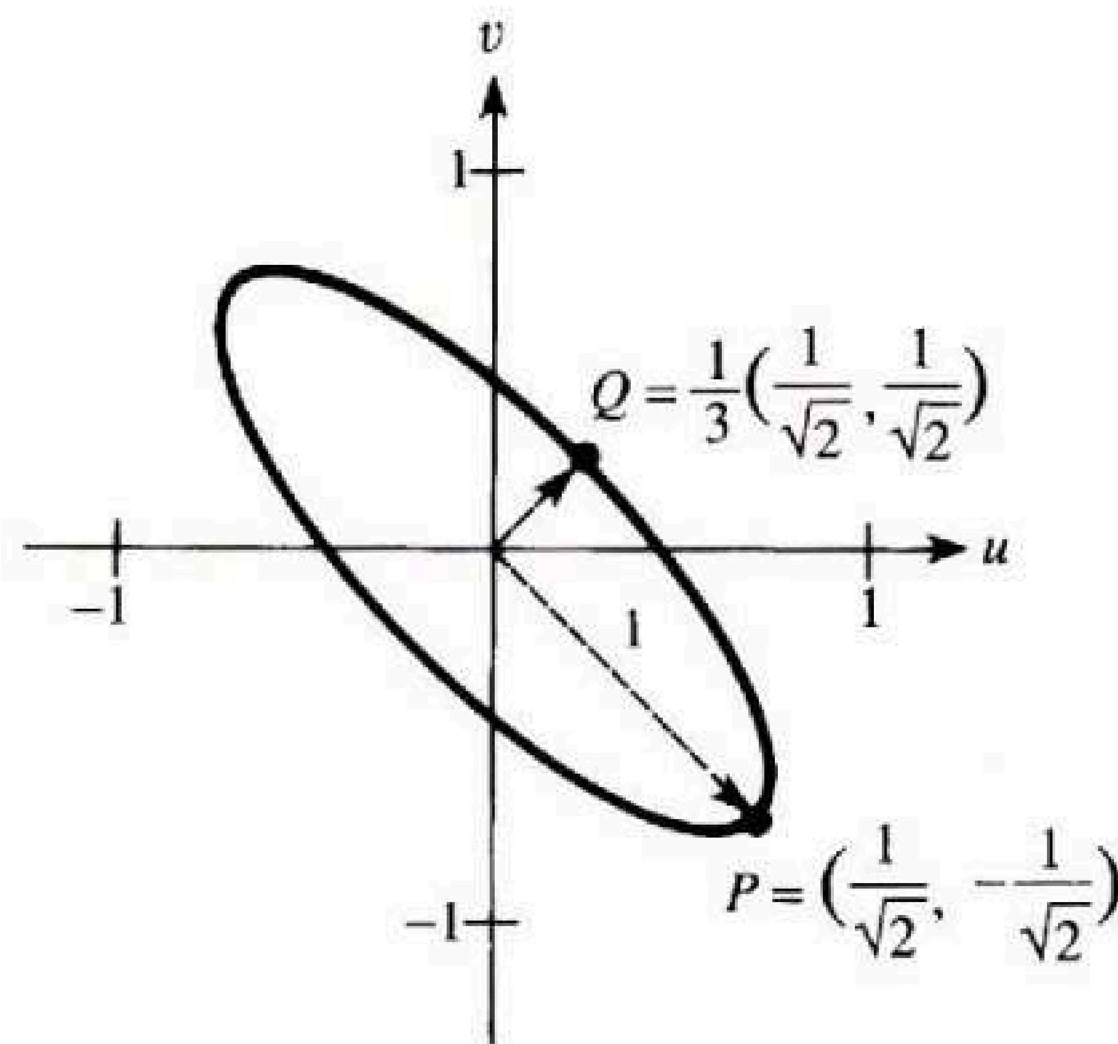
للتعرف على القطع الناقص نحسب القيمتين الذاتيتين: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 9$. المتجهان الذاتيان المنظمان هما $(1/\sqrt{2}\,,\,-1/\sqrt{2})$ و $(1/\sqrt{2}\,,\,1/\sqrt{2})$. هذان المتجهان يصنعان زاوية ٤٥° مع المحورين $u - v$ ويقعان على محوري القطع الناقص. الطريقة التي ترينا، بوضوح، القطع الناقص هي في اعادة كتابة المعادلة بالصورة :

$$5u^2 + 8uv + v^2 = \left(\frac{u}{\sqrt{2}} - \frac{v}{\sqrt{2}}\right)^2 + 9\left(\frac{u}{\sqrt{2}} + \frac{v}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1. \quad (٥)$$

القيمتان الذاتيتان 9,1 تقعان خارج المربعين. ويقع المتجهان الذاتيان في الداخل[1]. المربع الأول يساوي ١ عند النقطة $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ الواقعة في نهاية المحور

---

(١) هذا يختلف عن الإتمام إلى المربع الكامل $5\,(u+\frac{4}{5}\,v)^2+\frac{9}{5}\,v^2$ حيث *المحاور* تقع في الخارج.



شكل (٦-٢). القطع الناقص $5u^2 + 8uv + 5v^2 = 1$ ومحاوره الأساسية.

القيمتان الذاتيتان 9,1 تقعان خارج المربعين. ويقع المتجهان الذاتيان في الداخل[1]. المربع الأول يساوي ١ عند النقطة $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ الواقعة في نهاية المحور الكبير. المربع الثاني يساوي ١ عند النقطة $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$، ونحن بحاجة للمضروب $(\frac{1}{3})^2$ لحذف العدد 9. إن طول المحور الصغير هو $\frac{1}{3}$.

يمكن تيسيط أي مجسم $x^TAx = 1$ بالطريقة نفسها، بعد أن تفهمنا ماذا حصل للمعادلة (٥). وكما هي العادة، فان الخطوة الرئيسية كانت تقطير A. هندسياً، نقوم الشكل بتدوير المحاور. جبرياً، تذهب متجهات A الذاتية إلى مصفوفة قائمة Q وتصبح $A = Q\Lambda Q^T$. لقد كانت تلك إحدى الأفكار الرئيسية في الفصل الخامس، وأدى التغيير $y = Q^Tx$ إلى مجموع مربعات:

$$x^TAx = (x^TQ)\Lambda(Q^Tx) = y^T\Lambda y = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2. \quad (٦)$$

تصبح المعادلة الآن: $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots\dots + \lambda_n y_n^2 = 1$ و $y_1 = (Q^Tx)_1$ هو مركبة x باتجاه المتجه الذاتي الأول. ماهو كبر هذه المركبة؟ أكبر مايمكن أن تصل إليه هو:

$y_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$ ، وذلك عندما تكون جميع المربعات الأخرى أصفاراً. لذا، فإن المحور الكبير الذي يقع على المتجه الذاتي المقابل للقيمة الذاتية الصغرى يصل إلى مسافة $\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$ من المركز.

المحاور الأساسية الأخرى تقع باتجاه المتجهات الذاتية الأخرى. أطوالها هي: $\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}$,...... , $\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}$. لاحظ أن قيم λ يجب أن تكون موجبة ـ المصفوفة يجب أن تكون معرفة إيجابياً ـ وإلا فان هذه الجذور التربيعية ستحدث اضطراباً. المعادلة $y_1^2 - 9y_2^2 = 1$ تمثل قطعاً زائداً وليس ناقصاً.

إن تبديل المتغير من x إلى $y = Q^T x$ دوَّر المحاور في الفضاء لتنطبق على محاور مجسم القطع الناقص. بالمتغيرات y، يمكننا أن نرى أنه مجسم قطع ناقص، لأن المعادلة تصبح سهلة الانقياد:

٦د نفرض أن A مصفوفة معرفة إيجابياً: $A = Q\Lambda Q^T$ حيث $\lambda_i > 0$. عندئذ، يمكن للدوران $y = Q^T x$ أن يبسط $x^T A x = 1$ إلى:

$$x^T Q\Lambda Q^T x = 1 \quad \text{أو} \quad y^T \Lambda y = 1 \quad \text{أو} \quad \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2 = 1$$

هذه معادلة مجسم قطع ناقص. أطوال محاوره $\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$,......, $\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}$ من المركز، وفي فضاء x الاصلي تقع هذه النقاط على المتجهات الذاتية.

تمارين

٦-٢-١ من أجل أي مدى للعددين a,b تكون المصفوفتان A,B معرفتين إيجابياً؟

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & b & 8 \\ 4 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

٦-٢-٢ قرر ما إذا كانت المصفوفات الآتية معرفة إيجابياً :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^2.$$

٦-٢-٣ كوّن مصفوفة غير معرفة عناصرها الكبرى تقع على القطر الرئيسي :

$A = \begin{bmatrix} 1 & b & -b \\ b & 1 & b \\ -b & b & 1 \end{bmatrix}$ إذا كان $|b| < 1$ فمن الممكن أن تكون $\det A < 0$

٦-٢-٤ بين، مستعيناً بالقيم الذاتية ، أنه إذا كانت A معرفة إيجابياً، فإن كلاً من A^2 و A^{-1} تكون كذلك .

٦-٢-٥ بين أنه إذا كانت المصفوفتان A و B معرفتين إيجابياً فان $A+B$ كذلك . أي من الشروط ١-٤ هو الأنسب في هذه الحالة ؟

٦-٢-٦ اعتماداً على المحاور والقيم الذاتية والمتجهات الذاتية للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ ، اكتب A على الشكل R^TR في كل من الطرائق الثلاث المبينة في برهان ٦جـ :

$$(L\sqrt{D})(\sqrt{D}L^T), \quad (Q\sqrt{\Lambda})(\sqrt{\Lambda}Q^T), \quad \text{و} \quad (Q\sqrt{\Lambda}Q^T)(Q\sqrt{\Lambda}Q^T)$$

٦-٢-٧ إذا كانت $A = Q\Lambda Q^T$ متناظرة ومعرفة إيجابياً، عندئذ ، تكون $R = Q\sqrt{\Lambda}Q^T$ جذرها *التربيعي المتناظر والمعرف إيجابياً* . لماذا يكون لـ R قيم ذاتية حقيقية ؟ احسب R وتأكد من أن $R^2 = A$ من أجل :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{bmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 10 \end{bmatrix}.$$

٦-٢-٨ إذا كانت A متناظرة ومعرفة إيجابياً و C غير شاذة، فأثبت أن المصفوفة $B = C^TAC$ هي، أيضاً، متناظرة ومعرفة إيجابياً .

٦-٢-٩ إذا كانت $A = R^TR$ ، برهن متراجحة شوارتز العامة :

$$|x^TAy|^2 \le (x^TAx)(y^TAy).$$

٦-٢-١٠ تقابل القطع الناقص $u^2+4v^2=1$ المصفوفة $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&4\end{bmatrix}$. اكتب القيم الذاتية والمتجهات الذاتية وارسم القطع الناقص .

٦-٢-١١ اجعل المعادلة $3u^2-2\sqrt{2}\,uv+2v^2=1$ مجموع مربعات وذلك بايجاد القيم الذاتية للمصفوفة A المقابلة للمعادلة، وارسم القطع الناقص .

٦-٢-١٢ في الفضاء ذي الأبعاد الثلاثة ، تمثل المعادلة $\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\lambda_3 y_3^2=1$ مجسم قطع ناقص عندما تكون جميع $\lambda_i>0$. صف أصناف السطوح المختلفة التي تظهر في حالة شبه التعريف الإيجابي عندما يكون واحد أو أكثر من القيم الذاتية صفراً .

٦-٢-١٣ اكتب الشروط الخمسة لمصفوفة من النوع 3×3 كي تكون معرفة سلبياً ($-A$ معرفة إيجابياً) مع الاهتمام بشكل خاص بالشرط الثالث : ماهي علاقة محددة $(-A)$ بمحددة A ؟

٦-٢-١٤ إذا كان عنصر قطري صفراً فبين أن A لايمكن أن تكون معرفة سلبياً .

٦-٢-١٥ فرر ما إذا كانت المصفوفات الآتية معرفة إيجابياً، معرفة سلبياً، شبه معرفة أو غير معرفة :

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&5&4\\3&4&9\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&2&0&0\\2&6&-2&0\\0&-2&5&-2\\0&0&-2&3\end{bmatrix},\quad C=-B,\quad D=A^{-1}.$$

هل هناك حل حقيقي للمعادلة $-x^2-5y^2-9z^2-4xy-6xz-8yz=1$ ؟

٦-٢-١٦ لتكن A مصفوفة معرفة إيجابياً ومتناظرة و Q قائمة :

ص خ Q^TAQ مصفوفة قطرية .

ص خ Q^TAQ مصفوفة متناظرة ومعرفة إيجابياً .

ص خ Q^TAQ مصفوفة لها قيم A الذاتية .

ص خ e^{-A} مصفوفة متناظرة ومعرفة إيجابياً .

٦-٢-١٧ إذا كانت A معرفة إيجابياً و a_{11} قد ازداد، فاثبت، اعتماداً على العوامل المرافقة أن المحددة تزداد تبعاً لذلك. بين، من خلال مثال، أن ذلك يمكن أن لا يتحقق إذا كانت A غير معرفة.

٦-٢-١٨ بين، من خلال $A = R^TR$، أن $det\, A \leq a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$ من أجل المصفوفات المعرفة إيجابياً. (**إرشاد :** مربع طول العمود j من R هو a_{jj}. استخدم المحددة = الحجم.)

٦-٢-١٩ (معيار ليابينوف *Lyopunov* لاستقرار M) لنفرض أن $AM + M^HA = -I$ حيث A معرفة إيجابياً. إذا كان $Mx = \lambda x$، بين أن $Re\, \lambda < 0$ (**إرشاد :** اضرب المعادلة الأولى بـ x^H و x.)

٦ - ٣ المصفوفات شبه المعرفة و غير المعرفة ؛ $Ax = \lambda Mx$

هدف هذا البند، بعد أن توطدت معايير المصفوفات المعرفة إيجابياً، هو أن نلقي على طريقنا بعض التوسيع. هناك ثلاث قضايا تخطر على البال :

(١) معايير للمصفوفات شبه المعرفة إيجابياً.

(٢) العلاقة بين القيم الذاتية لمصفوفة متناظرة ومحاورها.

(٣) المسألة المعممة للقيم الذاتية $Ax = \lambda Mx$.

القضية الأولى مباشرة وسريعة، إذ إن جميع الأعمال الضرورية لذلك قد أجريت سابقاً. ستخفف المعايير الخاصة بالمصفوفات شبه المعرفة من المتراجحات الضيقة $x^TAx > 0$ و $\lambda > 0$ و $d > 0$ و $det > 0$، فتسمح بظهور الصفر. وحينئذ تسمح المصفوفات غير المعرفة بظهور قيم ذاتية سالبة ومحاور سالبة وتؤدي إلى النتيجة الرئيسية لهذا البند : ***إشارات القيم الذاتية مماثلة لإشارات المحاور***. وهذا هو «قانون العطالة». وأخيراً ننتقل إلى $Ax = \lambda Mx$، التي تصادف، دائماً، في التحليل الهندسي. مادامت المصفوفة M متناظرة ومعرفة إيجابياً، فان المسألة المعممة توازي المسألة العادية $Ax = \lambda x$

ـ ماعدا كون المتجهات الذاتية متعامدة بطريقة جديدة. في كثير من التطبيقات، تمثل M **مصفوفة كتلة**. سوف ندرس مثالاً نموذجياً في هذا البند ونقدم طريقة العنصر المحدود في البند (٦-٥).

من أجل المصفوفات شبه المعرفة، ستكون النقطة الرئيسية هي البحث عن تشابهها مع حالة التعريف الإيجابي.

٦ هـ كل من المعايير التالية شرط لازم وكاف لتكون المصفوفة A **شبه معرفة إيجابياً:**

(١) $x^TAx \geq 0$ لكل متجه x (هذا هو التعريف).

(٢) جميع القيم الذاتية للمصفوفة A تحقق $\lambda_i \geq 0$.

(٣) لجميع المصفوفات الجزئية الرئيسية محددات غير سالبة.

(٤) ليس هناك محاور سالبة.

(٥) توجد مصفوفة R، قد تكون أعمدتها مرتبطة، بحيث يكون $A = R^TR$.

إذا كانت A من الرتبة r فان $f = x^TAx$ تساوي مجموع مربعات تامة عددها r.

العلاقة بين $x^TAx \geq 0$ و $\lambda_i \geq 0$ التي هي الأكثر أهمية، هي، تماماً، كالسابق: يؤدي التقطير $A = Q\Lambda Q^T$ إلى:

$$x^TAx = x^TQ\Lambda Q^Tx = y^T\Lambda y = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2. \quad (1)$$

يكون هذا التركيب غير سالب إذا كانت λ_i غير سالبة. إذا كانت r رتبة A، فان هناك r من القيم الذاتية غير الصفرية و r من المربعات التامة.

سيكون الأمر ذاته للمحددة التي هي جداء القيم λ_i والتي يجب أن تكون أيضاً غير سالبة. لما كانت المصفوفات الجزئية الرئيسية شبه معرفة إيجابياً فان قيمها الذاتية ومحدداتها غير سالبة أيضاً، وبذلك، نكون قد استنتجنا الشرط (٣). (تتكون مصفوفة جزئية رئيسية بحذف أسطر وأعمدة بأزواج متناسقة ـ مثل الأول والرابع من الأسطر والأعمدة، الأمر الذي يبقي على تناظر A ويحافظ أيضاً على شبه التعريف: إذا كان $x^TAx \geq 0$ لكل x فإن ذلك يبقى صحيحاً عندما تكون المركبة الأولى والرابعة لهذا المتجه

صفرين) . الأمر الجديد يعني أن (٣) تطبق على جميع المصفوفات الجزئية الرئيسية وليس، فقط، على تلك الواقعة في الزاوية العليا اليسرى . من ناحية أخرى، ليس بامكاننا أن نميز بين مصفوفتين جميع محدداتهما العليا اليسرى أصفار : $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ شبه معرفة إيجابياً و $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ شبه معرفة سلبياً .

يظهر هذان المثالان أنه من الممكن أن تكون مبادلات سطرية ضرورية . في الحالة الجيدة، تكون المحددات الـ r الأول التي تقع في الزاوية العليا اليسرى غير صفرية ـ مصفوفة القرنة الجزئية ذات النوع $r \times r$ معرفة إيجابياً ـ ونحصل على r محوراً موجباً دون تبادل للأسطر . الأسطر الأخيرة التي عددها $n-r$ هي أصفار كما يحدث عادة بعد الحذف . في الحالة التي هي أقل جودة، نحتاج إلى مبادلة أسطر ـ وكذلك إلى مبادلة الأعمدة المقابلة كي نحافظ على التناظر . تصبح المصفوفة على شكل PAP^T بمحاور موجبة عددها r. في الحالة الأسوأ، يكون القطر الرئيسي ممتلئاً بالاصفار وهذه الأصفار تكون كذلك على قطر المصفوفة PAP^T ـ لذا، فليس هناك محاور متوقعة . إلا أن مثل هذه المصفوفة لن تكون شبه معرفة مالم تكن صفرية وحينئذ ينتهي الأمر .

تؤدي الانشاءات السابقة نفسها إلى R. كل واحد من الاختيارين

$A = (L\sqrt{D})(\sqrt{D}L^T)$ و $A = (Q\sqrt{\Lambda})(\sqrt{\Lambda}Q^T)$ وحتى $A = (Q\sqrt{\Lambda}Q^T)(Q\sqrt{\Lambda}Q^T)$

ينتج $A = R^TR$. (في الاختيار الثالث، نجد R متناظرة، وهي الجذر التربيعي شبه المعرف للمصفوفة A) . أخيراً، نعود من (٥َ) إلى (اَ)، إذ إن كل مصفوفة من الشكل R^TR هي شبه معرفة إيجابياً (على الأقل) . الشكل التربيعي x^TR^TRx يساوي $\|Rx\|^2$ فلا يمكن أن يكون سالباً ـ وهذا يغلق الحلقة .

مثال : المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

شبه معرفة وفقاً للمعايير التالية :

$A = (L\sqrt{D})(\sqrt{D}L^T)$ و $A = (Q\sqrt{\Lambda})(\sqrt{\Lambda}Q^T)$ وحتى $A = (Q\sqrt{\Lambda}Q^T)(Q\sqrt{\Lambda}Q^T)$

(١) $x^TAx = (x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_3)^2$.

(٢) القيم الذاتية هي : $\lambda_1 = 0 , \lambda_2 = \lambda_3 = 3$.

(٣) محددات المصفوفات الجزئية الرئيسية تساوي ٢ إذا كانت من النوع 1×1 و ٣ إذا كانت من النوع 2×2 و $det\, A = 0$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

ملاحظة يمكن لشروط شبه التعريف أن تستنتج من الشروط الأصلية ١-٥ بالحيلة التالية : نضيف إلى المصفوفة مضاعفاً صغيراً لمصفوفة الوحدة لنحصل على مصفوفة معرفة إيجابياً $A + \varepsilon I$. ثم نجعل ε يتقرب من الصفر . لما كانت المحددات والقيم تتعلق باستمرار بـ ε، فانها ستكون موجبة حتى آخر لحظة ؛ وعند $\varepsilon = 0$ ستكون غير سالبة .

التحويلات التوافقية وقانون العطالة

تعرضنا سابقاً في هذا الكتاب ، عند البحث في الحذف والقيم الذاتية ، للعمليات التي تجعل مصفوفة أكثر بساطة من الأصل . في كل حالة ، كان الشيء الرئيسي الذي نبحث عنه هو معرفة الخواص التي لم تتغير في المصفوفة . عندما طرحنا مضاعف سطر من آخر ، بقيت قائمة «اللامتغيرات» ، إلى حد ما ، طويلة : الفضاء الصفري ، فضاء الأسطر ، الرتبة والمحددة ، كل ذلك بقي كما هو . في حالة القيم الذاتية ، كانت العملية الأساسية هي تحويل التشابه ، $A \longrightarrow S^{-1}A\,S$ (أو $A \longrightarrow M^{-1}AM$) ، وبقيت القيم الذاتية نفسها لم تتغير (وكذلك صيغة جوردان) . نسأل الآن السؤال ذاته من أجل المصفوفات المتناظرة : ماهي «العمليات الأولية» وماهي اللامتغيرات فيها من أجل x^TAx ؟

العملية الأساسية للشكل التربيعي هي تبديل المتغيرات . المتجه الجديد y يرتبط بالمتجه x بمصفوفة غير شاذة ، $x = Cy$ ، فيأخذ الشكل التربيعي الصورة y^TC^TACy .

لذا، فإن العملية المصفوفية الأساسية في نظرية الأشكال التربيعية هي ***التحويل التوافقي*** المعرف كما يلي :

$C^TAC \longrightarrow A$ حيث C مصفوفة غير شاذة (٢)

إن تناظر A محفوظ لأن C^TAC متناظرة أيضاً. السؤال الواقعي هنا هو، ماهي الخواص الأخرى للمصفوفة التي لاتتغير بتأثير التحويل التوافقي ؟ يعطى الجواب ***بقانون العطالة*** لسيلفستر *Sylvester*

٦ و للمصفوفتين C^TAC و A عدد القيم الذاتية الموجبة ذاته وكذلك عدد القيم الذاتية السالبة وعدد القيم الذاتية الصفرية.

بقول آخر، إن إشارات القيم الذاتية (وليست القيم الذاتية نفسها) يحافظ عليها في التحويل التوافقي. سنفرض في البرهان، للسهولة، أن A غير شاذة. لذا، فإن C^TAC غير شاذة، أيضاً، ولن توجد قيم ذاتية صفرية قد تسبب لنا بعض الازعاج. (إذا كان الأمر خلاف ذلك، فانه يمكننا أن نعمل على المصفوفة غير الشاذة $A + \varepsilon I$ أو $A - \varepsilon I$ ثم نجعل $\varepsilon \longrightarrow 0$).

نريد أن نقتبس حيلة من الطبولوجيا أو، بصورة أدق، من نظرية التشوه باستمرار *Homotopy*. لنفرض أن C مرتبطة بمصفوفة قائمة Q بواسطة سلسلة من المصفوفات $C(t)$، ليس فيها واحدة شاذة : عند $t = 1 , t = 0$ يكون $C = C(0)$ و $Q = C(1)$. لذا فان القيم الذاتية للمصفوفة $C(t)^TAC(t)$ تتحول بالتدريج عندما يتحول t من الصفر إلى الواحد، من القيم الذاتية للمصفوفة C^TAC إلى القيم الذاتية للمصفوفة Q^TAQ. بما أن $C(t)$ لن تكون شاذة البتة، فلا يمكن لأي واحدة من هذه القيم الذاتية أن تبلغ الصفر. لذا، فإن عدد القيم الذاتية للمصفوفة C^TAC الواقعة عن يمين الصفر وعدد قيمها الذاتية الواقعة عن يساره، يساويان العددين المقابلين للمصفوفة Q^TAQ. وهذان العددان هما نفسهما المتعلقان بالمصفوفة A التي لها القيم الذاتية نفسها المتعلقة

بالمصفوفة المشابهة $Q^{-1}AQ = Q^{T}AQ$ (١) . وهذا هو البرهان .

مثال ١ إذا كان $A = I$ فان $C^{T}AC = C^{T}C$ وهذه المصفوفة معرفة إيجابياً . نأخذ $C = R$ في الشرط (٥) . للمصفوفة $C^{T}C$ ولمصفوفة الوحدة n من القيم الذاتية الموجبة وفق قانون العطالة .

مثال ٢ إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ فان للمصفوفة $C^{T}AC$ محددة سالبة :

$$\det C^{T}AC = (\det C^{T})(\det A)(\det C) = -(\det C)^{2} < 0.$$

بما أن هذه المحددة هي جداء القيم الذاتية ، فان على إحدى القيمتين الذاتيتين للمصفوفة $C^{T}AC$ أن تكون موجبة والأخرى سالبة ، كما للمصفوفة A. وهكذا يكون القانون قد تحقق من جديد .

مثال ٣ هذا التطبيق من أهم التطبيقات :

٦ ز في مصفوفة متناظرة A، ***تتفق إشارات المحاور مع إشارات القيم الذاتية .*** لمصفوفة القيم الذاتية Λ ومصفوفة المحاور D عدد العناصر الموجبة ، وعدد العناصر السالبة وعدد العناصر الصفرية ذاتها .

يمكننا أن نفرض أن A تحقق دائماً التحليل $A = LDU$ (بدون مبادلة بين الأسطر) . بما أن A متناظرة ، تكون U منقول L و $A = LDL^{T}$. نطبق على ذلك قانون العطالة : للمصفوفتين A و D العدد ذاته من القيم الذاتية الموجبة . لكن القيم الذاتية للمصفوفة D هي ، بالضبط ، عناصر قطرها(المحاور) . لذا ، فإن عدد المحاور الموجبة للمصفوفة A يساوي عدد قيمها الذاتية الموجبة .

---

(١) نحتاج هنا أن تكون Q قائمة . أحد الاختبارات الجيدة لـ Q هو تطبيق غرام شميدت على أعمدة C. نجد أن $C = QR$ وسلسلة المصفوفات هي $C(t) = tQ + (1-t)QR$. تسير الجماعة $C(t)$ ببطء من خلال غرام شميدت من QR إلى Q. هذه الجماعة قابلة للعكس لأن Q قابلة للعكس والعامل المثلثي $R(t-1) + tI$ ذو قطر موجب .

هذا جميل وعملي. إنه جميل لأنه يربط (من أجل المصفوفات المتناظرة) جزءين من هذا الكتاب كناقد تركناهما سابقاً منفصلين: المحاور والقيم الذاتية. وهو عملي أيضاً، لأنه من السهل إيجاد المحاور ـ والآن بإمكاننا أن نحدد مواقع القيم الذاتية. خذ مثلاً المصفوفتين:

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 8 & 7 \\ 0 & 7 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 10 & 7 \\ 0 & 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

للمصفوفة A محاور موجبة، وللمصفوفة $A - 2I$ محور سالب. لذا، فإن للمصفوفة A قيماً ذاتية موجبة أحدها أصغر من ٢، لأن طرح العدد ٢ سوف يجعله أقل من الصفر. الخطوة التالية تركز اهتمامها على المصفوفة $A - I$ لنرى ما إذا كانت القيمة الذاتية أقل من ١. (إنها كذلك لأن للمصفوفة $A - I$ محوراً سالباً). إن مدى عدم التأكد يتقلص إلى النصف عند كل خطوة، وذلك باختبار الإشارات.

لقد كانت هذه، في الغالب، هي الطريقة العملية الأولى لحساب القيم الذاتية. لقد كانت مهيمنة حوالي عام ١٩٦٠م، بعد اجراء تحسين واحد مهم ـ وهو جعل A مثلثية الأقطار أولاً. حينئذ، يستدعي حساب المحاور $2n$ خطوة بدلاً من $\frac{n^3}{6}$. وتصبح عملية الحذف أسرع ويصبح البحث عن القيم الذاتية أسهل. وهي معروفة باسم طريقة جيفن (Given). أما الطريقة المفضلة فهي طريقة QR التي ستعرفها في الفصل السابع.

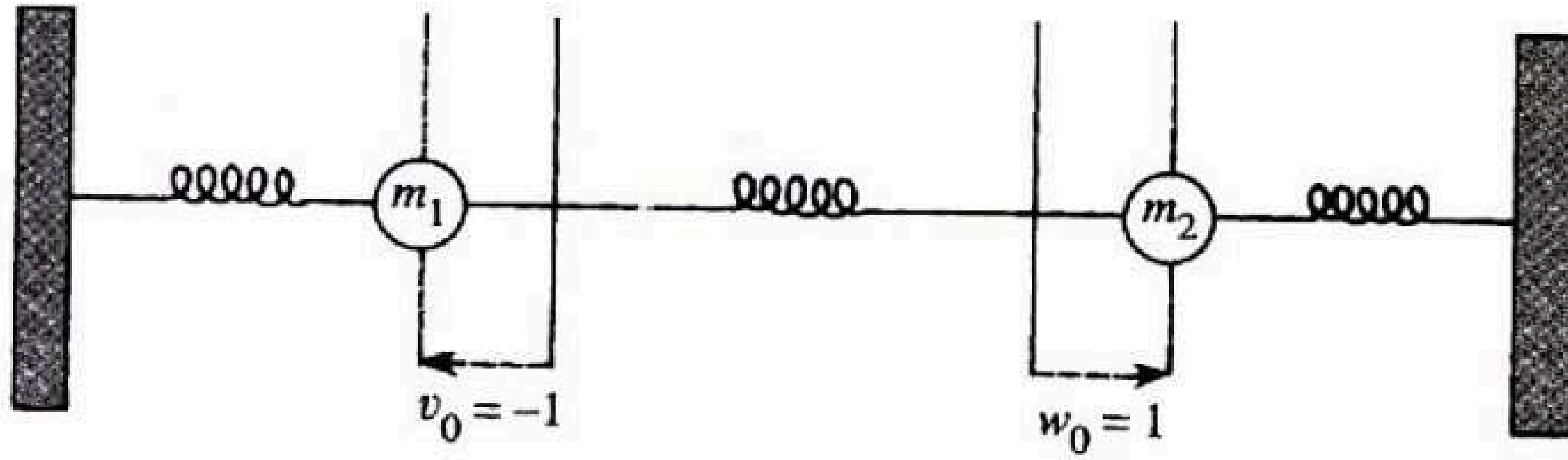
مسألة القيم الذاتية المعممة

لست متأكداً من الاقتصاد، لكن، لدى الفيزياء والهندسة والإحصاء قدرة كافية لاحداث مصفوفات متناظرة في مسائل قيمها الذاتية. هي بالأحرى، قادرة على إعطاء مصفوفتين لا واحدة، فقط، من هذا النوع. يمكن للمسألة $Ax = \lambda Mx$ أن تستبدل بالمسألة المعتادة $Ax = \lambda x$، كمثال على ذلك سننظر في حركة كتلتين غير متساويتين.

قانون نيوتن من أجل الكتلة الأولى $F_1 = m_1 a_1$ ومن أجل الكتلة الثانية هو

$F_2 = m_2 a_2$. يمكننا أن نصف الوضع الفيزيائي كما يلي : إذا انتقلت الكتلتان بالمسافتين v و w . كما هو ظاهر في الشكل (٦-٣)، فان النوابض ستشد هاتين الكتلتين إلى الخلف بالقوتين $F_1 = 2v + w$ و $F_2 = v - 2w$. تظهر النقطة الجديدة ذات الشأن، في الطرفين الأيسرين للمعادلتين حيث تقع الكتلتان :

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \frac{d^2u}{dt^2} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} u \quad \text{أو} \quad \begin{aligned} m_1 \frac{d^2v}{dt^2} &= -2v + w \\ m_2 \frac{d^2w}{dt^2} &= v - 2w \end{aligned}$$



شكل (٦ – ٣) . نظام تذبذب بكتلتين غير متساويتين .

عندما كانت الكتلتان متساويتين $m_1 = m_2 = 1$ ظهر النظام القديم $u'' = Au$. أما الآن فهو $Mu'' = Au$ حيث M *مصفوفة الكتل* . تظهر مسألة القيم الذاتية عندما نبحث عن حلول أسية من الصورة $e^{i\omega t}x$:

$$Mu'' = Au \quad \text{تصبح} \quad M(i\varpi)^2 e^{i\varpi t}x = Ae^{i\varpi t}x \qquad (٣)$$

لنختصر الطرفين على $e^{i\omega t}$ ولنكتب λ عوضاً عن $(i\omega)^2$، فنجد :

$$Ax = \lambda Mx \quad \text{أو} \quad \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x = \lambda \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} x \qquad (٤)$$

هناك حل عندما تكون $A - \lambda M$ شاذة، أي عندما تكون λ جذراً لمعادلة كثيرة الحدود $det\ (A - \lambda M) = 0$. يُظهر ، من جديد، الاختيار الخاص $M = I$ المعادلة المعتادة

$det\ (A - \lambda I)$. سنحل مثالاً يكون فيه $m_1 = 1\ ,\ m_2 = 2$:

$$\det (A - \lambda M) = \det \begin{bmatrix} -2-\lambda & 1 \\ 1 & -2-2\lambda \end{bmatrix} = 2\lambda^2 + 6\lambda + 3,\ \ \lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{3}}{2}.$$

القيمتان الذاتيتان سالبتان والتواتران المعتادان هما $\omega_i = \sqrt{-\lambda_i}$.لقد حسب المتجهان الذاتيان بالطريقة المعتادة :

$$(A - \lambda_1 M)x_1 = \begin{bmatrix} \frac{-1-\sqrt{3}}{2} & 1 \\ 1 & 1-\sqrt{3} \end{bmatrix} x_1 = 0,\ \ x_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{3}-1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$(A - \lambda_2 M)x_2 = \begin{bmatrix} \frac{-1+\sqrt{3}}{2} & 1 \\ 1 & 1+\sqrt{3} \end{bmatrix} x_2 = 0,\ \ x_2 = \begin{bmatrix} 1+\sqrt{3} \\ -1 \end{bmatrix}.$$

يعطي هذان المتجهان الذاتيان الأشكال المعتادة للاهتزازات . من أجل التواتر الأصغر ω_1 ، تتذبذب الكتلتان معاً، لكن الكتلة الأولى، في الواقع، تتحرك بمقدار $\sqrt{3} - 1 \approx .73$. في الحالة الأسرع، سيكون لمركبتي x_2 إشارتان مختلفتان وتتحرك الكتلتان باتجاهين مختلفين . في هذه الحالة، تبتعد الكتلة الصغيرة بمسافة أكبر من الثانية .

يمكن تفسير النظرية الأساسية بسهولة إذا جزئت M بالصورة R^TR . (نفرض أن M معرفة إيجابياً كما في هذا المثال) . لذا، فإن التعويض $y = Rx$ يغير

$Ax = \lambda Mx = \lambda R^TRx$ إلى $AR^{-1}y = \lambda R^Ty$

لنكتب C عوضاً عن R^{-1} ولنضرب الطرفين بـ $(R^T)^{-1} = C^T$ ، فتصبح هذه المسألة مسألة معتادة من مسائل القيم الذاتية للمصفوفة الوحيدة C^TAC :

$$C^TACy = \lambda y. \qquad (٥)$$

القيم الذاتية λ_j مطابقة لتلك المتعلقة بالمعادلة الأصلية $Ax = \lambda Mx$ ، أما المتجهات الذاتية

فانها مرتبطة بالعلاقة $y_j = Rx_j$.[1] خواص المصفوفة المتناظرة C^TAC، تؤدي مباشرة إلى الخواص المقابلة للنظام : $Ax = \lambda Mx$:

(١) القيم الذاتية حقيقية .

(٢) لها إشارات القيم الذاتية المعتادة للمصفوفة A، وذلك استناداً إلى قانون العطالة .

(٣) يمكن اختيار المتجهات الذاتية y_i للمصفوفة C^TAC نظامية متعامدة، وبالتالي تكون المتجهات الذاتية x_j متعامدة نظامية بواسطة M :

$$x_i^T Mx_j = x_i^T R^T Rx_j = y_i^T y_j = 1 \quad \text{اذا كان} \quad i = j, \quad \text{واذا كان} \quad i \neq j \qquad (٦)$$

(٤) بشكل مشابه $x_i^T Ax_j = \lambda_j x_i^T Mx_j$ يساوي λ_j أو صفراً. المصفوفتان A و M جعلتا *معاً قطريتين* . إذا كانت x_j أعمدة S فان $S^TAS = \Lambda$ و $S^TMS = I$. لاحظ أنه تحويل *توافقي* بمصفوفة S^T عن اليسار، وليس تحويل تشابه بالمصفوفة S^{-1} .

إن لذلك معنى هندسياً لم ندركه بصورة جيدة . في الحالة المعرفة إيجابياً، يكون كل من السطحين $x^TMx = 1$ و $x^TAx = 1$ مجسم قطع ناقص . يظهر أن المعادلة $x = Sz$ تعطي اختياراً جديداً للاحداثيات ـ ليست ناتجة عن دوران صرف، لأن S ليست مصفوفة قائمة ـ فيصبح مجسما القطع الناقص هذان متصافين، تماماً . إنهما :

$$x^TAx = z^TS^TASz = \lambda_1 z_1^2 + \ldots + \lambda_n z_n^2 = 1 \qquad (٧)$$

$$x^TMx = z^TS^TMSz = z_1^2 + \ldots + z_n^2 = 1.$$

المجسم الثاني كرة ! من السهل تلخيص النقطة الاساسية للنظرية : طالما M معرفة إيجابياً، فان مسألة القيم الذاتية المعممة $Ax = \lambda Mx$ تتصرف تماماً مثل $Ax = \lambda x$.

---

(١) اسرع طريق لانتاج مصفوفة فريدة هي $M^{-1}Ax = \lambda x$، لكن $M^{-1}A$ ليست متناظرة، لقد فضلنا أن نضع نصف M^{-1} في كل طرف من A فنحصل على مصفوفة متناظرة C^TAC.

تمـاريـن

٦-٣-١ من أجل المصفوفتين شبه المعرفتين :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ (رتبة ٢) } \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ (رتبة ١)}$$

اكتب x^TAx كمجموع مربعين و x^TBx كمربع واحد .

٦-٣-٢ طبق ثلاثة معايير على كل من المصفوفتين :

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

كي تقرر ما إذا كانت معرفة إيجابياً أو شبه معرفة إيجابياً أو غير معرفة .

٦-٣-٣ من أجل $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ تأكد من أن للقيم الذاتية للمصفوفة C^TAC إشارات القيم الذاتية للمصفوفة A نفسها . أنشئ سلسلة من المصفوفات غير الشاذة $C(t)$ تربط C بمصفوفة قائمة Q . لماذا يستحيل انشاء سلسلة غير شاذة تربط C بمصفوفة الوحدة ؟

٦-٣-٤ إذا كانت المحاور جميعها أكبر من ١ ، هل تكون حينئذ القيم الذاتية جميعها أكبر من ١ ؟ اختبر ذلك على مصفوفات ثلاثية الأقطار 1 ,-1,2,- .

٦-٣-٥ استخدم محاور المصفوفة $A - \frac{1}{2}I$ كي تقرر ما إذا كان للمصفوفة A قيم ذاتية أقل من $\frac{1}{2}$:

$$A - \tfrac{1}{2}I = \begin{bmatrix} 2.5 & 3 & 0 \\ 3 & 9.5 & 7 \\ 0 & 7 & 7.5 \end{bmatrix}.$$

٦-٣-٦ يبدأ برهان جبري *لقانون العطالة* بالمتجهات الذاتية المتعامدة النظامية $x_1, ..., x_p$ للمصفوفة A المقابلة للقيم الذاتية $\lambda_i > 0$ ، والمتجهات الذاتية المتعامدة النظامية $y_1, ..., y_q$ للمصفوفة C^TAC المقابلة للقيم الذاتية $\mu_i < 0$.

(أ) لبرهان أن $x_1, ..., x_p, Cy_1, ..., Cy_q$ مستقلة، نفرض تركيباً خطياً مساوياً الصفر :

$$a_1 x_1 + \ldots + a_p x_p = b_1 Cy_1 + \ldots + b_q Cy_q \quad (=z, \text{مثلاً}).$$

أثبت أن :

$$z^TAz = \lambda_1 a_1^2 + \ldots + \lambda_p a_p^2 \geq 0$$

وكذلك

$$z^TAz = \mu_1 b_1^2 + \ldots + \mu_q b_q^2 \leq 0$$

(ب) استنتج أن الأعداد a والأعداد b أصفار (مبرهناً الاستقلال الخطي). واستنتج من ذلك أن $p + q \leq n$

(جـ) يؤدي التبرير نفسه من أجل الأعداد λ السالبة التي عددها $n - p$ و الـ μ الموجبة التي عددها $n - q$ إلى $n - p + n - q \leq n$ (نفرض أنه لاتوجد قيم ذاتية صفرية ـ وهو مايناقش بشكل منفصل). أثبت أن $p + q = n$ وهكذا فإن العدد p للقيم λ الموجبة يساوي العدد $n - q$ للقيم μ الموجبة ـ وهو قانون العطالة.

٦-٣-٧ إذا كانت C غير شاذة، بين أن للمصفوفتين A و C^TAC الرتبة نفسها. (يمكن الرجوع إلى البند ٣-٦). لذا، فإن لهما العدد نفسه من القيم الذاتية الصفرية.

٦-٣-٨ أوجد، بالتجريب، عدد القيم الذاتية الموجبة والسالبة والصفرية للمصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} I & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix}$$

حيث الكتلة B (من المرتبة $\frac{1}{2}n$) غير شاذة.

٦-٣-٩ هل تحقق A و C^TAC قانون العطالة دوماً حينما تكون C غير مربعة ؟

٦-٣-١٠ في المثال المحلول حيث $m_1 = 1$ و $m_2 = 2$ ، تحقق من أن النموذج النظامي متعامد بوساطة M : $x_1^T Mx_2 = 0$. إذا أزيحت الكتلتان معاً بمقدار وحدة الأبعاد ثم اطلقتا بسرعتين إبتدائيتين $v_0 = -1 , w_0 = 1$ ، فأوجد المعاملات a_i في الحركة المحصلة $u = a_1 cos\, \omega_1 t\, x_1 + a_2 cos\, \omega_2 t\, x_2$. ماهو بعد الكتلة الأولى الأعظمي عن وضع التوازن (عندما يكون جيبا التمام مساويين +١ أو -١)؟

٦-٣-١١ أوجد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية لما يلي :

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} x = \frac{\lambda}{18} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} x.$$

٦-٣-١٢ إذا كانت المصفوفتان M و A ، اللتان من النوع 2×2 ، غير معرفتين فانه من الممكن ألا يكون للنظام $Ax = \lambda Mx$ قيم ذاتية حقيقية. أوجد مثالاً

٦-٤ مبادىء النهاية الصغرى ونسبة رايلي *Rayleigh*

في هذا البند، سنتهرب في الفترة الأولى من المعادلات الخطية. لن يعطى المجهول x كحل للنظام $Ax = b$ أو $Ax = \lambda x$ ، بل سيتعين وفق مبدأ النهاية الصغرى.

من المدهش أنه يمكن التعبير عن الكثير من القوانين الطبيعية بمبدأ النهاية الصغرى. في الواقع، هبوط السائل الثقيل إلى الأسفل ماهو إلا تصغير لطاقته الكامنة. وأنت عندما تجلس على كرسي أو تستلقي على سرير، فان النوابض تعدل نفسها بحيث تنقص طاقتها. حتماً، هناك العديد من الأمثلة العلمية العالية : البناء يشبه كرسياً معقداً جداً يحمل ثقله الذاتي، وإن المبدأ الأساسي في هندسة البناء هو تصغير الطاقة الكلية. في الفيزياء، يوجد « اللاغراجيان » « وتكامل الفعل» ؛ قشة على سطح الماء

تظهر ملتوية لأن النور يريد أن يصل إلى عينيك باسرع مايمكن [١].

يجب علي أن أذكر أن هذه «الطاقات» ماهي إلا شكل تربيعي معرف إيجابياً. من الواضح أن مشتقة شكل تربيعي هي دالة خطية. لذا، فإن إيجاد النهاية الصغرى سيعيدنا إلى المعادلات الخطية المعتادة، وذلك عندما نضع جميع مشتقات المرتبة الأولى مساوية الصفر. هدفنا الأول في هذا البند هو ***إيجاد مبدأ النهاية الصغرى المكافىء للنظام*** $Ax = b$، ***والآخر المكافىء للنظام*** $Ax = \lambda x$. سنعمل في فضاء عدد أبعاده محدود تماماً كما نجري حسابات التحولات في مسألة متصلة، حيث جعل المشتقة الأولى صفراً يعطي معادلة تفاضلية (معادلة أويلر). في كل حالة سنكون أحراراً في البحث عن حل لنظام المعادلات الخطية أو عن النهاية الصغرى للشكل التربيعي ـ وفي كثير من المسائل، كما يظهر ذلك في البند التالي، يجب أن لانتجاهل الاختيار الأخير.

الخطوة الأولى، فعلاً، غير معقدة: نريد أن نجد القطع المكافىء P الذي تقع نهايته الصغرى في النقطة التي يكون فيها $Ax = b$. إذا كان A عدداً فالعمل سهل:

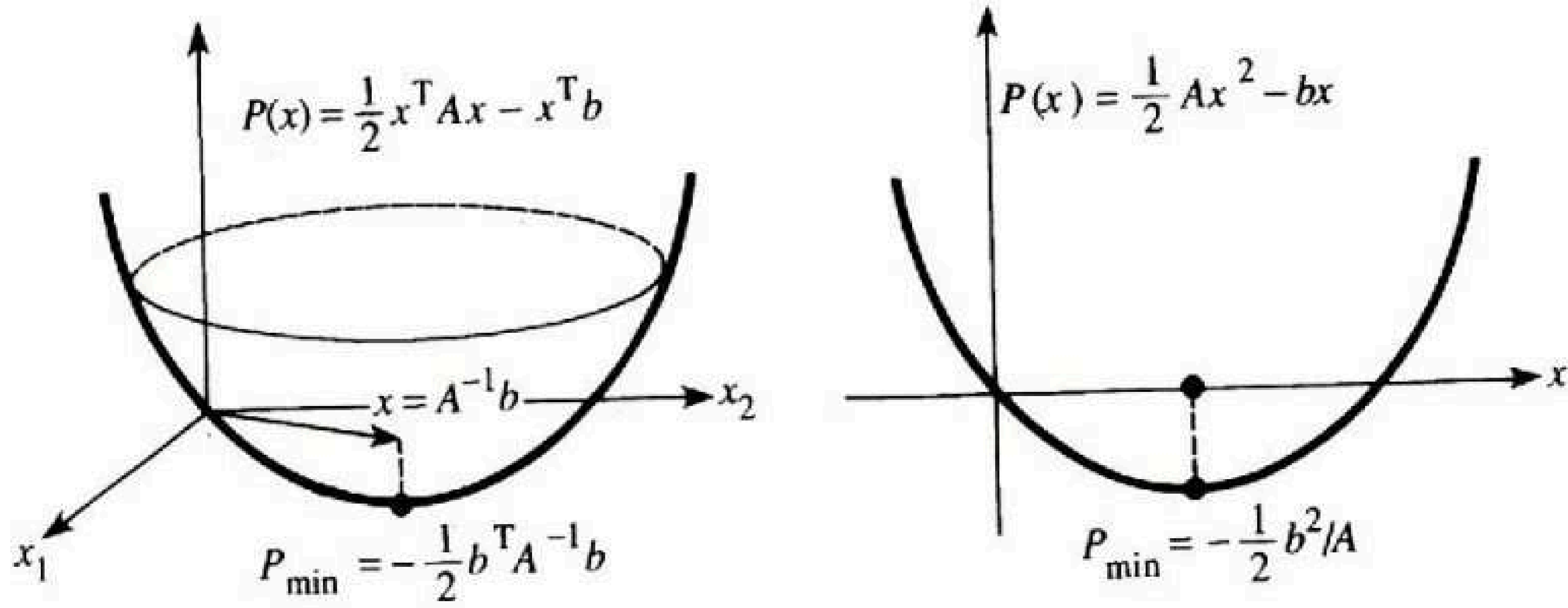
$$\frac{dP}{dx} = Ax - b \quad \text{و} \quad P(x) = \tfrac{1}{2} Ax^2 - bx$$

يكون ذلك في نهاية صغرى، فقط، إذا كانت A موجبة. إن القطع المكافىء مفتوح نحو الأعلى، وإن جعل المشتقة الأولى صفراً يعطينا $Ax = b$ (شكل ٦-٤). في الفضاء ذي الأبعاد المتعددة، ينقلب القطع المكافىء هذا إلى مجسم قطع مكافىء ولكن يبقى القانون ذاته من أجل P؛ ولتحقيق نهاية صغرى، هناك، أيضاً، شرط الإيجاب.

---

(١) لدي قناعة أكيدة أن النبات والانسان يتطوران وفقاً لمبدأ النهاية الصغرى. ربما تكون الحضارة نفسها مبنية حسب قانون الفعل الأصغر. إن اكتشاف مثل هذه القوانين يعتبر الخطوة الرئيسية في الانتقال من الملاحظات إلى التفسيرات ولابد أن هناك ما يمكن اكتشافه في مجال علمي الاجتماع والحياة.

٦ ح إذا كانت A معرفة إيجابياً فان $P(x) = \frac{1}{2} x^T Ax - x^T b$ يحقق نهايته الصغرى عند النقطة التي يكون فيها $Ax = b$. عند تلك النقطة يكون $P_{\min} = -\frac{1}{2} b^T A^{-1} b$.



(أ) قطع مكافىء (ب) طاس ذي بعدين

شكل (٦ – ٤). النهاية الصغرى لدالة تربيعية $P(x)$.

البرهان لنفرض أن x هو حل $Ax = b$. لأي متجه y، نجد:

$$\begin{aligned} P(y) - P(x) &= \frac{1}{2} y^T Ay - y^T b - \frac{1}{2} x^T Ax + x^T b \\ &= \frac{1}{2} y^T Ay - y^T Ax + \frac{1}{2} x^T Ax \\ &= \frac{1}{2} (y - x)^T A (y - x). \end{aligned} \quad (١)$$

لما كانت A معرفة إيجابياً، فإنه لايمكن لهذه الكمية أن تكون سالبة أبداً ـ وهي تساوي الصفر، فقط، عندما يكون $y - x = 0$. في جميع النقاط الأخر، يكون $P(y)$ أكبر من $P(x)$، لذا، فإن النهاية الصغرى تقع عند x.

مثال : أوجد النهاية الصغرى للدالة $P(x) = x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2 - b_1 x_1 - b_2 x_2$.

المعالجة المألوفة في حساب التفاضل هي في جعل المشتقات أصفاراً :

$$\partial P/\partial x_1 = 2x_1 - x_2 - b_1 = 0$$
$$\partial P/\partial x_2 = -x_1 + 2x_2 - b_2 = 0.$$

يكتب الجبر الخطي النتيجة نفسها على النحو $Ax = b$ ، يعين أولاً P بالصورة

$\frac{1}{2}x^T \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} x - x^T b$. تقع النهاية الصغرى عند $x = A^{-1}b$ حيث :

$$P_{min} = \frac{1}{2}(A^{-1}b)^T A(A^{-1}b) - (A^{-1}b)^T b = -\frac{1}{2} b^T A^{-1} b. \qquad (٢)$$

في التطبيقات $\frac{1}{2}x^T Ax$ تعني الطاقة الداخلية و $x^T b$ـ هو العمل الخارجي . النظام الفيزيائي يسير بشكل طبيعي إلى x، نقطة التوازن حيث تأخذ الطاقة الكلية P قيمتها الصغرى .

هدفنا الثاني هو إيجاد مسألة نهاية صغرى تكافىء $Ax = \lambda x$. إن ذلك ليس أمراً سهلاً . لايمكن للدالة التي سنجد نهايتها الصغرى أن تكون مجرد شكل تربيعي ، كما أن اشتقاقها لن يؤدي إلى معادلات خطية ـ مسألة القيم الذاتية هي ، بصورة رئيسية ، ليست خطية . الحيلة هي النظر في نسبة شكلين تربيعيين ، والنسبة التي نحتاجها تعرف باسم ***نسبة رايلي*** *Rayleigh* :

$$R(x) = \frac{x^T Ax}{x^T x}.$$

نتنقل مباشرة إلى النظرية الأساسية :

٦ ط *مبدأ رايلي* : تكون النسبة $R(x)$ في نهايتها الصغرى عند أول متجه ذاتي $x = x_1$ وتكون هذه النهاية الصغرى مساوية λ_1 أصغر القيم الذاتية :

$$R(x_1) = \frac{x_1^T A x_1}{x_1^T x_1} = \frac{x_1^T \lambda_1 x_1}{x_1^T x_1} = \lambda_1.$$

هندسياً ، لنفرض أننا ثبتنا البسط عند القيمة (١) وجعلنا المقام أكبر مايمكن . يعرف البسط $x^T Ax = 1$ مجسم قطع ناقص ، على الأقل ، إذا كانت A معرفة إيجابياً . المقام

هو $x^Tx = \|x\|^2$ ، وهذا يعني أننا نبحث عن أبعد نقطة، من مجسم القطع الناقص، عن نقطة الأصل ـ بقول آخر المتجه x هو الأكبر طولاً. نتيجة لوصفنا من قريب لمجسم القطع الناقص، نجد أن قطره الأكبر يتجه باتجاه المتجه الذاتي الأول.

جبرياً، من السهل أن نرى ذلك (دون ضرورة للتعريف الإيجابي). نقطِّر A بمصفوفة قائمة: نجد $Q^TAQ = \Lambda$. بفرض $x = Qy$:

$$R(x) = \frac{(Qy)^{\mathrm{T}}A(Qy)}{(Qy)^{\mathrm{T}}(Qy)} = \frac{y^{\mathrm{T}}\Lambda y}{y^{\mathrm{T}}y} = \frac{\lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_{\mathrm{n}} y_{\mathrm{n}}^2}{y_1^2 + \ldots + y_{\mathrm{n}}^2}. \qquad (٣)$$

تقع النهاية الصغرى لهذه النسبة حتماً عند النقطة التي يكون عندها $y_1 = 1, y_2 = \ldots\ldots = y_n = 0$. عند هذه النقطة، تكون النسبة مساوية λ_1، وفي أي نقطة أخرى تكون النسبة أكبر من ذلك :

$$\lambda_1(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_{\mathrm{n}}^2) \le (\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_{\mathrm{n}} y_{\mathrm{n}}^2).$$

إن نسبة رايلي ***لن تكون أقل من*** λ_1 ***ولن تكون أكبر من*** λ_n. إن نهايتها الصغرى ستكون عند المتجه الذاتي x_1 ونهايتها العظمى عند x_n. المتجهات الذاتية الوسطى تمثل نقاطاً سرجية.

إحدى النتائج المهمة هي : كل عدد قطري مثل a_{11} يقع بين λ_1 و λ_n. تساوي نسبة رايلي a_{11} عندما نختار المتجه $x = (1,0,\ldots\ldots,0)$.

مبادىء أصغر النهايات العظمى المتعلقة بالقيم الذاتية

الصعوبة في النقط السرجية هي أننا لانعرف فيما إذا كان $R(x)$ تقع فوقها أو تحتها. هذا يجعل إيجاد القيم الذاتية الوسطى $\lambda_2,\ldots\ldots,\lambda_{n-1}$ صعباً. في التطبيقات يوجد مبدأ مفيد فعلاً، هو مبدأ النهاية الصغرى أو العظمى. لذا، فإننا نبحث عن مثل هذا

المبدأ واضعين نصب أعيننا أن النهاية الصغرى أو العظمى ستتحقق عند المتجه الذاتي x_j (١). الفكرة الرئيسية تنبع من خاصة أساسية للمصفوفات المتناظرة : x_j متعامد مع بقية المتجهات الذاتية .

٦ ي لن تزيد النهاية الصغرى لـ $R(x)$، الخاضعة لشرط واحد $x^T_z = 0$ ، أبداً على λ_2 . إذا كان z هو المتجه الذاتي الأول، عندئذ، تكون هذه النهاية الصغرى المقيدة لـ R مساوية λ_2.

$$\lambda_2 \geq \min_{x^T z = 0} R(x) \quad \text{و} \quad \lambda_2 = \max_{z}\left[\min_{x^T z = 0} R(x)\right] \qquad (٤)$$

هذا هو «مبدأ النهاية العظمى» لـ λ_2 . إنه يعطينا طريقة لتقدير القيمة الذاتية الثانية دون معرفة القيمة الأولى .

مثال : لو استبعدنا السطر الأخير والعمود الأخير من أي مصفوفة متناظرة :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{تصبح} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

عندئذ ، تفوق القيمة الذاتية الثانية للمصفوفة A أصغر قيمة ذاتية لـ B. (في هذا المثال، العددان هما ٢و١) . أصغر قيمة ذاتية لـ A، وهي $2 - \sqrt{2} \approx 0.6$ أقل من أصغر قيمة ذاتية لـ B .

البرهان : إن نسبة رايلي لـ B تتطابق مع نسبة رايلي لـ A عندما $x = (x_1, x_2, 0)$. هذه هي

---

١) إن هذا الموضوع خاص بعض الشيء ، وإن إيجاد النهاية الصغرى لـ $P(x)$ و $R(x)$ هو ما ترتكز عليه طريقة العنصر المحدود. ليس هناك أي صعوبة بالتحول إلى البند (٦-٥).

المتجهات المتعامدة مع $z = (0,0,1)$، ومن أجل هذه المتجهات، نجد أن : $x^T Ax = x^T Bx$. النهاية الصغرى على القيم x هذه، هي أصغر قيمة ذاتية $\lambda_1(B)$. لا يمكنها أن تقل عن أصغر قيمة ذاتية لـ A، لأنها النهاية الصغرى على قيم x. إلا أن $\lambda_1(B)$ سوف تكون أقل من القيمة الذاتية الثانية لـ A. السبب : هو أن أحد التراكيب الخطية للمتجهين الذاتيين الأولين لـ A يتعامد مع z. إذا عوضنا ذلك التركيب الخطي في نسبة رايلي فإننا نحصل على عدد أقل من $\lambda_2(A)$ وأكبر من $\lambda_1(B)$. لذا، فإن $\lambda_2(A) \geq \lambda_1(B)$.

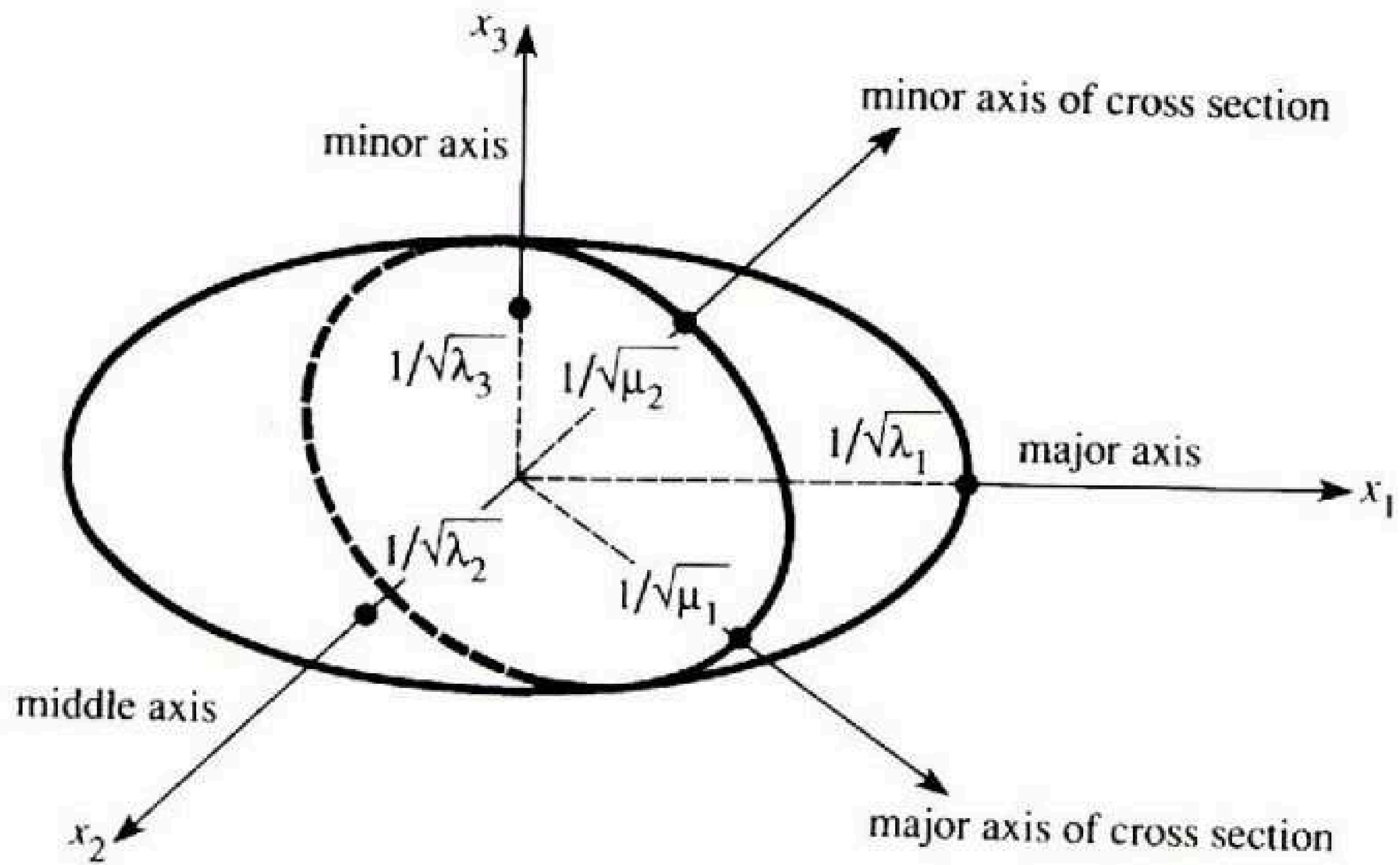
الصورة الكاملة هي ***حصر القيم الذاتية*** :

$$\lambda_1(A) \leq \lambda_1(B) \leq \lambda_2(A) \leq \lambda_2(B) \leq \ldots \leq \lambda_{n-1}(B) \leq \lambda_n(A). \quad (٥)$$

هندسياً، لهذه المتراجحات تفسير طبيعي. لنفرض أن مجسم قطع ناقص قُطِع بمستو مار من نقطة الأصل، سيكون المقطع مجسم قطع ناقص عدد أبعاده أقل بواحد عن عدد أبعاد الأصلي. لا يمكن أن يزيد طول المحور الكبير لهذا المقطع عن طول المحور الكبير للمجسم الأصلي : $\lambda_1(B) \geq \lambda_1(A)$. إلا أن المحور الكبير للمقطع هو على الأقل، مساوياً طول المحور الثاني للمجسم الأصلي : $\lambda_1(B) \leq \lambda_2(A)$. بشكل مشابه، المحور الصغير للمقطع أصغر من المحور الثاني الأصلي وأكبر من المحور الصغير الأصلي : $\lambda_2(A) \leq \lambda_2(B) \leq \lambda_3(A)$.

في إحدى الحالات الخاصة، عندما يكون المستوي القاطع متعامداً مع المحور الكبير الأصلي، يكون $\lambda_1(B) = \lambda_2(A)$. بشكل عام، إذا كان المستوي القاطع هو المستوي الأفقي $x_3 = 0$، فاننا نتوقع متراجحة. المتجه العمودي على هذا المستوي القاطع هو $z = (0,0,1)$، وقد استبعدنا السطر الأخير والعمود الأخير من A.

يمكننا أن نرى الشيء ذاته في الميكانيك : ليكن لدينا نظام اهتزاز مكون من نوابض وكتل، لنفرض أن إحدى الكتل أجبرت أن تبقى في حالة سكون. حينئذ، يتزايد التواتر الأصغر، لكنه لن يزيد على λ_2. أما التواتر الأعظم فانه يتناقص ولكنه لن يقل عن λ_{n-1}.



شكل (٦ – ٥) . مبدأ النهاية العظمى وأصغر النهايات العظمى $\lambda_1 \leq \mu_1 \leq \lambda_2 \leq \mu_2 \leq \lambda_3$.

حان الوقت لندور حول هذه النظريات كي نصل إلى مبدأ ***أصغر نهاية عظمى*** . يعني ذلك أن نجعل نسبة رايلي في نهايتها العظمى ، ثم ، نميز النهاية الصغرى الممكنة لهذه النهاية العظمى .

هناك عدد من الطرائق للمعالجة يتعلق كل منها بالقيمة الذاتية التي نريدها . لإيجاد أكبر قيمة ذاتية λ_n ، نجعل $R(x)$ في نهايتها العظمى فنحصل عليها . لكن ، لنفرض أننا نريد البقاء مع λ_2 . لما كانت نسبة رايلي تساوي :

$$\frac{\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2}{y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2},$$

فإن طريقة الحصول على λ_2 كنهاية عظمى هو أن نتطلب كون $y_3 = \ldots\ldots = y_n = 0$. هذه القيود التي عددها $n - 2$ تترك فضاءً ذا بعدين فقط ، إنه الفضاء الجزئي المولد بالمتجهين الذاتيين الأولين . على هذا الفضاء الجزئي ذي البعدين ، تكون النهاية الصغرى للنسبة $R(x)$ هي λ_2 ـ لكن المتجهان الذاتيان x_1 و x_2 جزء من هذه المسألة وهما غير معلومين .

عندما حصلت هذه الحالة لمبدأ النهاية العظمى، كانت الفكرة الأساسية هي السعي إلى النهاية الصغرى تحت قيد واحد هو ($x^T z =$. لذا نحاكي هذه الفكرة ونسعى بـ ($R(x)$ *نحو نهايتها العظمى على فضاء جزئي اختياري ذي بعدين*. لايمكننا أن نعرف ما إذا كان هذا الفضاء الجزئي حاوياً أي متجه ذاتي؛ إن ذلك، فعلاً، بعيد الاحتمال. على الرغم من ذلك، توجد متراجحة تتعلق بالنهاية العظمى. لقد كانت النهاية الصغرى سابقاً تحت القيد ($x^T z =$ ، أصغر من λ_2؛ والآن ستكون النهاية الصغرى على الفضاء الجزئي أكبر من λ_2. إذا كان S_2 أي فضاء جزئي ذي بعدين من R^n، فإن:

$$\max_{x \text{ في } s_2} R(x) \le \lambda_2 . \qquad (٦)$$

البرهان إذا كان x متجهاً من الفضاء الجزئي ومتعامداً مع المتجه الذاتي الأول x_1، فمن المعلوم، من أجل هذا المتجه x الخاص، أن $R(x) \ge \lambda_2$. ينتج عن ذلك مبدأ أصغر النهايات العظمى مباشرة:

٦ ك إذا جعلت ($R(x)$ في نهايتها العظمى على كل فضاء جزئي ممكن ذي بعدين S_2، فان قيمة أصغر النهايات العظمى هي λ_2:

$$\lambda_2 = \min_{S_2} \left[\max_{x \text{ في } s_2} R(x) \right]. \qquad (٧)$$

لايمكن للكمية الموجودة ضمن الحاضنتين أن تكون أصغر من λ_2 استناداً إلى (٦)، وتكون من أجل الفضاء الجزئي الخاص المولد بالمتجهين الذاتيين الأولين مساوية λ_2. ننهي هذا البند بملاحظتين. أتمنى أن يدرك حدسكم أنهما صحيحتان دون براهين مفصلة.

ملاحظة ١ يتوسع مبدأ أصغر نهاية عظمى من فضاء جزئي ذي بعدين إلى فضاء جزئي ذي j بعداً وينتج λ_j:

$$\lambda_j = \min_{S_j} \left[\max_{x \text{ في } s_j} R(x) \right]. \quad (٨)$$

ملاحظة ٢ نبقى، في مسألة القيم الذاتية المعممة $Ax = \lambda Mx$، جميع المبادىء ذاتها صحيحة إذا جعلنا مقام نسبة رايلي x^TMx عوضاً عن x^Tx. إذا عوضنا $x = Sz$ ووضعنا المتجهات الذاتية للمصفوفة $H^{-1}A$ في أعمدة S، فان $R(x)$ تتبسط إلى الصورة :

$$R(x) = \frac{x^TAx}{x^TMx} = \frac{\lambda_1 z_1^2 + \dots + \lambda_n z_n^2}{z_1^2 + \dots + z_n^2}. \quad (٩)$$

لقد كانت هذه النقطة هي تقطير المصفوفتين A و M معاً في البند (٦-٣). كل من الشكلين التربيعيين أصبح مجموع مربعات كاملة وكانت $\lambda_1 = \min R(x)$ مثلما كانت $\lambda_n = max\, R(x)$. بالفعل، عندما جعلنا في نظام الاهتزاز ذي الكتلتين واحدة من الكتلتين ساكنة، فان التواتر الأصغر قد ازداد وتناقص التواتر الأعظم.

تمارين

٦-٤-١ انظر في النظام $Ax = b$ المعطى بما يلي :

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

انشىء الشكل التربيعي المقابل $P(x_1, x_2, x_3)$، احسب المشتقات الجزئية $\frac{\delta P}{\delta x_i}$ وحقق أنها تنعدم عند الحل المطلوب.

٦-٤-٢ $P = \frac{1}{2}x^TAx - x^Tb = \frac{1}{2}(x - A^{-1}b)^TA(x - A^{-1}b) + const$ هذا الثابت هو p_{min} لأن الحد الذي قبله لايمكن أن يكون سالباً. (لماذا) ؟

٦-٤-٣ أوجد النهاية الصغرى، إذا وجدت، لـ $P_1 = \frac{1}{2}x^2 + xy^2 + y - 3y$ ولـ

$P_2 = \frac{1}{2}x^2 - 3y$. ماهي المصفوفة الموافقة لـ P_2؟

٦-٤-٤ شكل تربيعي آخر تقع نهايته الصغرى عند $Ax = b$ هو :

$$Q(x) = \frac{1}{2}\|Ax - b\|^2 = \frac{1}{2}x^TA^TAx - x^TA^Tb + \frac{1}{2}b^Tb.$$

قارن Q مع P باهمال الثابت $\frac{1}{2}P^Tb$ ، ماهي المعادلات التي تصل إليها عند نهاية Q الصغرى ؟ ماذا كانت تسمى هذه المربعات في نظرية المربعات الأصغرية ؟

٦-٤-٥ لكل مصفوفة متناظرة، احسب النسبة $R(x)$ من أجل الاختيار الخاص $x = (1,....,1)$. ماهي العلاقة بين مجموع العناصر a_{ij} مع λ_1 و λ_n ؟

٦-٤-٦ من أجل المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$، أوجد اختياراً x يعطي أصغر قيمة لـ $R(x)$ بحيث ينتج الحد $\lambda_1 \leq 2$ عن عناصر القطر . ما هي القيمة الأصغرية لـ $R(x)$ ؟

٦-٤-٧ إذا كانت B معرفة إيجابياً، برهن، انطلاقاً من نسبة رايلي، أن أصغر قيمة ذاتية لـ $A+B$ أكبر من أصغر قيمة ذاتية لـ A .

٦-٤-٨ إذا كانت λ_1 أصغر قيمة ذاتية لـ A و μ_1 أصغر قيمة ذاتية لـ B، برهن أن أصغر قيمة ذاتية θ_1 لـ $A+B$ هي، على الأقل، أكبر من $\lambda_1+\mu_1$. (جرب المتجه الذاتي المقابل x في نسبة رايلي .)

تنبيه : يمكن أن يكون هذان التمرينان أكثر نموذجية وأهم ماينتج عن مبدأ رايلي بسهولة، لكن ذلك ينتج بصعوبة من معادلات القيم الذاتية ذاتها .

٦-٤-٩ إذا كانت A معرفة إيجابياً ، برهن انطلاقاً من مبدأ النهاية الصغرى للنهاية العظمى (٧)، أن القيمة الذاتية الثانية في الصغر تزداد باضافة B : $\lambda_2(A+B) > \lambda_2(A)$.

٦-٤-١٠ إذا حذفت عمودين من A، ماهي المتراجحة التي تتوقعها بين أصغر قيمة ذاتية μ للمصفوفة الباقية والقيم الذاتية الأصلية λ ؟

٦-٤-١١ أوجد القيم الأصغرية لكل مما يلي :

$$R(x) = \frac{x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} \quad \text{و} \quad R(x) = \frac{x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2}{2x_1^2 + x_2^2}.$$

٦-٤-١٢ برهن، انطلاقاً من (٣) أنه لايمكن أبداً لـ $R(x)$ أن يكون أكبر من القيمة الذاتية λ_n .

٦-٤-١٣ مبدأ النهاية الصغرى للنهاية العظمى المتعلق بالقيمة الذاتية ذات الترتيب j يحوي مصفوفة جزئية S_j عدد أبعادها j :

$$\lambda_j = \min_{S_j} \left[\max_{x \text{ in } S_j} R(x) \right].$$

(أ) إذا كانت λ_j موجبة ، استنتج أن كل S_j يحوي متجهاً x يحقق $R(x) > 0$.

(ب) استنتج أن كل S_j يحوي متجهاً $y = c^{-1}x$ يحقق $\overline{R}(y) = y^T c^T ACy / y^T y > 0$.

(جـ) استنتج أن القيمة الذاتية الـ j للمصفوفة c^TAC، انطلاقاً من مبدأ النهاية الصغرى للنهاية العظمى ، موجبة أيضاً ـ نبرهن بذلك أيضاً قانون العطالة (أقدِّم شكري لجامعة مينيسوتا *Minnesoto*)

٦-٤-١٤ برهن أن أصغر قيمة ذاتية λ_1 لـ $Ax = \lambda Mx$، ليست أكبر من النسبة a_{11}/m_{11} لعنصري القرنتين .

٦-٤-١٥ أي فضاء جزئي خاص، في مبدأ النهاية الصغرى للنهاية العظمى (٧)، يعطي القيمة الصغرى λ_2 ؟ بعبارة أخرى، على أي S_2 تكون النهاية

العظمى لـ $R(x)$ مساوية λ_2 ؟

٦-٤-١٦ بدون حساب للقيم الذاتية، قرر عدد الموجب والسالب والصفري من القيم الذاتية للمصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & . & 0 & 1 \\ . & . & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & . \\ 1 & 2 & . & n \end{bmatrix}.$$

٦ - ٥ طريقة العنصر المحدود

لقد حوى البند السابق فكرتين أساسيتين :

(١) حل النظام $Ax = b$ يكافيء جعل $P(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - x^T b$ في نهايته الصغرى.

(٢) حل النظام $Ax = \lambda_1 x$ يكافيء جعل $R(x) = x^T Ax / x^T x$ في نهايته الصغرى.

نريد الآن محاولة بيان كيف يمكن تطبيق هاتين الفكرتين.

القصة طويلة، لأن هذا التكافؤ معروف قبل أكثر من قرن. في بعض المسائل التقليدية، في هندسة البناء والفيزياء، مثل التواء صفيحة معدنية أو الحالات الدنيا للذرة (القيم الذاتية والدوال الذاتية)، كانت هذه النهايات الصغرى تستخدم للحصول على تقريبات ضعيفة الدقة للحل. في بعض الحالات، يضطر قبولها؛ كانت الأدوات الوحيدة المستخدمة هي القلم والورق وآلة صغيرة. لقد كانت المبادىء الرياضية موجودة ولكنها غير مطبقة.

من الواضح أن الحواسيب الرقمية أدت إلى ثورة، لكن الخطوة الأولى لهذه الثورة كانت إهمال مبادىء النهاية الصغرى؛ بدعوى أنها قديمة جداً وبطيئة جداً. لقد قفزت إلى الأمام طريقة الفروق المحدودة، لأنه كان من السهل معرفة كيف يعطى لمعادلة تفاضلية شكل منفصل. لقد رأينا سابقاً في البند (١-٧) كيف عوضت كل مشتقة بنسبة فرقين. غطيت المنطقة الفيزيائية بشبكة وفي كل نقطة من خلية الشبكة كان $-u_{j+1} + 2u_j - u_{j-1} = hf_j$. تمثل هذه المسألة بالمعادلة $Au = f$ _ واهتم التحليل العددي

في الخمسينات من هذا القرن بتطوير طرق سريعة لحل أنظمة ضخمة ومتناثرة .

الشيء الذي لم ندركه تماماً هو أنه حتى مسائل الفروق المحدودة ، تصبح معقدة بصورة لاتوصف من أجل مسائل هندسية فعلية مثل إجهاد طائرة أو التوتر الطبيعي لجمجمة إنسان . *الصعوبة الحقيقية ليست في حل المعادلات بل بتنظيمهما* . من أجل منطقة غير منتظمة ، نحتاج إلى شبكة غير منتظمة مقسمة في وقت معاً ، إلى مثلثات أو رباعيات أو رباعيات وجوه ثم نحتاج إلى طريقة نظامية لتقريب القوانين الفيزيائية الأساسية . بقول آخر ، لايكتفي الحاسوب بالمساعدة في حل مسائل منفصلة بل يساعد أيضاً بصياغتها .

بامكانك أن تخمن كيف حدث ذلك . لقد عادت الطرائق القديمة من جديد ولكنها باسماء جديدة وافكار جديدة . الاسم الجديد هو ***طريقة العنصر المحدود*** والفكرة الجديدة جعلت من الممكن استخدام قدرة الحاسوب الآلي بصورة واسعة ـ بتكوين تقريبات منفصلة وحلها واظهار النتائج ـ مثل أي تقنية أخرى في الحسابات العلمية . النقطة الأساسية . هي أن تظل الافكار الرياضية الأساسية بسيطة ؛ ومن الممكن أن تكون التطبيقات معقدة . انتقل تضخم هذه التطبيقات بعيداً من تصميم طائرة إلى دراسة أمان مفاعل ذري ، ويجري الآن نقاش عنيف لتمديد ذلك إلى ميكانيك السوائل . من أجل مسألة من هذا المستوى ، الصعوبة غير المتنازع فيها هي الكلفة ـ شيء رهيب ! بلغ التقدير المتحفظ للانفاق حتى الآن بليون دولار . نأمل أن يهتم بعض القراء باتقان طريقة العنصر المحدود وأن يضعها في الاستعمال الصحيح .

لتوضيح هذه الطريقة نبطلق من ***مبدأ رايلي – ريتز*** ***Rayleigh - Ritz*** التقليدي ، ثم ، ندخل فكرة العناصر المحدودة الجديدة . يمكننا أن نعمل على المعادلة التفاضلية ذاتها $-u''=f(x)$ بشروط البدء نفسها $u(0)=u(1)=0$ ، وقد درست ، من قريب ، بالفروق المحدودة . من المفروض أن هذه المسألة ذات لانهاية من الأبعاد ، حيث استعيض عن المتجه b بدالة f وعن المصفوفة A بالمؤثر $-d^2/dx^2$. إلا أنه يمكننا أن

نعمل بصورة مشابهة، ونظهر الشكل التربيعي الذي يطلب جعله في نهايته الصغرى، وذلك بتعويض الجداء الداخلى بتكامل :

(١) $$P(v) = \frac{1}{2} v^T A v - v^T b = \frac{1}{2} \int_0^1 v(x)\,(-v''(x))\,dx - \int_0^1 v(x)\, f(x)\, dx.$$

على هذا التكامل أن يسعى إلى نهايته الصغرى على كل دالة v تحقق شروط الحدود، ***والدالة التي تعطي النهاية الصغرى التي ستكون الحل*** u . لقد تحولت المعادلة التفاضلية إلى مبدأ نهاية صغرى وبقي علينا أن نكامل بالتجزئة :

$$P(v) = \frac{1}{2} \int_0^1 (v')^2\, dx - \int_0^1 vf\, dx \quad \text{لذا} \quad \int_0^1 v(-v'')\, dx = \int_0^1 (v')^2\, dx - \left[vv'\right]_{x=0}^{x=1}$$

الحد vv' يساوي الصفر عند حدي التكامل وذلك لأن $v=0$ هناك. التكامل $\int (v')^2$ متناظر، مثل $x^T Ax$، بالاضافة إلى كونه موجباً؛ لقد ضمنا الآن نهاية صغرى.

كيف وجدنا هذه النهاية الصغرى ؟ حسابها بدقة يكافيء تماماً حل المعادلة التفاضلية بدقة، إن هذه المسألة لانهائية الأبعاد. ينتج مبدأ رايلي - ريتز مسألة ذات n بعداً باختيار n دالة تجربة، فقط $v = V_1, \ldots\ldots, v = V_n$. يقبل كل تركيب من الصورة $V = y_1 V_1(x) + \ldots + y_n V_n(x)$ ، ثم يحسب التركيب الخاص U الذي يجعل $P(v)$ في نهايتها الصغرى. لنعيد : الفكرة هي السعي إلى النهاية الصغرى على فضاء جزئي عوضاً عن جميع الدوال v الممكنة، وجعل الدالة التي تعطي النهاية الصغرى U بدلاً من u.

إذا وضعنا V عوضاً عن v ، يأخذ التكامل الصورة :

(٢) $$P(V) = \frac{1}{2} \int_0^1 (y_1 V'_1 + \ldots + y_n V'_n)^2\, dx - \int_0^1 (y_1 V_1 + \ldots + y_n V_n) f\, dx.$$

لنذكر أن الدوال V قد اختيرت مسبقاً؛ المجاهيل هي $y_1, \ldots, y_n$. إذا وضعنا هذه

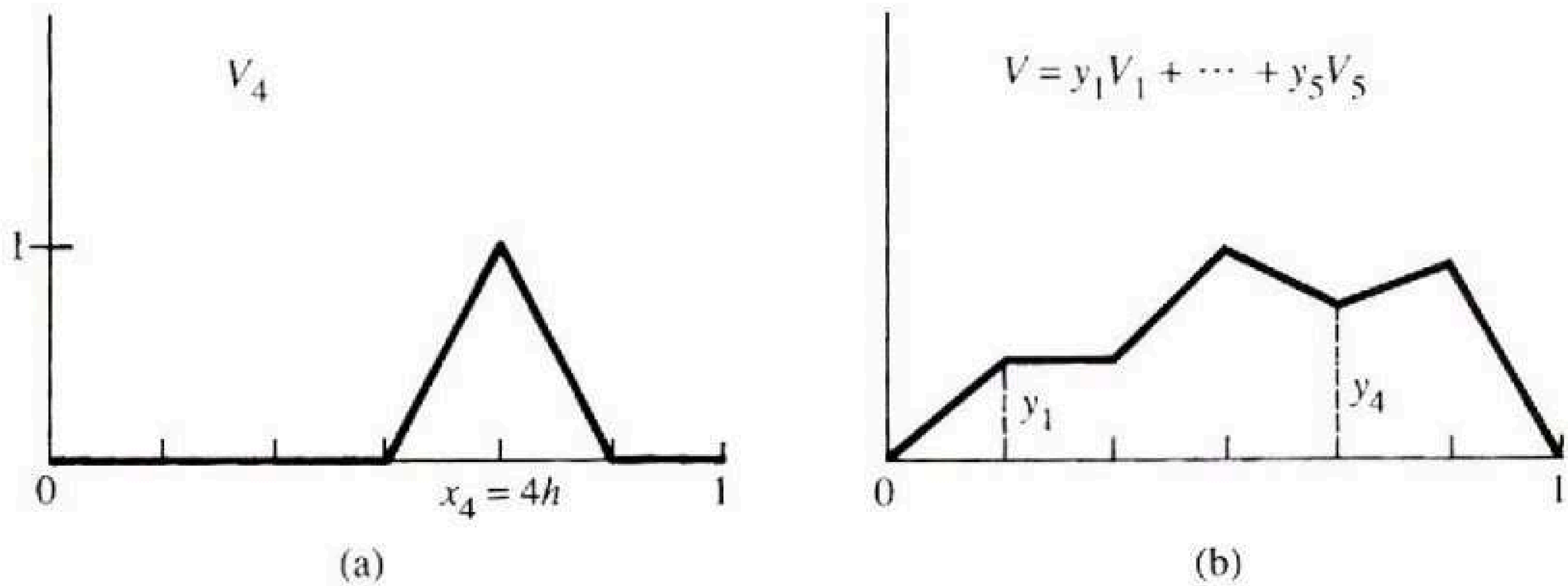
الاحمال في متجه y ، فإن $P(V) = \frac{1}{2}y^TAy - y^Tb$ يظهر بأحد الاشكال التربيعية التي اعتدناها . عناصر المصفوفة A_{ij} التي هي معاملات y_iy_j تساوي $\int v'_i v'_j dx$ ، والمركبة b_j هي $\int v_j f dx$ وهو معامل y_j . يمكننا حتماً إيجاد

النهاية الصغرى لـ $\frac{1}{2}y^TAy - y^Tb$ ؛ إن ذلك يكافيء حل $Ay = b$. بناء على ذلك، فإن خطوات طريقة رايلي - ريتز هي(1) اختيار دوال التجربة، (٢) حساب المعاملات A_j و b_j، (٣) حل النظام $Ay = b$ و (٤) طبع الحل التقريبي $U = y_1v_1 + \ldots + y_nv_n$:

كل شيء يتعلق بالخطوة الأولى . إذا لم تكن الدوال V_j بسيطة جداً، فإن الخطوات الأخرى ستكون فعلاً مستحيلة . إذا لم يكن تركيب للدوال V_j قريباً من الحل الصحيح u، فان هذه الخطوات لا نفع فيها . المسألة هي تركيب الحساب مع الدقة، ***والفكرة الأساسية لجعل طريقة العنصر المحدود ناجحة هي استخدام كثيرات الحدود قطعة فقطعة كدوال تجربة*** V .

أبسط العناصر واكثرها استخداماً هو كثيرة الخطوط الخطية . نبدأ بوضع عقد في النقاط $x_1 = h, x_2 = 2h, \ldots, x_n = nh$ تماماً مثل ما فعلنا سابقاً من أجل الفروق . في النقطتين النهائيتين $x_0 = 0, x_{n+1} = 1$ تستدعي شروط البدء، أن تكون كل دالة V مساوية للصفر . لذا، فإن الدالة V_j هي دالة سقف وهي تساوي الواحد عند العقدة x_j والصفر عند بقية العقد (شكل ٦-٦ (a)) . إنها متكاثفة في فترة صغيرة حول عقدتها وهي تساوي الصفر في أي موضع آخر . يجب أن يساوي كل تركيب $y_1V_1 + \ldots + y_nV_n$ القيمة y_j عند العقدة j ، لأن بقية الدوال V أصفار، لذا، فإن بيان هذا التركيب سهل الرسم (شكل ٦-٦-ب).

هذا ينهي الخطوة الأولى. بعد ذلك، نحسب المعاملات $A_{ij} = \int v'_i v'_j \, dx$ في «مصفوفة الصلابة» A. الميل V'_j يساوي 1/h في الفترة الصغيرة الواقعة عن يسار x_j ويساوي 1/h- في الفترة اليمنى. الأمر ذاته صحيح من أجل V'_i قرب



شكل (٦ – ٦) الدوال العليا وتركيباتها الخطية.

عقدتها x_i ***وإذا لم يكن بين هاتين الفترتين اشتراك فإن الجداء*** $V'_i V'_j$ ***يطابق الصفر.*** يقع هذا الاشتراك، فقط، عندما يكون:

$$\int V'_i V'_j \, dx = \int \left(\frac{1}{h}\right)^2 + \int \left(-\frac{1}{h}\right)^2 = \frac{2}{h}, \quad \text{و} \quad i = j$$

أو

$$\int V'_i V'_j \, dx = \int \left(\frac{1}{h}\right)\left(\frac{-1}{h}\right) = \frac{-1}{h} \quad \text{و} \quad i = j \pm 1$$

وعندئذ تكون مصفوفة الصلابة ثلاثية الأقطار فعلاً:

$$A = \frac{1}{h}\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

يظهر هذا، تماماً، مثل حالة الفروق ! لقد أدى ذلك إلى ألف نقاش حو ل العلاقة بين هاتين الطريقتين. كثير من مسائل العناصر المحدودة المعقدة ـ كثيرات حدود من درجات عليا عرفت على مثلثات أو على رباعيات وجوه من أجل معادلات تفاضلية جزئية ـ أنتجت أيضاً، مصفوفات متناثرة A. يمكنك أن تعتبر أن طريقة العناصر المحدودة طريقة نظامية لإنشاء معادلات فروق دقيقة على شبكات غير منتظمة، بحيث تقع طريقة العناصر المحدودة في تقاطع طريقة رايلي ـ رايتز وطريقة الفروق المحدودة. الشيء الأساسي هو بساطة طريقة كثيرات الحدود قطعة فقطعة؛ على كل فترة جزئية من السهل إيجاد الميول ومكاملاتها.

إن مركبات b_j في الطرف الأيمن جديدة. عوضاً عن قيمة f عند x_j التي هي فرق محدود، أصبحت الآن متوسط f حول هذه النقطة : $b_j = \int V_i\, f\, dx$. ثم نحل في الخطوة (٣) النظام الثلاثي الأقطار $Ay = b$ الذي يعطي المعاملات في دالة التجربة الخاصة $U = y_1 V_1 + ...+ y_n V_n$ التي انهيت إلى نهايتها الصغرى. أخيراً، بالوصل بين هذه القيم العليا y_j بخط منكسر، نجد رسماً للحل التقريبي U.

مثال $-u'' = 2$ بشرط بدء $u(0) = 0, u(1) = 0$، الحل هو $u = x - x^2$. سيستخدم التقريب ثلاث فترات بـ $h = \frac{1}{3}$ ودالتي سقف. المصفوفة A قد كونت من قبل، ويحتاج المتجه b إلى تكامل دالة السقف مضروبة بـ f عدة مرات. بما أن $f = 2$، فإن ذلك ينتج ضعفي المساحة الواقعة تحت السقف :

$$b = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \quad و \quad A = 3\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

حل $Ay = b$ هو $y = (\frac{2}{9}, \frac{2}{9})$. لذا، فإن أفضل U هو $\frac{2}{9}V_1 + \frac{2}{9}V_2$. في هذه الحالة،

يتفق هذا الحل مع الحل الصحيح $\frac{1}{9} - \frac{1}{3} = u = x - x^2$ أو $(\frac{4}{9} - \frac{2}{3})$ في نقطتي العين.

في أمثلة أكثر تعقيداً، لن تكون التقريبات صحيحة عند العقد، ولكنها قريبة بصورة ملاحظة. النظرية الأساسية مشروحة في كتاب للمؤلف: *An Analysis of the Finite Element Method*، الذي كتب بالاشتراك مع *Georges Fix* ـ (*Printice Hall* 1973). تعطي كتب أخرى تطبيقات هندسية وأنظمة حاسوب. لقد أصبح موضوع العناصر المحدودة جزءً مهماً من التعليم الهندسي؛ وقد عولج بتوسع أكبر في كتابي الجديد *Introduction to applied Mathematics* (*Wellesley __ Cambrdge Presse* 1986). كما أنني ناقشت هناك معادلات تفاضلية جزئية، عندما جاءت الطريقة فعلاً بصورة مستقلة.

مسائل القيم الذاتية

إن فكرة رايلي - رايتز التي تستدعي السعي إلى النهاية الصغرى على مجموعة من الدوال V ذات عدد منته من الأبعاد، عوضاً عن جميع الدوال المقبولة v ـ مستخدمة في مسائل القيم الذاتية مثلما كانت مستخدمة في معادلات الحالات الثابتة. في هذه المرة ستكون نسبة رايلي هي التي تسعى نحو نهايتها الصغرى. نهايتها الصغرى الحقيقية هي التواتر الأساسي λ_1، وستزداد نهايتها الصغرى التقريبية Λ_1 عندما نقصر صنف دوال التجربة v على الدوال V. ستكون المسألة المنفصلة سهلة الانقياد من جديد، ويمكن، فعلاً، للمبدأ أن يطبق، وذلك فقط عندما تكون الدوال V_j سهلة الحساب. ومع ذلك، فان المرحلة التي أخذ فيها بهذا المبدأ، خلال الثلاثين سنة الماضية، كانت طبيعية تماماً وحتمية: تطبيق أفكار العنصر المحدود الجديدة على هذا الشكل التحولي لمسألة القيم الذاتية الذي توطد منذ زمن طويل.

أفضل مثال لذلك هو التالي وهو الأكثر بساطة:

$$- u'' = \lambda u \quad \text{بـ} \quad u(0) = u(1) = 0$$

المتجه الذاتي الأول هو $u = \sin \pi x$ ، المقابل للقيمة الذاتية $\lambda_1 = \pi^2$. تعطي الدالة $v = \sin \pi x$ النهاية الصغرى في نسبة رايلي المقابلة،

$$R(v) = \frac{v^T\left[-d^2/dx^2\right]v}{v^Tv} = \frac{\int_0^1 v\,(-v'')\,dx}{\int_0^1 v^2\,dx} = \frac{\int_0^1 (v')^2\,dx}{\int_0^1 v^2\,dx}.$$

فيزيائياً، تلك هي النسبة بين الطاقة والقدرة الحركية، وهي متوازنة مع المتجه الذاتي. عادة، يمكن أن يكون هذا المتجه الذاتي مجهولاً. ولتقريبه، نقبل، فقط، الدالة المرشحة لذلك $V = y_1V_1 + \ldots + y_nV_n$:

$$R(V) = \frac{\int_0^1 (y_1V'_1 + \ldots + y_nV'_n)^2\,dx}{\int_0^1 (y_1V_1 + \ldots + y_nV_n)^2\,dx} = \frac{y^TAy}{y^TMy}.$$

نواجه الآن مسألة إنهاء النسبة y^TAy / y^TMy إلى نهايتها الصغرى. إذا كانت M مصفوفة الوحدة، فان ذلك يؤدي إلى مسألة القيم الذاتية المعتادة $Ay = \lambda y$. لكن، يمكن لمصفوفتنا أن تكون ثلاثية الأقطار، وهذا هو الوضع الذي ظهر، فعلاً، في *مسألة القيمة الذاتية المعممة*. قيمة النهاية الصغرى Λ_1 هي أصغر قيمة ذاتية للنظام $Ay = \lambda My$ ؛ ستكون قريبة من π^2. المتجه الذاتي المقابل y سيعطي تقريباً إلى الدالة الذاتية : $U = y_1V_1 + \ldots + y_nV_n$.

مثلما هو في مسألة الإحصاء، يمكن تلخيص الطريقة بأربع مراحل (١) اختيار V_j؛ (٢) حساب A و M ؛ (٣) حل $Ay = \lambda My$؛ (٤) إظهار Λ_1 و U . لا أدري لماذا تبلغ الكلفة ملياراً.

تمارين

٦-٥-١ استخدم ثلاث دوال سقف بـ $h = \frac{1}{4}$ لحل $-u'' = 2$ ، بفرض $u(0) = u(1) = 0$ وتحقق من كون التقريب يتفق مع $u = x - x^2$ عند العقد.

٦-٥-٢ حل $-u'' = x$ بفرض أن $u(0) = u(1) = 0$ ، ثم، حلها بالتقريب بدالتين سقفيتين وبـ $h = \frac{1}{3}$. أين يقع الخطأ الأكبر ؟

٦-٥-٣ نفرض أن $-u'' = 2$ بشرط بدء $u(0) = 0 , u'(1) = 0$. الشرط المفروض على u' «طبيعي» ولا يفرض على دوال التجربة. بـ $h = \frac{1}{3}$، سيكون هناك دالة نصف – سقف V_3 إضافية تتحول من 0 إلى 1 بين $x = \frac{2}{3}$ و $x = 1$.

احسب $A_{33} = \int (v_3')^2\, dx$ و $b_3 = \int 2v_3\, dx$ وحل $Ay = b$ من أجل حل العنصر المحدود $y_1V_1 + y_2V_2 + y_3V_3$.

٦-٥-٤ حل $-u'' = 2$ بدالة سقفية واحدة ولكن ضع عقدتها في $x = \frac{1}{4}$ بدلاً عن $x = \frac{1}{2}$. (ارسم هذه الدالة V_1). بالشرط الابتدائي $u(0) = u(1) = 0$، قارن تقريب العنصر المحدود مع الحل الصحيح $u = x - x^2$.

٦-٥-٥ تنطلق طريقة غاليركين *Galerkin* بمعادلة تفاضلية (مثل $-u'' = f$) بدلاً من السعي بالشكل التربيعي P إلى نهايته الصغرى. يبقى الحل التجريبي $u = y_1V_1 + y_2V_2 + ... + y_nV_n$، ونختار الأعداد y بحيث نجعل الفرق بين u'' و f متعامداً مع كل V_i :

$$\int (-y_1V''_1 - y_2V''_2 - \ldots - y_nV''_n)\, V_j\, dx = \int f\, V_j dx.$$

كامل بالتجزئة لتصل إلى $Ay = b$ مثبتاً بذلك أن ***طريقة غاليركين تعطي*** A و b نفسها ***كما في طريقة رايلي - ريتز.***

٦-٥-٦ هناك متطابقة أساسية للشكل التربيعي (استخدمت من قريب) :

$$P(y) = \frac{1}{2}\, y^{\mathrm{T}}Ay - y^{\mathrm{T}}b = \frac{1}{2}(y - A^{-1}b)^{\mathrm{T}}A(y - A^{-1}b) - \frac{1}{2}\, b^{\mathrm{T}}A^{-1}b.$$

النهاية الصغرى المطلقة لـ P هي $y = A^{-1}b$. النهاية الصغرى على الفضاء الجزئي لدوال التجربة هي y الأكثر قرباً من $A^{-1}b$ـ لأن ذلك يجعل الحد الأول من الطرف الأيمن صغيراً بقدر الأمكان. (هذا هو أساس تقارب U نحو u) . إذا كان $A = I$ و $b = (1,0,0)$، فما هو مضاعف $V = (1,1,1)$، الذي يعطي أصغر قيمة لـ P؟

٦-٥-٧ من أجل دالة سقف واحدة متمركزة عند $x = \frac{1}{2}$ احسب $A = \int (v')^2\,dx$ و $M = \int v^2\,dx$. تعطي مسألة القيمة الذاتية ذات النوع 1×1، $\lambda = A/M$؛ هل هذه القيمة هي أكبر أو أصغر من القيمة الذاتية الحقيقية $\lambda = \pi^2$ ؟

٦-٥-٨ من أجل دالتي السقف V_1, V_2 المتمركزتين عند $x = h = \frac{1}{3}$ و $x = 2h = \frac{2}{3}$ احسب $M_{ij} = \int V_i V_j\,dx$ ، مصفوفة الكتل ذات النوع 2×2، وحل مسألة القيم الذاتية $Ax = \lambda Mx$ الواردة في التمرين (٦-٣-١١).

٦-٥-٩ ماهي مصفوفة الكتل $M_{ij} = \int V_i V_j\,dx$ من أجل n دالة سقف بـ $h = 1/(n+1)$ ؟

الفصل السابع

حسابات بالمصفوفات

٧-١ تمهيد

لقد كان هدف هذا الكتاب تفسير بعض الأجزاء التطبيقية من نظرية المصفوفات. بمقارنة ذلك بالنصوص المعتادة للجبر الخطي النظري، نلاحظ أن النظرية الأساسية لم تتغير بصورة جذرية؛ هناك نقطة من أهم النقاط المتعلقة بهذا الموضوع، هي أن الجانب النظري أساسي حقاً، من أجل التطبيقات. الاختلاف الوحيد هو تغير النقاط التي يجري ابرازها وفق وجهة نظر جديدة. يُظهر الحذف أكثر من طريقة لايجاد أساس لفضاء الأسطر، كما أن طريقة غرام-شميدت لم تعد مجرد برهان: لكل فضاء جزئي أساس نظامي متعامد. نحن، فعلاً، بحاجة لهذه الطرائق كما أننا بحاجة لوصف ملائم لعمل العلاقتين $A = LU$, $A = QR$.

سيقدم هذا الفصل مزيداً من الخطوات في الاتجاه ذاته. نعتقد أن هذه الخطوات محكومة بالضرورة الحسابية، أكثر من الاناقة بالتعبير، ولا ندري ما إذا كان من الضروري الاعتذار عن ذلك. إن ذلك يجعلها تظهر سطحية ولكن ذلك خطأ. إننا لانزال نتعامل مع أقدم وأهم المسائل الأساسية للموضوع $Ax = \lambda x$ و $Ax = b$. مع ذلك لايزال لكل من هاتين العلاقتين تقدير فعلي من قبل جيل الرياضيين الحالي. يوجد حالياً، في التحليل العددي نوع من انتقاء الأصلح، ونريد هنا وصف بعض الأفكار التي لاتزال حية حتى الآن. إنها تقع في ثلاث فئات:

١ - تقنيات لحل $Ax = b$. الحذف طريقة ممتازة للحل إلا من أجل بعض المسائل الخاصة التي لها خواص استثنائية ـ كما يحصل غالباً لأي مسألة . سنركز مناقشتنا على الخاصة التناثرية حيث أكثر عناصر A أصفار وعلى توسيع **طريقة التكرار أكثر من الطرائق المباشرة** وذلك لحل النظام $Ax = b$. إحدى الطرائق التكرارية هي «التصحيح الذاتي» التي تكرر التصحيح مرة بعد مرة . لن نصل أبداً إلى الجواب الصحيح ، ولكن هدفنا سيكون التقرب منه بسرعة أكبر من سرعة طريقة الحذف وسيكون ذلك ممكناً في بعض المسائل ؛ في كثير من المسائل الأخرى ، سيكون الحذف أكثر سلامة وإحكاماً فيما إذا استغل وجود الاصفار . لاتزال هذه المناقشة بعيدة عن نهايتها وسيكون هدفنا الأول تعيين الشروط التي تضمن لنا التقرب من الحل الصحيح $A^{-1}b$، وما يتحكم بسرعة ذلك . سنطبق بعد ذلك هذه الشروط على طريقة زيادة الاسترخاء وغيرها من قواعد التكرار وذلك في البند (٧-٤) .

٢ - تقنيات حل النظام $Ax = \lambda x$. تعد مسألة القيم الذاتية إحدى أروع إنجازات التحليل العددي ، فقد عرِّفت بوضوح واصبحت أهميتها جلية . لم يتمكن قبل زمن قليل أحد من معرفة حلها . لقد اقترحت عشرات الطرائق ومما لاشك فيه أنه لا يمكن ترتيبها ، من حيث الافضلية ، ترتيباً صحيحاً ؛ الأمر كله يتعلق باتساع المصفوفة A وخواصها وبعدد القيم الذاتية التي نبحث عنها . بقول آخر ، من الخطير جداً أن نطلب إلى مركز حسابات برنامجاً جزئياً للقيم الذاتية دون معرفة أي شيء عن محتواه . (طبعاً ، آمل أن لانحتاج إلى التحقق من كل تعبير من تعابير فورتران) . لقد اخترت فكرتين أو ثلاثاً حلت محل كل ماسبقها تقريباً : **طريقة** RQ وجماعة **طرائق القوى** والطريقة التي تجعل مصفوفة متناظرة **ثلاثية الأقطار** .

الطريقتان الأوليان تكراريتان والثالثة مباشرة . تقتضي مهمتها عدداً منتهياً من الخطوات ولكنها لاتنتهي بالقيم الذاتية ذاتها وإنما بمصفوفة أكثر تبسيطاً تستخدم في خطوات التكرار .

٣ - ***العدد الشرطي لمصفوفة*** . سيحاول البند (٧-٢) قياس حساسية الحل : إذا تحولت A و b بصورة طفيفة فما حجم تأثير ذلك على $x = A^{-1}b$. قبل الانطلاق في هذه المسألة ، نريد أن نظهر عقبة (من السهل التغلب عليها) . لقد وجدت طريقة لقياس التغير δA وتقدير حجم A نفسه . لقد عرِّف سابقاً طول متجه ونحتاج الآن إلى تعريف **نظيم مصفوفة** ، ثم العدد الشرطي وحساسية A الذين ينتجان مباشرة عن نظيم A و A^{-1} . إن ***مصفوفات هذا الباب مربعة*** .

٧ - ٢ نظيم المصفوفة وعددها الشرطي

الخطأ والتخبط أمران مختلفان . الخطأ غلط بسيط من المحتمل أن يقع فيه رياضي أو حاسوب ممتازان . التخبط أكثر خطورة وأكبر من حيث القدر . عندما يدوِّر حاسوب عدداً إلى المرتبة الثامنة المعنوية ، مثلاً ، فان ذلك خطأ ؛ ولكن عندما تكون المسألة شديدة الحساسية بحيث أن خطأ التدوير هذا يغير الحل كلياً فمن المؤكد أنه ارتكب تخبطاً . سيكون هدفنا في هذا البند تحليل تأثير الخطأ بحيث يمكننا عندئذ تحاشي التخبط .

سنتابع الآن المناقشة التي بدأناها في الفصل الأول مع :

$$A' = \begin{bmatrix} .0001 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.0001 \end{bmatrix}$$

نتطلب أن تكون A' حسنة الشروط وأن لاتكون بصورة خاصة ، حساسة لأخطاء التدوير ، إلا إذا طبق الحذف بطريقة سيئة ، فان المصفوفة تصبح عندئذ ، شديدة الحساسية . من التخبط قبول .0001 أول محور وعلينا أن نصر على اختيار أكبر وآمن وذلك بمبادلة بين سطري A' . عندما نجري «محورة جزئية» في طريقة الحذف ، فان الحاسوب يبحث بصورة آلية عن المحور الكبير ، وعندئذ ، لايمكن للمقاومة الطبيعية لأخطاء التدوير أن تسوى .

كيف نقيس هذه المقاومة الطبيعية ونقرر متى تكون مصفوفة حسنة الشروط ومتى تكون سيئة الشروط ؟ إذا حصل تغيير طفيف في b أو في A فما هي ضخامة التغيير الذي يصيب الحل x ؟

نبدأ ***بإجراء تغيير على الطرف الأيمن*** وذلك من b إلى $b + \delta b$. يمكن لهذا الخطأ أن يكون ناتجاً عن معطيات التجربة أو عن التدوير ؛ يمكننا أن نفترض أن δb صغير ولكننا غير قادرين على معرفة اتجاهه . يتغير الحل بالمقابل من x إلى $x + \delta x$:

$A(x + \delta x) = b + \delta b$ لذا نجد بالطرح $A(\delta x) = \delta b$

هذه الحالة، بصورة خاصة، سهلة؛ نعتبر δb ممثلة لجميع الاضطرابات. تقدر الاضطرابات الناتجة عن ذلك بـ $\delta x = A^{-1}\delta b$. سيكون هناك تغيير كبير في الجواب عندما تكون A^{-1} ضخمة ـ A شاذة تقريباً ـ وسيكون هذا التغيير، بصورة خاصة، كبيراً عندما يكون اتجاه التزايد δb بحيث يتضخم كثيراً بوساطة A^{-1} .

للبدء، نفرض أن A متناظرة وقيمها الذاتية موجبة $\lambda_n \le ..... \lambda_2 \le \lambda_1 < 0$. إن أي متجه δb سيكون تركيباً خطياً في المتجهات الذاتية الواحدية المقابلة $x_1, ..., x_n$، وإن أسوأ الاخطاء هو خطأ في اتجاه المتجه الذاتي الأول x_1. المعامل ε يعني أن كلاً من δb و δx صغير.

إذا كان $\delta b = \varepsilon x_1$ فإن $\delta x = \dfrac{\delta b}{\lambda_1}$ (١)

يتضخم الخطأ ذو الطول $\|\delta b\|$ بالمعامل $1/\lambda_1$ الذي هو أكبر قيمة ذاتية للمصفوفة A^{-1}. سيكون التضخيم أكثر كبراً عندما تكون λ_1 قريبة من الصفر فتكون *المصفوفة القريبة من الشاذة هي الأكثر حساسية* .

هناك عائق واحد لقياس هذه الحساسية، وهو عائق خطير. لنفرض أننا ضربنا جميع عناصر A بالعدد ١٠٠٠، فان λ_1 تضرب بالف، أيضاً، ويمكن، عندئذ، أن تبدو المصفوفة أقل شذوذاً. إن مثل هذا التدريج الجديد للقياس غير قادر على جعل

مصفوفة سيئة الشروط مصفوفة حسنة الشروط . صحيح أن δx قد صغر بمعدل ١٠٠٠ ولكن الحل $x = A^{-1} b$ سيكون كذلك . أما الخطأ النسبي $\|\delta x\| / \|x\|$ فسيبقى كما كان قبل . العامل $\|x\|$ الموجود في المقام يسوي المسألة مقابل تغيير تافه في سلم القياس . بالوقت ذاته ، توجد تسوية مقابلة من أجل δb : مسألتنا هي مقارنة ***التغير النسبي*** $\|\delta b\| / \|b\|$ ***بالخطأ النسبي*** $\|\delta x\| / \|x\|$.

تظهر أسوأ حالة عندما يكون البسط $\|\delta x\|$ كبيراً ـ يقع الاضطراب في اتجاه المتجه الذاتي x_1 ـ وعندما يكون المقام $\|x\|$ صغيراً . سيكون الحل غير المضطرب x صغيراً بقدر الامكان مقارنة بـ b غير المضطرب . وهذا يعني ***أن المسألة الأصلية*** $Ax = b$ ***قد تكون في الوضع الأقصى الآخر*** ، في اتجاه المتجه الذاتي الأخير x_n :

$$\text{إذا كان} \quad b = x_n \quad \text{فإن} \quad x = A^{-1} b = \frac{b}{\lambda_n} \qquad (٢)$$

إن هذا التركيب بين $\delta x = \varepsilon x_1$ و $b = x_n$ سيجعل الخطأ النسبي كبيراً . هذه هي الحالات القصوى في المتراجحات التالية :

٧ - أ لكل مصفوفة معرفة إيجابياً ، يحقق الحل $x = A^{-1} b$ والخطأ $\delta x = A^{-1} \delta b$ دائماً مايلي :

$$\|x\| \geq \frac{\|b\|}{\lambda_n} \quad \text{و} \quad \|\partial x\| \leq \frac{\|\partial b\|}{\lambda_1}. \qquad (٣)$$

لذلك يكون الخطأ النسبي محدوداً كما يلي :

$$\frac{\|\partial x\|}{\|x\|} \leq \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \frac{\|\partial b\|}{\|b\|}. \qquad (٤)$$

تدعى النسبة $c = \lambda_2 / \lambda_1 = \lambda_{max} / \lambda_{min}$ ***بالعدد الشرطي*** للمصفوفة A .

مثال -١ القيمتان الذاتيتان للمصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.0001 \end{bmatrix}$$

هما بالتقريب $\lambda_2 = 2$ ، $\lambda_1 = 10^{-4}/2$. لذا يكون عددها الشرطي مقارباً للعدد $c = 4.10^4$ ، وعلينا أن نتوقع تغييراً فاضحاً في الحل ناتجاً عن تغيرات عادية جداً في المعطيات. لقد قارنا في الفصل الأول، المعادلتين $Ax' = b'$ و $Ax = b$:

$$u + v = 2 \ ; \ u + v = 2$$

$$u + 1.0001v = 2; \quad u + 1.0001v = 2.0001.$$

لقد تغير الطرف الأيمن بالمقدار $\|\delta b\| = 10^{-4}$ ، فقط، فتحول الجواب من $u = 2 , v = 0$ إلى $u = v = 1$. هناك خطأ نسبي :

$$\frac{\|\partial x\|}{\|x\|} = \frac{\|(-1, 1)\|}{\|(2, 0)\|} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{وهذا يساوي} \quad 2.\ 10^4 \ \frac{\|\partial b\|}{\|b\|}$$

بدون القيام بأي اختيار للاضطراب (x و δb يصنعان زاوية قدرها ٤٥° مع الحالات الخاطئة، التي تعتبر من أجل العدد 2 الضائع، واقعة بين 2.10^4 و الامكان الأقصى $c = 4.10^4$)، فقد حصل تغيير ضخم في الحل.

لنلاحظ أن العدد الشرطي c لم يتأثر مباشرة بضخامة المصفوفة ؛ إذا كانت $A = I$ أو حتى $A = I/10$ ، فان العدد الشرطي هو $c = \lambda_{max}/\lambda_{min} = 1$. بالمقارنة، نجد أن ***المحددة مقياس رهيب لسوء الشروط*** ، وذلك لأنه لاتتعلق، فقط، بتدريج المقياس بل بالمرتبة n أيضاً ؛ إذا كانت $A = I/10$ فان محددة A هي 10^{-n} . في الحقيقة، هذه المصفوفة شاذة تقريباً ، ولكنها جيدة الشروط بقدر الامكان.

مثال ٢ لننظر في مصفوفة الفرق المحدود ذات النوع $n \times n$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & . & \\ & & . & . & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

إن أكبر قيمة ذاتية لهذه المصفوفة تقارب $\lambda_n = 4$ وأصغر قيمة ذاتية لها تقارب $\lambda_1 = \pi^2 / n^2$. لذا، فإن عددها الشرطي يساوي تقريباً $c = \frac{1}{2} n^2$ ، وفي هذه المرة، ستكون علاقة العدد c بكبر n حقيقية. الافضل أن نقرب $-u'' = f$ بزيادة عدد المجاهيل، والامر الصعب، هنا، هو حساب القيمة التقريبية. إنها لاتكتفي بازدياد الطول بل سيزداد تأثرها بالتدوير. عند بعض نقاط التصالب، تؤدي الزيادة في n ، فعلاً، إلى جواب رديء.

لحسن حظ المهندسين، يظهر هذا التصالب عندما تكون الدقة في الاصل، إلى حد ما، جيدة. قد يقع حاسوب نموذجي، إذا كان يعمل في حالة دقة فريدة، في خطأ تدوير من رتبة 10^{-9} . إذا استخدم التقريب $n = 100$ من المجاهيل، فان $c = 5000$ ، وعندها يتضخم مثل هذا الخطأ برتبة لاتزيد على 10^{-5} ، وهو مع ذلك، أكثر دقة من أي قياس معتاد. ولكن قد يقع اضطراب مع عشرة آلاف مجهول أو مع تقريب فروق محدود لمعادلة تفاضلية من مرتبة عالية مثل $d^4u/dx^4 = f(x)$ ، حيث يكبر، من أجل ذلك، العدد الشرطي حتى الرتبة n^4 .

لم يستخدم تحليلنا، حتى الآن، سوى المصفوفات المتناظرة ذوات القيم الذاتية الموجبة. يمكننا بسهولة حذف كونها موجبة أو استخدام القيم المطلقة؛ يصبح عندئذ العدد الشرطي $c = max\,|\lambda_i| / min\,|\lambda_i|$. لكن أهمال فرضية التناظر، كما نريد أكيداً فعله، يؤدي إلى تغيرات رئيسية. من السهولة رؤية ذلك على المصفوفتين :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 100 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -100 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (٥)$$

كل قيمة ذاتية لهاتين المصفوفتين تساوي الواحد. لكن من المؤكد إن التغير النسبي في x محدود بالتغير النسبي في b، أمر غير صحيح؛ لايعطى العدد الشرطي بالعلاقة $\lambda_{max}/\lambda_{min} = 1$. لنقارن الحلين:

$$b = \begin{bmatrix} 100 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ عندما } x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad b' = \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ عندما } x' = \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

مقابل تغير قدره ١٪ في b حصل تغير يساوي مئة ضعف في x: معامل التضخيم هنا يساوي 100^2. لما كان c يمثل الحد الأعلى للتضخيم، فان عليه أن يكون على الأقل، مساوياً 10.000. الصعوبة التي تكمن في هاتين المصفوفتين هي كون وجود عنصر ضخم غير قطري في A يؤدي إلى وجود عنصر مماثل في الضخامة في A^{-1} ـ الامر المخالف للتوقع الحدسي الذي يفرض أن على A^{-1} أن تزداد صغراً عندما تزداد A كبراً.

لإيجاد تعريف خاص للعدد الشرطي، علينا أن نعيد النظر في المعادلة (٣). لقد جربنا جعل x صغيراً و $b = Ax$ كبيراً. (تظهر الحالة القصوى عند المتجه الذاتي x_n، عندما تكون النسبة Ax/x مساوية فعلاً λ_n). الشيء الوحيد المختلف، عندما لايمكن أن تكون A مصفوفة متناظرة، هو: *قد توجد النهاية العظمى للنسبة* $\|Ax\| / \|x\|$ *من أجل* متجه x لايساوي متجهاً ذاتياً. تبقى هذه القيمة العظمى، مع ذلك، قياساً ممتازاً لحجم المصفوفة A؛ يسمى هذا العدد نظيم المصفوفة ويمثل بالرمز $\|A\|$.

٧ ب نظيم المصفوفة A هو العدد المعرف كما يلي:

$$\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}. \qquad (٦)$$

بقول آخر، $\|A\|$ يحدد «قوة تضخيم» المصفوفة:

$$\|Ax\| \leq \|A\| \, \|x\| \quad \text{لكل متجه } x \qquad (٧)$$

تتحقق المساواة من أجل قيمة غير صفرية واحدة x على الأقل.

سيكون للمصفوفتين A و A^{-1} الواردتين في المعادلة (٥) نظيمان واقعان بين ١٠٠ و ١٠١ . بعد قليل، سنحسب ذلك بالضبط . لكن نريد، أولاً، أن ننتهي من الترابط بين النظيم والعدد الشرطي . لماكان $b = Ax$ و $\delta x = A^{-1}\delta b$ فإننا نجد مباشرة من التعريف (٧) أن :

$$\|\partial x\| \le \|A^{-1}\| \, \|\partial b\| \quad \text{و} \quad \|b\| \le \|A\| \, \|x\|. \qquad (٨)$$

إن ذلك تعويض للعلاقة (3) ، عندما تكون A غير متناظرة؛ في حالة التناظر يكون العدد $\|A\|$ مطابقاً λ_n و $\|A^{-1}\|$ مطابقاً لـ $1/\lambda_1$. التعويض الصحيح للنسبة λ_n / λ_1 هو $\|A^{-1}\| . \|A\|$ - الذي هو العدد الشرطي .

٧ جـ *العدد الشرطي* للمصفوفة A هو $c = \|A\| \, \|A^{-1}\|$ ويحقق الخطأ النسبي :

$$\frac{\|\partial x\|}{\|x\|} \le c \, \frac{\|\partial b\|}{\|b\|}. \qquad (٩)$$

إذا احدثنا اضطراباً في المصفوفة A عوضاً عن اضطراب الطرف الأيمن b ، فسيكون

$$\frac{\|\partial x\|}{\|x + \partial x\|} \le c \, \frac{\|\partial A\|}{\|A\|}. \qquad (١٠)$$

المتراجحة (9) صحيحة لكل b ولكل δb وهي، تماماً، جداء المتراجحتين الواردتين في (8) . يلاحظ أن العدد الشرطي نفسه يظهر في (10) ، عندما تكون المصفوفة ذاتها مضطربة : إذا كان $Ax = b$ و $(A + \delta A)(x + \delta x) = b$ فانه ينتج بالطرح :

$$\partial x = -A^{-1}(\partial A)(x + \partial x) \quad \text{و} \quad A\,\partial x + \partial A(x + \partial x) = 0$$

الضرب بـ δA يضخم أي متجه بما لايزيد على النظيم $\|\delta A\|$، لذا، فإن الضرب بالمصفوفة A^{-1} يضخم بما لايزيد على $\|A^{-1}\|$. وهكذا :

$$\|\partial x\| \leq \|A^{-1}\| \, \|\partial A\| \, \|x + \partial x\|,$$

أو

$$\frac{\|\partial x\|}{\|x + \partial x\|} \leq \|A^{-1}\| \, \|\partial A\| = c \, \frac{\|\partial A\|}{\|A\|}.$$

تعني هاتان المتراجحتان أن لخطأ التدوير مصدرين : الأول هو *الحساسية المعتادة* للمسألة التي تقاس بالعدد c . والثاني هو الخطأ الواقعي δb أو δA . لقد كان ذلك أساس تحليل الأخطاء لويلكينسن *Wilkinson* . لما كانت طريقة الحذف تنتج ، عادة ، عاملين تقريبيين هما L' و U' ، فانها تحل المسألة باستخدام مصفوفة خاطئة $A + \delta A L' = L' U'$ عوضاً عن المصفوفة الصحيحة $A = L U$. لقد برهن أن المحورة الجزئية كافية لكي تبقي δA تحت المراقبة ـ انظر كتابه «*Rouinding Errors In Algebraic Processes*» ـ *لذا ، فإن العدد الشرطي* c *يتحمل خطأ التدوير كاملاً* .

قانون للنظيم

يقيس نظيم A أكبر تضخيم يصيب متجهاً (متجهاً ذاتياً أو غير ذاتي) بوساطة ضرب مصفوفي : $\|A\| = max \, (\|Ax\| / \|x\|)$. نظيم مصفوفة الوحدة يساوي الواحد . لحساب «معامل التضخيم» هذا ، بصورة عامة ، نربع الطرفين :

$$\|A\|^2 = \max \frac{\|Ax\|^2}{\|x\|^2} = \max \frac{x^T A^T A x}{x^T x}. \tag{١١}$$

يعيد ذلك إلى الذاكرة تناظر $A^T A$ ونسبة رايلي المتعلقة بها .

٧ د نظيم A هو الجذر التربيعي لأكبر قيمة ذاتية للمصفوفة $A^T A$: $\|A\|^2 = \lambda_{max} (A^T A)$. عندما تكون A *متناظرة فان* $A^T A = A^2$ ويكون عندئذ

النظيم أكبر قيمة ذاتية (بالقيمة المطلقة) : $\|A\| = max\ |\lambda_i|$. في كل حالة، يكون المتجه الأكثر تضخماً هو المتجه الذاتي للمصفوفة A^TA المقابل لذلك :

$$\frac{x^T A^T Ax}{x^T x} = \frac{x^T(\lambda_{\max}x)}{x^T x} = \lambda_{\max} = \|A\|^2.$$

ملاحظة ١ ليس من المعتاد حساب النظيم والعدد الشرطي لمصفوفة A، في المسائل العملية، بل يقدر تقديراً. ليس هناك وقت لحل مسألة قيم ذاتية من أجل $\lambda_{max}(A^TA)$.

ملاحظة ٢ يطبق العدد الشرطي على المعادلة النظامية $A^TAx = A^Tb$ في مسألة المربعات الأصغرية. العدد الشرطي $c(A^TA)$ هو **مربع** $c(A)$. قد يغير تكوين A^TA مسألة سليمة إلى أخرى معيبة، وسيكون من الضروري استخدام إما طريقة غرام ـ شميدت أو التحليل وفق القيمة الشاذة $A = Q_1\Sigma Q_2^T$.

ملاحظة ٣ σ_i، عناصر المصفوفة القطرية Σ، هي ***القيم الشاذة*** للمصفوفة A وستكون مربعاتها هي *القيم الذاتية* للمصفوفة A^TA . لذلك سيكون $\|A\| = \sigma_{max}$ قانوناً آخر للنظيم. تحافظ المصفوفتان Q_1 و Q_2 القائمتان على الأطوال في $\|Q_1\Sigma\ Q_2x\| = \|Ax\|$، لذا فان أكبر معامل تضخيم هو أكبر الأعداد σ .

ملاحظة ٤ لايؤثر خطأ التدوير في المعادلة $Ax = b$ فقط بل يؤثر أيضاً في المعادلة $Ax = \lambda x$. إن ذلك يثير سؤالاً جديداً : ماهو «العدد الشرطي لمسألة القيم الذاتية» ؟ الجواب الذي يتبادر للذهن خاطىء؛ ليس هو العدد الشرطي للمصفوفة نفسها، بل هو *العدد الشرطي للمصفوفة المقطِّرة S الذي يقيس حساسية القيم الذاتية* . إذا كانت μ قيمة ذاتية للمصفوفة $A + E$ فإن بعدها عن إحدى القيم الذاتية للمصفوفة A هو :

$$|\mu - \lambda| \le \|S\|\ \|S^{-1}\|\ \|E\| = c(S)\ \|E\|. \qquad (١٢)$$

في الحالة التي تكون فيها S مصفوفة قائمة Q، تكون مسألة القيم الذاتية حسنة الشروط تماماً: $c(Q) = 1$، وإن الفرق $\lambda - \mu$ بين القيمتين الذاتيتين لن يكون أكبر من التغير E في المصفوفة A. يحدث ذلك عندما تكون المتجهات الذاتية نظامية متعامدة ـ إنها أعمدة S. لذلك تكون أفضل الحالات عندما تكون A متناظرة أو بصورة أعم عندما يكون $AA^T = A^TA$. أي عندما تكون المصفوفة A نظامية، ومقطرِّتها S مصفوفة قائمة Q(البند ٥-٦) وقيمها الذاتية حسنة الشروط تماماً. يمكنك أن ترى وجود S في قانون الاضطراب بصورة منفصلة، في كل قيمة ذاتية: إذا كان x_k العمود ذا الرقم k في S و y_k السطر ذا الرقم k في S^{-1} فان:

$$\mu_k - \lambda_k = y_k E x_k + \text{حد من مرتبة } \|E\|^2 \qquad (١٣)$$

عملياً، فإن $y_k E x_k$ تقدير واقعي جيد لتغير القيمة الذاتية. هدف أي طريقة جيدة هو أن تبقي مصفوفة الخطأ E أصغر ما يمكن ـ عادة، يحصل ذلك بالإصرار، كما تفعل QR في البند التالي على المصفوفات القائمة في كل من خطوات التكرار.

تمـاريـن

٧-٢-١ إذا كانت A مصفوفة قائمة Q، برهن أن $\|Q\| = 1$ وكذلك $c(Q) = 1$. المصفوفات القائمة (وكذلك مضاعفاتها αQ) هي وحدها المصفوفات الحسنة الشروط بصورة كاملة.

٧-٢-٢ ماهي المتراجحة الشهيرة التي تعطي $\|(A+B)x\| \le \|Ax\| + \|Bx\|$؟ ولماذا ينتج عن (6) أن: $\|A+B\| \le \|A\| + \|B\|$؟

٧-٢-٣ فسر لماذا $\|ABx\| \le \|A\|\,\|B\|\,\|x\|$ واستنتج من (6)

أن $\|AB\| \leq \|A\| \, . \, \|B\|$. برهن أن ذلك يؤدي، أيضاً، إلى $c(AB) \leq c(A) \, . \, c(B)$.

٧-٢-٤ احسب من أجل المصفوفة المعرفة إيجابياً $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ، كلاً من $\|A^{-1}\| = 1/\lambda_1$ ، $\|A\| = \lambda_2$ و $c(A) = \lambda_2/\lambda_1$. أوجد طرفاً أيمن b واضطراباً δb بحيث يكون الخطأ أسوأ ما يمكن $\|\delta x\| / \|x\| = c \, \|\delta b\| / \|b\|$.

٧-٢-٥ برهن أنه إذا كانت λ أيقيمة ذاتية للمصفوفة A وكان $Ax = \lambda x$ فإن $\lambda \leq \|A\|$.

٧-٢-٦ أوجد النظيم الحقيقي للمصفوفتين الواردتين في (5) .

٧-٢-٧ برهن ، انطلاقاً من التمرين (٥-٦-٥)، أن $\|A^T\| = \|A\|$ وذلك بالمقارنة بين القيم الذاتية للمصفوفتين AA^T و A^TA ، أن $\|A^T\| = \|A\|$

٧-٢-٨ لكل مصفوفة A معرفة إيجابياً، يكون تفريق شولسكي هو $A = LDL^T = R^TR$ حيث $R = \sqrt{D}\, L^T$. برهن، منطلقاً مباشرة من (٧ د)، أن العدد الشرطي للمصفوفة R هو الجذر التربيعي للعدد الشرطي . ينتج عن ذلك أن طريقة غاوس لاتحتاج إلى مبادلة بين الأسطر في حالة مصفوفة معرفة إيجابياً؛ إن هذا الشرط غير سيء لأن $c(A) = c(R^T)\, c(R)$.

٧-٢-٩ برهن أن λ_{max} وحتى $|\lambda|_{max}$ ليست نظيماً مرضياً، وذلك بايجاد مثال معاكس من النوع 2×2 من أجل $\lambda_{max}(A+B) \leq \lambda_{max}(A) + \lambda_{max}(B)$ (ومن أجل $\lambda_{max}(AB) \leq \lambda_{max}(A)\, \lambda_{max}(B)$.

٧-٢-١٠ نفرض أن $\|x\|$ تغير من الطول الاقليدي $(x_1^2 + \dots\dots + x_n^2)^{1/2}$ إلى «النظيم الاعظمي» أو «النظيم E_∞» : $\|x\|_\infty = max\, |x_i|$. (مثال ذلك، $\|(1,-2,1)\| = 2$). احسب نظيم المصفوفة المقابل :

$$\|A\|_\infty = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty}$$ إذا كان $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

٧-٢-١١ برهن أن القيم الذاتية لـ $B = \begin{bmatrix} 0 & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix}$ هما $\pm\sigma$، القيمتان الشاذتان لـ A . إرشاد جرب B^2

٧-٢-١٢ (أ) هل لـ A و A^{-1} العدد الشرطي c نفسه ؟

(ب) بصورة موازية للحد الأعلى (9) للخطأ، برهن أن الحد الأدنى هو:

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \geq \frac{1}{c} \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$. (أنظر في $A^{-1}b = x$ عوضاً عن $Ax = b$.)

٧ - ٣ حساب القيم الذاتية

لاتوجد طريقة مفضلة لحساب القيم الذاتية لمصفوفة . لكن ، توجد ، حتماً ، بعض الطرائق الرهيبة التي لم تجرب أبداً . كما توجد بعض الأفكار التي لاتزال تستحق مكانتها الدائمة . سنبدأ بوصف واحدة منها تتميز بكونها تقريبية جداً وجاهزة للعمل ، إنها ***طريقة القوى*** التي تمتاز بأن خواص تقاربها سهلة الفهم . سنتحرك بهدوء نحو طريقة متطورة جداً تنطلق من جعل مصفوفة تناظرية ثلاثية الأقطار ، وتنتهي بان نجعل منها مصفوفة قطرية . لقد قدمت مرحلتها الأخيرة من قبل غرام-شميدت ، وقد عرفت بالرمز QR .

تعمل طريقة القوى العادية استناداً إلى مبدأ معادلة الفروق . تنطلق من تخمين أولي u_0 ثم ، تكوِّن على التوالي $u_1 = Au_0$ و $u_2 = Au_1$ وبصورة عامة ، $u_{k+1} = A\,u_k$.

تكوَّن كل خطوة من ضرب مصفوفة بمتجه . وبعد k خطوة، ينتج $u_k = A^k u$، رغم أن المصفوفة A^k لن تظهر أبداً . في الحقيقة فإن الأمر الاساسي في ذلك هو أن يكون الضرب بالمصفوفة A سهلاً ـ إذا كانت هذه المصفوفة كبيرة فانه من المفضل نثرها (جعل كثير من عناصرها أصفاراً) ـ إذ أنه كثيراً مايكون التقارب نحو المتجهات الذاتية بطيئاً جداً . إذا فرضنا أن للمصفوفة مجموعة كاملة من المتجهات الذاتية $x_1, ..., x_n$ ، فان المتجه u_k يعطى بالقانون المعتاد لمعادلة فروق :

$$u_k = c_1 \lambda_1^k x_1 + \ldots + c_n \lambda_n^k x_n.$$

لنتصور أن القيم الذاتية قد رقمت وفق قيمها المطلقة المتزايدة ولنفرض أن القيمة الذاتية العظمى وحيدة وهذا يعني أنه لاتوجد قيمة عظمى من القدر ذاته وأن λ_n غير مكررة، أي $|\lambda_1| \le |\lambda_2| \le ..... < |\lambda_n|$. لذا مادام التخمين الاصلي يحوي إحدى مركبات المتجه الذاتي x_n، أي أن $c_n \neq 0$، فان هذه المركبة ستصبح بالتدريج مهيمنة :

$$\frac{u_k}{\lambda_n^k} = c_1 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\right)^k x_1 + \ldots + c_{n-1} \left(\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right)^k x_{n-1} + c_n x_n. \qquad (1)$$

يتقرب المتجه u_k بدقة أكثر فأكثر نحو اتجاه x_n ويكون معامل التقارب هو النسبة $r = |\lambda_{n-1}| / |\lambda_n|$. إن ذلك مشابه تماماً للتقارب نحو الوضعية الثابتة التي درسناها من أجل عمليات ماركوف، باستثناء كون القيمة الذاتية العظمى λ_n لايمكنها، هنا، أن تساوي الواحد . في الحقيقة، نحن لانعرف معامل القياس λ_n^k في (1) ! لكن، لابد من إدخال معامل قياس في هذه المعادلة؛ من ناحية أخرى يمكن لـ u_k أن يصبح كبيراً جداً أو صغيراً جداً وفق الحالتين $|\lambda_n| > 1$ أو $1 > |\lambda_n|$. يمكننا عادة أن نقسم مباشرة كل u_k على مركبته الأولى α_k قبل أن نقوم بالخطوة التالية؛ بتغيير القياس البسيط هذا، تصبح طريقة القوى من الصورة $u_{k+1} = Au_k / \alpha_k$ ، وتتقارب نحو مضاعف

لـ x_n (١) .

مثال (من كاليفورنيا) حيث u_n متقارب من المتجه الذاتي $\begin{bmatrix} .667 \\ .333 \end{bmatrix}$:

لقدكانت مصفوفة انتقال السكان $A = \begin{bmatrix} .4 & .2 \\ .1 & .8 \end{bmatrix}$ ؛

$$u_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_1 = \begin{bmatrix} .9 \\ .1 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} .83 \\ .17 \end{bmatrix}, \quad u_3 = \begin{bmatrix} .871 \\ .219 \end{bmatrix}, \quad u_4 = \begin{bmatrix} .747 \\ .253 \end{bmatrix}.$$

التحديد الأكثر أهمية واضح في هذا المثال : إذا كان r قريباً من الواحد فان التقارب سيكون بطيئاً . في كثير من التطبيقات، يكون $r > .9$ ، وهذا يعني أننا نحتاج إلى أكثر من ٢٠ من التكرارات لتخفيض $(\lambda_2/\lambda_1)^k$ بمعامل يساوي عشرة . (في المثال، كان $r = .7$ ولقد كان بطيئاً جداً) . طبعاً ، إذا كان $r = 1$ ، فذلك يعني أن $|\lambda_n| = |\lambda_{n-1}|$ ، ولايمكن عندئذ للتقارب أن يقع أبداً . هناك العديد من الطرائق للوصول إلى جوار هذا التحديد، وسنقدم ثلاثاً منها :

(١) ***طريقة قوى الكتل*** تعمل على عدد من المتجهات في آن واحد، بدلاً من متجه واحد u_k . إذا انطلقنا بـ p من المتجهات المتعامدة النظامية وضربنا كلاً منها بالمصفوفة A ثم ، طبقنا طريقة غرام ـ شميدت لجعلها ، من جديد، متعامدة ـ هذه خطوة واحدة من الطريقة ـ فستكون النتيجة تصغير نسبة التقارب إلى $r' = |\lambda_{n-p}| / |\lambda_n|$. علاوة على ذلك، سنحصل ، في وقت معاً ، على تقريبات للقيم الذاتية الـ p المختلفة ولمتجهاتها الذاتية .

(٢) ***طريقة القوى العكسية*** تعمل على A^{-1} عوضاً عن A . خطوة واحدة من معادلة الفروق $v_{k+1} = A^{-1}v_k$ تعني أن علينا أن نحل نظاماً خطيا $Av_{k+1} = v_k$ (ونحافظ على العاملين L و U !) . النظرية هنا تضمن تقارباً نحو ***القيمة الذاتية الصغرى*** ،

---

(١) يتقارب عوامل التدرج α_K أيضا ؛ إنها تقرب λ_N

شرط أن يكون معامل التقارب $|\lambda_2|/|\lambda_1| = r$ " أصغر من الواحد. كثيراً ما تكون في التطبيقات، القيمة الذاتية الصغرى هي المطلوبة، لذا، يكون التكرار المعكوس هو الاختيار البدهي.

(٣) ***طريقة القوى العكسية المحورة*** هي أفضل من كل ذلك. لنفرض أن $A - \alpha I$ قد استبدلت بـ A. لذا فان جميع القيم الذاتية λ_i قد تحولت بالمقدار α ذاته كما أن معامل التقارب للطريقة العكسية قد تحول إلى $|\lambda_1 - \alpha|/|\lambda_2 - \alpha| = r$ "". إذا اختير α بحيث يكون تقريباً جيداً لـ λ_1 فان "" r سيكون صغيراً جداً ويتسارع التقارب بصورة هائلة. كل مرحلة من هذه الطريقة تحل النظام $(A - \alpha I)\, w_{k+1} = w_k$ وستكون معادلة الفروق هذه محققة بـ :

$$w_k = \frac{c_1 x_1}{(\lambda_1 - \alpha)^k} + \frac{c_2 x_2}{(\lambda_2 - \alpha)^k} + \ldots + \frac{c_n x_n}{(\lambda_n - \alpha)^k}.$$

إذا اشترطنا α قريبة من λ_1، فان الأول من هذه المقامات سيكون قريباً من الصفر، لذا، فإن خطوة أو خطوتين تكفيان لجعل الحد الأول مهيمناً. بصورة خاصة، إذا حسبنا λ_1 مسبقاً بطريقة أخرى (مثل QR)، فان α ستكون هذه القيمة المحسوبة. الطريقة القياسية هي تحليل $A - \alpha I$ إلى LU [(١)] وحل $Ux_1 = (1,1,\ldots,1)^T$ بالتعويض التراجعي.

إذا لم تكن λ_1 قد قربت مسبقاً بطريقة مستقلة، فان الطريقة المحورة ستوجد اختيارها الخاص لـ α ـ أو، بما أنه يمكننا تحويل التحوير في كل خطوة إذا أردنا ذلك، فانه يجب اختيار α_k الداخلة في $(A - \alpha_k I)w_{k+1} = w_k$. إن أبسط إمكان هو العمل مع عامل القياس الذي يعيد كل w_k إلى حجم معقول، لكن، هناك طرق أخرى أفضل من هذه. في حالة التناظر $A = A^T$، يبدو أن أدق اختيار هو ***نسبة رايلي :***

---

(١) يظهر أن ذلك سيء الشروط جداً، لأن $A - \alpha I$ قريبة جداً من أن تكون شاذة وبامكاننا اعتبارها كذلك. لحسن الحظ الخطأ قريب جداً من اتجاه المتجه الذاتي. بما أن كل مضاعف لمتجه ذاتي هو أيضاً متجه ذاتي، فان علينا أن نجرب الحساب في هذا الاتجاه فقط.

$$\alpha_k = R(w_k) = \frac{w_k^T A w_k}{w_k^T w_k}.$$

لقد عرفنا سابقاً أن لهذه النسبة نهاية صغرى عند المتجه الذاتي الصحيح ـ مشتقة R تساوي الصفر وبيانها يشبه أسفل قطع مكافىء. لذا فان الخطأ $\alpha_k - \lambda$ ، في القيمة الذاتية، يساوي تقريباً مربع الخطأ في المتجه الذاتي. لقد تغير عامل التقارب "$r = |\lambda_1 - \alpha_k| / |\lambda_2 - \alpha_k|$" في كل خطوة، وبالفعل لقد تقارب "r" نفسه من الصفر. النتيجة الأخيرة، نسبة رايلي هذه المحورة، هي تقارب تكعيبي(١) لـ α_k نحو λ_1 .

الثلاثية الأقطار وأشكال هيسنبرغ *Hessenberg*

تعدُّ طريقة القوى معقولة في حالة مصفوفة ضخمة ومتناثرة. عندما يكون معظم عناصرها غير صفرية، يكون اختيار هذه الطريقة أمراً خاطئاً. مع ذلك، نتساءل ما إذا كانت توجد طريقة سهلة لإيجاد *أصفار* ضمن هذه العناصر. إن ذلك هو هدف البند التالي.

يمكننا القول، منذ البداية: بعد حساب مصفوفة مشابهة $U^{-1}AU$ تحوي أصفاراً أكثر من A، فإننا لن نعود إلى طريقة القوى. هناك كثير من الطرائق المتنوعة والمتطورة، وإن أفضلها طريقة QR . (سيكون لطريقة القوى العكسية المحورة مكانها في النهاية عندما نريد إيجاد المتجهات الذاتية.) في كل الاحوال، ستكون أول خطوة هي إيجاد أكبر عدد ممكن من الاصفار وأن يجري ذلك بالسرعة الممكنة. إن القيد الوحيد للسرعة هو استخدامنا التحويل الواحدي (أو القائم) الذي يحافظ على التناظر والطول. إذا

---

(١) التقارب الخطي يعني أن في كل خطوة يضرب الخطأ بعامل ثابت $r < 1$. التقارب التربيعي يعني أن الخطأ يربع في كل خطوة كما في طريقة نيوتن $x_{k+1} - x_k = -f(x_k)/f'(x_k)$ من أجل حل $f(x) = 0$. التقارب التكعيبي يعني أن الخطأ يتكعب في كل خطوة منتقلاً من ١٠^-١^ إلى ١٠^-٣^ إلى ١٠^-٩^ .

كانت A متناظرة فان $U^{-1}AU$ كذلك ولن يصبح بعض العناصر كبيراً بصورة خطرة.

للانتقال من A إلى $U^{-1}AU$، يوجد، على الأقل، إمكانان رئيسيان: يمكننا بكل منهما أن نوجد صفراً واحداً في كل خطوة (مثل طريقة الحذف)، أو يمكننا أن نعمل بعمود كامل دفعة واحدة. من أجل صفر واحد يكفي أن نستخدم دوراناً مستوياً كما هو موضح بالمعادلة (٧) أدناه؛ يقع $cos\ \theta$ و $sin\ \theta$ في الكتلة ذات النوع 2×2. لذا يمكننا، بالتنقل خلال جميع العناصر الواقعة تحت القطر، أن نختار في كل خطوة دوراناً مناسباً بحيث نحصل على صفر؛ هذا هو مبدأ ***طريقة جاكوبي***. لسوء الحظ، سيتضاء ل إمكان تقطير A بعد عدد من الدورانات وذلك لأن الأصفار التي أنجز إيجادها في الخطوات الأول يمكن أن يقضى عليها عند إيجاد أصفار أخرى فيما بعد.

للمحافظة على هذه الاصفار والتوقف عند ظهورها، علينا أن ننهي، على الاقل، شكلاً مثلثياً واحداً؛ نقبل قطراً واحداً غير صفري تحت القطر الرئيسي. هذا مايسمى ***شكل هيسنبرغ*** ***Hessenberg***. إذا كانت المصفوفة متناظرة، فان على الجزء المثلثي العلوي أن يكون نسخة مطابقة للجزء المثلثي السفلي وستكون المصفوفة ثلاثية الأقطار.

للحصول على كل من هذين الشكلين نستخدم سلسلة من الدورانات في المستوي الملائم. إنها فعالة جداً. ولكن هاوسهولدر *Householder* قد أوجد طريقة جديدة للقيام بهذا الأمر بصورة كاملة. تعطي فكرته «الخطوة التحضيرية» لطريقة *QR* [(١)] ***تحويل هاوسهولدر*** أو *العاكس الأولي*، هو مصفوفة من الصورة:

$$H = I - 2\ \frac{vv^{T}}{\|v\|^{2}}.$$

(١) قد ترغب تحاشي هذا التحضير والذهاب مباشرة إلى طريقة *QR*. هذا التحضير هو حاجتك لايجاد أصفار أولاً.

في الغالب، ينظم المتجه v ليصبح متجه وحدة $u = v/\|v\|$ وعندئذ، تأخذ المصفوفة H الصورة $I - 2uu^T$. في هاتين الحالتين **تكون** H *متناظرة و قائمة معاً* :

$$H^T H = (I - 2uu^T)(I - 2uu^T) = I - 4uu^T + 4uu^T uu^T = I.$$

وهكذا يكون $H = H^T = H^{-1}$. في الحالة المركبة، تكون المصفوفة المقابلة $I - 2uu^H$ بالوقت ذاته، هرميتية وواحدية. إن مخطط هاوسهولدر هو إيجاد أصفار بوساطة هذه المصفوفات، ويتعلق نجاح هذا المخطط بالمتطابقة التالية :

٧ هـ إذا فرضنا z المتجه العمود $(1,0,...,0)^T$ و $\sigma = \|x\|$ و $v = x + \sigma z$ ، فإن $Hx = -\sigma z = (-\sigma, 0, ..., 0)$.

البرهان :

$$Hx = x - \frac{2vv^Tx}{\|v\|^2} = x - (x + \sigma z)\frac{2(x + \sigma z)^T x}{(x + \sigma z)^T(x + \sigma z)} \tag{٢}$$

$$= x - (x + \sigma z) \quad (x^Tx = \sigma^2 \text{ لأن})$$

$$= -\sigma z.$$

يمكن استخدام هذه المتطابقة مباشرة. ننطلق من العمود الأول من A ونتذكر أن الشكل النهائي $U^{-1}AU$ هو مصفوفة ثلاثية الأقطار في حالة التناظر (أو شكل هيسنبرغ بصورة عامة). لذا، *فإن* $n - 1$*، فقط، من العناصر الواقعة تحت القطر ستستخدم :*

$$x = \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Hx = \begin{bmatrix} -\sigma \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{٣}$$

حتى هذه النقطة، لمصفوفة هاوسهولدر مرتبة تساوي $n - 1$ فقط، لذا، فإنها واقعة في القرنة اليمنى والدنيا من المصفوفة ذات الحجم الكامل U_1 :

$$U_1^{-1} A U_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & * & * & * & * \\ -\sigma & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad U_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & & \\ 0 & & H & & \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \end{bmatrix} = U_1^{-1},$$

بسبب كون العدد (١) واقعاً في الزاوية اليسرى والعليا للمصفوفة U_1 ، فإنها تترك العنصر a_{11} كما هو ـ والأهم من ذلك، أنها لاتمس الأصفار التي تظهر في (٣). بذلك تكون الخطوة الأولى قد تمت وحصلت $U^{-1}AU$ على العمود الأول المطلوب.

المرحلة الثانية مشابهة: x يتكون من العناصر الـ $n - 2$ الأخيرة من العمود الثاني، z هو المتجه الاحداثي الواحدي و H_2 من المرتبة $n - 2$. عندما توضع هذه المصفوفة في U_2 فانه ينتج :

$$U_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & H_2 & \\ 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & & & \end{bmatrix} = U_2^{-1}, \quad U_2^{-1}(U_1^{-1} A U_1) U_2 = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \end{bmatrix}.$$

أخيراً، تهتم المصفوفة U_3 بالعمود الثالث، ومن أجل مصفوفة من النوع 5×5، ينتهي هنا شكل هيسنبرغ. بصورة عامة تكون U جداء المصفوفات $U_1 U_2 .... U_{n-2}$ ويكون عدد العمليات الضروري لحسابها من مرتبة n^3 .

مثال :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

بوضع H في U ، تكون النتيجة مصفوفة ثلاثية الأقطار :

$$U=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{bmatrix},\quad U^{-1}AU=\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}.$$

$U^{-1}AU$ مصفوفة مستعدة لاظهار قيمها الذاتية ـ طريقة QR مهيئة للابتداء ـ ولكننا سننحرف عن الموضوع لفترة لنقدم تطبيقين آخرين لتحويل هاوسهولدر .

(١) *التحليل* $A = QR$. لقد كان ذلك اختزالاً لطريقة غرام ـ شميدت الواردة في الفصل الثالث . يمكن الآن تنفيذ ذلك ببساطة أكثر وثبات أكبر . لنذكر أن R كانت مثلثية عليا ـ لم يعد بامكاننا قبول عنصر إضافي غير صفري واقع تحت القطر الرئيسي لأنه لن يكون هناك ضرب من اليمين بمصفوفات من الشكل U أو من الشكل H (كما في $U^{-1}A$) الامر الذي كان يؤدي إلى حذف الأصفار التي أوجدت سابقاً. لذلك، فإن المرحلة الأولى في تكوين Q هو العمل مع العمود الأول من A كاملاً :

$$x=\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\ \vdots\\a_{n1}\end{bmatrix},\quad z=\begin{bmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{bmatrix},\quad v=x+\|x\|z,\quad H_1=I-2\,\frac{vv^T}{\|v\|^2}.$$

العمود الأول من H_1A مطابق تماماً لما هو مرغوب ويساوي $-\|x\|z$ ؛ عناصره الواقعة تحت القطر الرئيسي أصفار، وهو العمود الأول في R . المرحلة الثانية تتعامل مع العمود الثاني من H_1A، اعتباراً من المحور ونحو الأدنى، فينتج H_2H_1A التي تحوي أصفاراً تحت المحور. (الطريقة كاملة تشبه، تماماً، طريقة الحذف وهي بالفعل بديل بطيء وهزيل لها.) تعطي نتيجة $n-1$ من الخطوات من جديد، مصفوفة مثلثية عليا R، ولكن المصفوفة التي تمثل هذه المراحل ليست مثلثية دنيا L، بل هي، الجداء $Q=H_1H_2....H_{n-1}$ الذي يمكن تخزينه بهذه الصورة التحليلية والتي لم تحسب أبداً بصورة صريحة. وهذا ماينهي طريقة غرام ـ شميدت .

(٢) *التحليل وفق القيمة الشاذة* $Q_1^T AQ_2 = \Sigma$. سيبين الملحق كيف يعطي هذا

التحليل الحل الأمثل $\overline{x}$ لأي مسألة مربعات أصغرية. Σ مصفوفة قطرية من شكل A نفسه، عناصرها (القيم الشاذة) هي الجذور التربيعية للقيم الذاتية للمصفوفة A^TA. لما كانت تحويلات هاوسهولدر قادرة، فقط، على *التحضير* لمسألة القيم الذاتية، دون أن تحلها، فانه لايمكننا أن نتوقع منها إيجاد المصفوفة النهائية Σ. عوضاً عن ذلك، فانها تنتج مصفوفة بقطرين جميع عناصرها أصفار، عدا عناصر القطر الرئيسي والذي فوقه. طبعاً، هذه المقدمة للعملية مستقرة حسابياً لأن المصفوفة H قائمة.

الخطوة الأولى مطابقة لما هي في QR الواردة أعلاه: x هو العمود الأول في A ومركبات H_1x الواقعة تحت المحور أصفار. الخطوة التالية هي الضرب من اليمين بالمصفوفة $H^{(1)}$ التي ستنتج أصفاراً، كما ذكرنا، على طول السطر الأول:

$$A \to H_1A = \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{bmatrix} \to H_1AH^{(1)} = \begin{bmatrix} * & * & 0 & 0 \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{bmatrix}. \qquad (٤)$$

وهكذا، فإن اثنين من تحويلات هاوسهولدر تنهيان الموضوع:

$$H_2H_1AH^{(1)} = \begin{bmatrix} * & * & 0 & 0 \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad H_2H_1AH^{(1)}H^{(2)} = \begin{bmatrix} * & * & 0 & 0 \\ 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & * & * \end{bmatrix}.$$

وهذه هي المصفوفة ثنائية القطر التي نريدها وهي توضح، من جديد، الطريق السريع الذي يمكن به تكوين أصفار بتحويلات هاوسهولدر.

طريقة QR

هذه الطريقة سهلة بصورة سحرية، فهي تنطلق من المصفوفة A_0 محللة بطريقة غرام - شميدت إلى الشكل Q_0R_0 ومن ثم تعكس وضع العاملين: $A_1 = R_0Q_0$. هذه المصفوفة الجديدة مشابهة للمصفوفة الأصلية، $Q_0^{-1}A_0Q_0 = Q_0^{-1}(Q_0R_0)\,Q_0 = A_1$، وتتابع الطريقة دون أي تغيير بالقيم الذاتية:

$$A_k = Q_k R_k \quad \text{ومن ثم} \quad A_{k+1} = R_k Q_k \qquad (٥)$$

تصف هذه المعادلة *طريقة* QR غير *المحورة* التي هي طريقة متقاربة في الحالات العامة الملائمة : A_k تتقارب من شكل مثلثي ، لذلك ، فان عناصرها القطرية تتقارب من قيمها الذاتية التي هي ، أيضاً ، القيم الذاتية لمصفوفة البدء A_0 (١) .

يبدو أن هذه الطريقة جيدة ولكنها ليست جيدة جداً . لجعلها متميزة تحتاج إلى عمليتي تهذيب : (أ) علينا أن نأخذ بعين الاعتبار تغيرات نقطة الاصل ؛ (ب) علينا أن نضمن أن التحليل QR سريع ، حقاً ، في كل مرحلة .

(أ) الطريقة المحورة . إذا كان العدد α_k قريباً من قيمة ذاتية فان الخطوة (5) ستتحور مباشرة إلى :

$$A_k - \alpha_k I = Q_k R_k \quad \text{ومن ثم} \quad A_{k+1} = R_k Q_k + \alpha_k I \qquad (٦)$$

يبرر ذلك كون A_{k+1} مشابهة لـ A_k :

$$Q_k^{-1} A_k Q_k = Q_k^{-1}(Q_k R_k + \alpha_k I)Q_k = A_{k+1} .$$

الامر الذي يقع عملياً هو أن العنصر (k,k) من A_k ـ الواقع في الزاوية الدنيا واليمنى ـ سيكون أول عنصر يتقرب نحو قيمة ذاتية . لذا ، فإن هذا المدخل هو أبسط وأكثر الاختيارات شيوعاً للتحوير α_k . يكون عادة تأثير ذلك انتاج تقارب تربيعي ، وفي الحالة التناظرية ، سيكون تقارباً تكعيبياً نحو أصغر القيم الذاتية . قد تبدو المصفوفة A_k بعد ثلاث أو أربع خطوات للطريقة المحورة مشابهة للمصفوفة :

---

(١) A_0 تعني المصفوفة التي ابتدأت بها المصفوفة QR . إذا كان هناك عدة طرق للحصول ، عن طريق مصفوفات هاوسهولدر ، على شكل ثلاثي الأقطار ، فان A_0 مرتبطة بالمصفوفة الاصلية بالعلاقة $U^{-1}AU = A_0$.

$$A_k = \left[\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ \hline 0 & 0 & \varepsilon & \lambda'_1 \end{array}\right] . \quad \text{حيث} \quad \varepsilon \ll 1$$

نقبل القيمة المحسوبة λ'_1 كتقريب جيد للقيمة الحقيقية λ_1 . لايجاد القيمة الذاتية التالية، تتابع الطريقة QR بالمصفوفة الصغرى (3×3 في التوضيح السابق) الواقعة في القرنة العليا اليسارية . لقد اختزلت عناصر قطرها الجزئي قليلاً بتأثير الخطوة الأولى من QR، وإن خطوتين أخريين كافيتان لايجاد λ_2 . إن ذلك يعطي طريقة نظامية لايجاد جميع القيم الذاتية . في الواقع، ***أصبحت الآن طريقة QR معروفة تماماً*** . بقي علينا فقط أن نتوصل إلى المتجهات الذاتية - إن ذلك خطوة قوة عكسية فريدة - والاستفادة من الاصفار التي أوجدتها طريقة هاوسهولدر .

(ب) الهدف من تحويلات هاوسهولدر التحضيرية التي تضع A_0 بصورة ثلاثية الاقطار أو بشكل هيسنبرغ ، هي جعل كل خطوة من خطوات QR سريعة حقاً . تحتاج، طريقة غرام - شميدت ، عادة، (التي هي طريقة QR) إلى $O(n^3)$ عملية . ولكن ذلك يصبح، من أجل مصفوفة هيسنبرغ ، $O(n^2)$ ومن أجل مصفوفة ثلاثية الاقطار، $O(n)$ فقط . بدون هذه التحسينات، ستكون هذه الطريقة بطيئة بصورة لاتطاق، وإذا لم تكن كل مصفوفة جديدة A_k مصفوفة هيسنبرغ أو ذات أقطار ثلاثة، فان التحسينات ستطبق فقط في الخطوة الأولى وستكون غير مفيدة .

لحسن الحظ، هذا الامر لايقع . لتوضيح أن لـ A_1 شكل A_0 نفسه، انظر إلى :

$$Q_0 = A_0 R_0^{-1} = \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix} .$$

يمكنك أن تتأكد بسهولة أن الضرب يبقى في Q_0 الاصفار الثلاثة التي كانت في A_0 ذاتها؛ تظهر Q_0 بشكل مصفوفة هيسنبرغ . لذا تتكوّن A_1 بعكس ترتيب العاملين :

$$A_1 = R_0 Q_0 = \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{bmatrix}.$$

وكذلك تظهر هنا الاصفار الثلاثة نفسها من جديد في حاصل الضرب؛ تكون A_1 مصفوفة هيسنبرغ *عندما تكون* A_0 *كذلك* . الحالة التناظرية أفضل، لأن $A_1 =$ $Q_0^{-1} A_0 Q_0$ تبقى متناظرة :

$$A_1^{\mathrm{T}} = Q_0^{\mathrm{T}} A_0^{\mathrm{T}} (Q_0^{-1})^{\mathrm{T}} = Q_0^{-1} A_0 Q_0 = A_1 .$$

بهذه المحاكمة التي انهيناها، يظهر أن A_1 مصفوفة هيسنبرغ أيضاً . لذا، بسبب كون A_1 متناظرة وهيسنبرغية، فإنها *ثلاثية الأقطار* . نطبق هذه المناقشة ذاتها على كل من المصفوفات التالية $A_2, A_3, \ldots$، أي *أن كل خطوة من خطوات* QR *تبدأ بمصفوفة ثلاثية الأقطار* .

النقطة الأخيرة التي سنوضحها، هي التحليل ذاته الذي يوجد Q_0 و R_0 من المصفوفة الاصلية A_0 (و Q_k و R_k من كل A_k أو، في الحقيقة، من $(A_k - \alpha_k I)$) . يمكننا أن نستخدم طريقة هاوسهولدر من جديد ولكن، من الاسهل، جعل كل عنصر في القطر الجزئي صفراً، على التوالي، بدوران في المستوي . الأول منها هو :

$$P_{21} A_0 = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & & \\ \sin\theta & \cos\theta & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & * & * & * \\ a_{21} & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{bmatrix}. \qquad (٧)$$

العنصر (2,1) في هذا الجداء هو $a_{11} \sin\theta + a_{21} \cos\theta$ ، وعلينا أن نختار الزاوية θ بحيث يكون هذا التركيب صفراً . ثم، نختار p_{32} بطريقة مشابهة وذلك بجعل العنصر (3,2) من $p_{32} A_{21} A_0$ صفراً . بعد $n - 1$ من هذه الدورانات الأولية، تكون النتيجة الأخيرة هي المصفوفة المثلثية العليا R_0 :

$$R_0 = P_{nn-1} \dots P_{32} P_{21} A_0 . \qquad (٨)$$

هذا أقصى مانقدر قوله في هذا الامر ـ هناك أشياء أخرى في كتب الجبر الخطي العددي حول واحدة من أهم الطرائق في الحسابات العلمية .

نشير إلى واحدة منها ـ **طريقة** *Lanezos* ـ تتعلق بالمصفوفات المتناثرة . إنها تقوِّم متتالية *Krylov* وهي x, Ax, A^2x ..... ، وهي واردة في المراجع .

تمــاريــن

٧-٣-١ طبق من أجل المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ذات القيمتين الذاتيتين $\lambda_1 = 1$ و $\lambda_2 = 3$ طريقة القوى $u_{k+1} = Au_k$ ثلاث مرات انطلاقاً من التخمين الأول $u_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. ماهو المتجه الحدي u_∞؟

٧-٣-٢ من أجل المصفوفة السابقة نفسها والتخمين $u_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ ، قارن النتائج فيما يلي :

(١) ثلاث خطوات في طريقة القوى العكسية .

$$u_{k+1} = A^{-1} u_k = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} u_k \ ;$$

(٢) خطوة محورة فريدة $u_1 = (A - \alpha I)^{-1} u_0$ حيث $\alpha = u_0^T A u_0 / u_0^T u_0$

المتجه الحدي u_∞ هو الآن مضاعف المتجه الذاتي الأخير $(1,1)$.

٧-٣-٣ برهن أن أي أختيار $v = x - y$ لمتجهين مختلفين من طول واحد $\|x\| = \|y\|$، يؤدي إلى واحد من تحويلات هاوسهولدر مثل $Hx = y$ و $Hy = x$.

٧-٣-٤ من أجل :

$$x = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad , \quad z = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

أحسب $v = x + \sigma z$, $\sigma = \|x\|$ ومصفوفة هاوسهولدر H المقابلة . تحقق من أن $Hx = -\sigma z$.

٧-٣-٥ باستخدام ٧-٣-٤ ، أوجد المصفوفة ثلاثية الاقطار $U^{-1}AU$ الناتجة عن

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

٧-٣-٦ برهن أنه إذا انطلقنا من $A_0 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ، فان الطريقة غير المحورة Q_R تنتج فقط التحسين المتواضع $A_1 = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 14 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$.

٧-٣-٧ طبق مرة واحدة QR على :

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & 0 \end{bmatrix},$$

بالتحوير $\alpha = a_{22}$ ـ الذي يعني في هذه الحالة دون تحوير لأن $a_{22} = 0$. برهن أن العناصر غير القطرية تتحول من $\sin\theta$ إلى $-\sin^3\theta$ ، كمثال من *التقارب التكعيبي* .

٧-٣-٨ برهن أن المصفوفة الثلاثية الأقطار $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ لاتتغير بأي مرحلة من مراحل الطريقة QR، لذا، فهي واحد (نادر) من الأمثلة المعاكسة للتقارب . تتحول من جديد بادخال تحوير اختياري .

٧-٣-٩ برهن بالتراجع (بالاستقراء) وبدون تحويل أن : $(Q_0Q_1.....Q_k)$ $(R_k....R_2R_0)$ هي ، فعلاً، تحليل QR للمصفوفة A^{k+1}. تربط هذه المتطابقة QR بطريقة القوة وهي تؤدي إلى تفسير لتقاربها ؛ إذا كانت $|\lambda_1| > |\lambda_2| > ... > |\lambda_n|$ ، فان هذه القيم الذاتية ستظهر بالتدرج، بترتيب هابط ، على القطر الرئيسي لـ A_k .

٧ - ٤ الطرائق التكرارية لحل $Ax = b$

خلافاً للقيم الذاتية، عندما لم يكن هناك خيار، لم نكن حتماً بحاجة إلى طريقة تكرارية لحل النظام $Ax = b$. تنتهي طريقة الحذف إلى العدد x بعد عدد منته من الخطوات، ومادام هذا العدد معقولاً فليس هناك مشكلة. من ناحية ثانية، عندما يكون العدد $n^3/3$ ضخماً، فإنه يمكننا أن نعتمد قيمة تقريبية x، ويمكننا أن نحصل عليها بسرعة ـ وهذا غير مستخدم لاجتياز جزء من الطريق، خلال الحذف، ثم التوقف. هدفنا تقديم طريقة تنطلق من أي قيمة تخمينية أولية x_0 لانتاج تقريب محسن x_{k+1} من تقريب سابق x_k ويمكن إنهاء ذلك عندما نريد.

يمكن ابتكار مثل هذه الطريقة بسهولة وذلك ***بتجزئة المصفوفة*** A. إذا كانت $A = S - T$، فإن المعادلة $Ax = b$ مطابقة للمعادلة $Sx = Tx + b$. لذلك، يمكننا أن نختبر التكرار:

$$\boxed{Sx_{k+1} = Tx_k + b.} \qquad (1)$$

طبعاً، لايوجد مايؤكد أن هذه الطريقة جيدة كما أن تتابع التجزئة يحتاج إلى تحقيق متطلبين مختلفين:

(١) أن يكون المتجه الجديد x_{k+1} سهل الحساب. لذلك، يجب أن تكون S مصفوفة بسيطة (وقابلة للعكس!)؛ يمكن أن تكون قطرية أو مثلثية.

(٢) على المتتالية x_k أن تتقارب نحو حل صحيح x. إذا طرحنا التكرار (1) من المعادلة الصحيحة $Sx = Tx + b$ فان الناتج قانون يتضمن الخطأ $e_k = x - x_k$، فقط:

$$Se_{k+1} = Te_k.$$

هذه معادلة فروق فعلية تنطلق من خطأ أولي e_0 وبعد k من الخطوات، يتكون الخطأ الجديد $e_k = (S^{-1}T)^k e_0$. مسألة التقارب هي تماماً مثل مسألة الاستقرار:

$x_k \longrightarrow x$ تماماً عندما $e_k \longrightarrow 0$.

٧ و تكون الطريقة التكرارية (1) ***متقاربة*** إذا وإذا فقط كانت كل قيمة ذاتية λ للمصفوفة $S^{-1}T$ محققة للعلاقة $|\lambda| < 1$. يتعلق معدل تقاربها بالقيمة العظمى لـ $|\lambda|$ التـي تعرف باسم ***نصف القطر الطيفي*** لـ $S^{-1}T$:

$$p(S^{-1}T) = \max_{i}|\lambda_i| \tag{٣}$$

لنتذكر أن حلاً نموذجياً للمعادلة $e_{k+1} = S^{-1}Te_k$ هو :

$$e_k = c_1\lambda_1^k x_1 + \dots c_n\lambda_n^k x_n. \tag{٤}$$

من الواضح أن العدد الأكبر من $|\lambda_i|$ سيكون فعلاً مهيمناً وسيكون متحكماً بمعدل تقارب e_k نحو الصفر .

لمتطلبي التكرار نطاق تعارض . في حالة قصوى أولى ، يمكننا إنهاء تقارب مباشر بـ $S = A$ و $T = 0$ ؛ الخطوة الأولى والوحيدة للتكرار ستكون $Ax_1 = b$. في هذه الحالة ، ستكون مصفوفة الخطأ $S^{-1}T$ صفراً ، قيمها الذاتية ونصف قطرها الطيفي أصفار ، ومعدل التقارب (المعرف عادة بـ $-\log\rho$) مالانهاية . طبعاً ، قد لايكون من السهل عكس $S = A$ ، وهذا هو السبب الاساسي للتجزئة . مايلفت النظر كون اختيار بسيط لـ S يؤدي إلى نجاح باهر ، وسنناقش ثلاثة امكانات :

١ - S = مصفوفة جزء قطري من A (طريقة جاكوبي)

٢ - S = مصفوفة جزء مثلثي من A (طريقة غاوس ـ سايدل)

٣ - S = تركيب لـ ١ و ٢ (زيادات متتالية من الاسترخاءات SOR) .

تدعى S ***مكيفة مسبقاً*** وإن اختيارها حاسماً في التحليل العددي .

مثال ١ - (جاكوبي)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 2 & \\ & 2 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad S^{-1}T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

إذا كانت مركبتا x هما v, w ، فان خطوة جاكوبي $Sx_{k+1} = Tx_k + b$ هي :

$$2v_{k+1} = w_k + b_1 \quad 2w_{k+1} = v_k + b_2 \quad \text{أو} \quad \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} b_1/2 \\ b_2/2 \end{bmatrix}$$

للمصفوفة الحاسمة $S^{-1}T$ القيمتان الذاتيتان $\pm \frac{1}{2}$ ، الامر الذي يعني أن الخطأ قد انخفض إلى النصف (رقم ثنائي إضافي يصبح صحيحاً) في كل خطوة. في هذا المثال الذي هو أصغر من أن يعتبر نموذجياً، يكون التقارب سريعا.

إذا حاولنا تصور مصفوفة A أكبر من ذلك، فستكون هناك صعوبة عملية حقيقية في التكرار الجاكوبي. ***يتطلب ذلك منا الاحتفاظ بجميع مركبات*** x_k ***حتى الانتهاء من حساب*** x_{k+1}. هناك فكرة مألوفة أكثر من ذلك تتطلب، فقط، مالايزيد عن نصف التخزين، هي أن ننطلق مستخدمين كل مركبة للمتجه الجديد x_{k+1} عندما ننتهي من حسابها؛ x_{k+1} يأخذ مكان x_k مركبة من كل مرة. لذا، فإنه يمكن لـ x_k أن يختفي بالسرعة ذاتها التي يوجد فيها x_{k+1} . إن ذلك يعني أن المعادلة الأولى تبقى كما سبق :

$$a_{11}(x_1)_{k+1} = (-a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \ldots - a_{1n}x_n)_k + b_1.$$

تعمل الخطوة التالية مباشرة مع هذه القيمة الجديدة لـ x_1 .

$$a_{22}(x_2)_{k+1} = a_{21}(x_1)_{k+1} + (-a_{23}x_3 - \ldots - a_{2n}x_n)_k + b_2.$$

ستستخدم المعادلة الأخيرة من خطوة التكرار قيماً جديدة حصراً،

$$a_{nn}(x_n)_{k+1} = (-a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \ldots - a_{nn-1}x_{n-1})_{k+1} + b_n.$$

تدعى هذه الطريقة ***طريقة غاوس-سايدل*** *Gauss - Seidel* ، رغم أنها لم تكن، على مايظهر، معروفة من قبل غاوس ولم ينصح بها سايدل. لنتذكر أنه، عندما تتحرك جميع الحدود x_{k+1} نحو الجهة اليسرى، ***فان المصفوفة*** S ***ستكون، عندئذ، الجزء السفلي المثلثي للمصفوفة*** A . تقع في الطرف الأيمن، مصفوفة التجزئة الأخرى، وهي مصفوفة مثلثية عليا.

مثال ٢ (غاوس ـ سايدل)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad S^{-1}T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

خطوة واحدة من خطوات غاوس ـ سايدل تدخل المركبتين v_{k+1} و w_k في :

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x_k + b \quad \text{أو} \quad \begin{matrix} 2v_{k+1} = w_k + b_1 \\ 2w_{k+1} = u_{k+1} + b_2 \end{matrix}.$$

القيمتان الذاتيتان للمصفوفة حاسمتان وهما 1/4 و 0 . يقسم الخطأ على أربعة في كل مرة، وهكذا، فإن *خطوة غاوس ـ سايدل واحدة تعادل اثنتين من خطوات جاكوبي* [(١)] . لما كانت كلتا الطريقتين تتطلب العدد نفسه من العمليات ـ لقد استخدمنا منذ قليل، القيمة الجديدة عوضاً عن القديمة التي هي حالياً في المخزن ـ فان طريقة غاوس ـ سايدل أفضل .

هناك، مع ذلك، طريقة لجعلها أفضل من قبل . لقد اكتشف خلال فترة الحاسبات اليدوية (ولعل ذلك كان صدفة) أن التقارب سيكون أكثر سرعة فيما إذا تجاوزنا تصحيح غاوس ـ سايدل $x_{k+1} - x_k$. نقول بصورة مجملة، إن الطريقة المعتادة تتقارب برتابة؛ تبقى القيمة التقريبية x_k بالجهة ذاتها بالنسبة للحل x. مع ذلك، فمن الطبيعي أن نحاول إدخال ***عامل زيادة استرخاء*** ω وذلك لتتحرك بقرب أكثر من

---

(١)هذه القاعدة صحيحة في عدد كبير من التطبيقات، ومع ذلك فمن الممكن تكوين أمثلة تكون فيها طريقة جاكوبي متقاربة، بينما تفشل طريقة غاوس ـ سايدل (والعكس) . حالة التناظر هي الأكثر مباشرة : إذا كان $a_{ii} > 0$ فان طريقة غاوس ـ سايدل تتقارب إذا وإذا فقط كانت A معرفة إيجابياً .

الحل . إذا كان $\omega = 1$ فاننا نعود إلى طريقة غاوس ـ سايدل ؛ أما إذا كان $\omega > 1$ فان الطريقة تدعى ، عندئذ ، ***الاسترخاءات المتتابعة*** (SOR) . الاختيار المفضل لـ ω يتعلق بالمسألة ذاتها ، ولكنه لايتجاوز البتة العدد (٢) ؛ وكثيراً ما يكون مجاوراً ١,٩ .

لعرض هذه الطريقة ، بصورة أكثر وضوحاً ، نفرض أن U,L,D على الترتيب ، المصفوفة القطرية والجزءان المثلثيان الأدنى والأعلي بالمعنى الدقيق (بدون القطر) للمصفوفة A . (ليس لهذه التجزئة أي علاقة بمصفوفة الحذف $A = LDU$ ، وبالفعل ، فان لدينا هنا $A = L + D + U$) . في طريقة جاكوبي ، يقع $S = D$ في الطرف الأيسر ويقع

$T = - L - U$ في الطرف الأيمن ، في حين أن طريقة غاوس ـ سايدل تختار التجزئة $S = D + L$ و $T = - U$. والآن ، لتسريع التقارب نتقل إلى العلاقة :

$$[D + \omega L]x_{k+1} = [(1 - \omega)D - \omega U]x_k + \omega b. \qquad (٥)$$

لنذكر أنه من أجل $\omega = 1$ ، لايوجد تسارع ونعود عندئذ إلى طريقة غاوس ـ سايدل . لكن بصرف النظر عن ω ، فان المصفوفة الواقعة في اليسار مثلثية دنيا والمصفوفة الواقعة في الطرف الأيمن مثلثية عليا . وهكذا يمكن لـ x_{k+1} أن يحل محل x_k ، مركبة مقابل مركبة ، مباشرة بعد حسابها ؛ إليك خطوة نموذجية :

$$a_{ii}(x_i)_{k+1} = a_{ii}(x_i)_k + \omega\left[(- a_{i1} x_1 - \ldots - a_{ii-1}x_{i-1})_{k+1} + (- a_{ii}x_i - \ldots - a_{in} x_n)_k + b_i\right].$$

صادف أن الاختيار القديم x_k منطبق على الحل الصحيح x ، فان الاختيار الجديد x_{k+1} يبقى نفسه وإن الكمية الموجودة داخل الحاضنتين ستنعدم .

مثال ٣ من أجل المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ذاتها ، فإن كل خطوة من SOR هي

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -\omega & 2 \end{bmatrix} x_{k+1} = \begin{bmatrix} 2(1-\omega) & \omega \\ 0 & 2(1-\omega) \end{bmatrix} x_k + \omega b.$$

إذا قسمنا على ω فان هاتين المصفوفتين تصبحان S و T في التجزئة $A = S - T$ ؛ يعود التكرار إلى $Sx_{k+1} = Tx_k + b$. وهكذا نجد أن المصفوفة الحاسمة $S^{-1}T$ التي تتحكم

قيمها الذاتية بمعيار التقارب هي :

$$L_\omega = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -\omega & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2(1-\omega) & \omega \\ 0 & 2(1-\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\omega & \frac{1}{2}\omega \\ \frac{1}{2}\omega(1-\omega) & 1-\omega+\frac{1}{4}\omega^2 \end{bmatrix}.$$

الاختيار المفضل لـ ω هو ذلك الذي يجعل القيمة الذاتية العظمى للمصفوفة L_ω (بقول آخر نصف قطرها الطيفي) أصغر ما يمكن . *إن الغرض الكلي من زيادة الاسترخاء هو اكتشاف هذه القيمة المفضلة لـ* ω . جداء القيم الذاتية يساوي المحددة ـ وإذا نظرنا إلى المصفوفتين المثلثيتين التين جداؤهما يساوي L_ω ، نلاحظ أن المحددة الأولى تساوي 1/4 (بعد القلب) والمحددة الثانية تساوي $4(1-\omega)^2$. لذا ، فإن

$$\lambda_1 \lambda_2 = \det L_\omega = (1-\omega)^2.$$

هذه قاعدة عامة ، وهي أن المصفوفة الأولى $(D+\omega L)^{-1}$ تسهم في $\det D^{-1}$ وذلك لأن L تقع تحت القطر وأن المصفوفة الثانية تسهم في $\det(1-\omega)D$ لأن U تقع فوق القطر . جداؤهما ، في الحالة $n \times n$ ، هو $\det L_\omega = (1-\omega)^n$. (إن ذلك يفسر ماقلناه سابقاً من أننا لن نتخطى ω = 2 أبداً . يكون جداء القيم الذاتية كبيراً جداً بقدر ما تسمح به كل العلاقات $|\lambda_i| < 1$ ويمكن للتكرار أن لا يكون متقارباً .) . لقد حصلنا على مفتاح لاكتشاف سلوك القيم الذاتية وهو : عند ω = 1 تكون القيمتان الذاتيتان في طريقة غاوس ـ سايدل هما 0 و 1/4 ، وإذا ما زادت ω فان إحدى هاتين القيمتين تتقرب من الثانية . *عند القيمة المفضلة لـ* ω تكون هاتان القيمتان متساويتين وتساويان ω - 1 ، *ذلك لكي يكون جداؤهما مساوياً قيمة المحددة*[١] . من السهل حساب قيمة ω

---

(١) علاوة على ذلك ، إذا ازدادت ω فان القيمتين الذاتيتين تصبحان عددين مركبين مترافقين ـ يحقق كل منهما $|\lambda| = \omega - 1$ ، وبالتالي ، يبقى جداؤهما مساوياً $(1-\omega)^2$ وتزداد قيمتهما المطلقة تبعا لـ ω

هذه وذلك لأن مجموع القيم الذاتية يتطابق دوماً مع مجموع عناصر القطر (أثر L_ω). وهكذا يتعين أفضل وسيط ω_{opt} بالعلاقة :

$$\lambda_1 + \lambda_2 = (\omega_{opt} - 1) + (\omega_{opt} - 1) = 2 - 2\omega_{opt} + \frac{1}{4}\omega_{opt}^2 . \quad (٦)$$

تعطي هذه المعادلة التربيعية $\omega_{opt} = 4(2 - \sqrt{3}) \approx 1.07$. لذا، تساوي القيمتان الذاتيتان المتساويتان تقريباً $\omega - 1 = .07$ ، وذلك اختصار كبير لقيمتي غاوس ـ سايدل $\lambda = 1/4$, عند $\omega = 1$. في هذا المثال الاختيار المفضل لـ ω قد ضاعف من جديد معدل التقارب . ذلك لأن $.07 \approx (1/4)^2$.

لقد ظهر اكتشاف هذا التحسين بصورة سهلة جداً تكاد أن تكون سحرية، وكانت نقطة الانطلاق لعشرين سنة من نشاط ضخم في التحليل العددي . كانت المسألة الأولى هي إظهار وتوسيع نظرية الاسترخاء، وقد حوت رسالة *Young* التي ظهرت عام ١٩٥٠ الحل وهو قانون بسيط يعطي ω المفضلة . كانت الخطوة الرئيسية في هذه الرسالة هي إيجاد الرابطة بين القيم الذاتية λ للمصفوفة L_ω والقيم الذاتية μ لمصفوفة جاكوبي الأصلية $D^{-1}(-L-U)$. يعبر عن هذه الرابطة بالمعادلة :

$$(\lambda + \omega - 1)^2 = \lambda\omega^2\mu^2 . \quad (٧)$$

إن ذلك صحيح من أجل صنف واسع من مصفوفات الفروق المنتهية، وإذا اخترنا $\omega = 1$ (طريقة غاوس ـ سايدل) فان ذلك يؤدي إلى $\lambda^2 = \lambda\mu^2$ أي $\lambda = 0$ أو $\lambda = \mu^2$. لقد تأكد ذلك بالمثالين السابقين (١) و (٢) ، حيث $\mu = \pm\frac{1}{2}$ و $\lambda = 0, \lambda = \frac{1}{4}$. فعلاً، إن هذا الوضع نموذجي، تماماً، للعلاقة الكائنة بين طريقة جاكوبي وطريقة غاوس ـ سايدل : جميع مصفوفات صنف يونغ تقبل μ قيمة ذاتية تظهر بالاشارتين زائد ـ ناقص، وبذلك، تبرهن العلاقة (٧) أن قيمتي λ الموافقتين هما 0 و μ^2 . باستخدام القيمة التقريبية الاخيرة لـ x، نكون قد ضاعفنا معدل التقارب .

الامر المهم هو العمل بصورة أفضل أيضاً؛ نريد أن نختار ω بحيث تصبح القيمة

الذاتية الكبرى λ أصغرية. لحسن الحظ، قد حلت هذه المسألة سابقاً. ليست معادلة يونغ سوى معادلة مميزة لمثال من المصفوفة L_ω من النوع 2×2، وقد كانت أفضل قيمة لـ ω هي تلك التي تجعل الجذرين λ مساويين $\omega - 1$. تماماً كما في (٦) حيث كان $\mu^2 = 1/4$. يؤدي ذلك إلى:

$$\omega = \frac{2(1 - \sqrt{1 - \mu^2}\ )}{\mu^2} \quad \text{أو} \quad (\omega - 1) + (\omega - 1) = 2 - 2\omega + \mu^2 \omega^2 .$$

نقطة الاختلاف الوحيدة أنه، في حالة مصفوفة ضخمة، يجب أن يتكرر هذا النمط لعدد من الأزواج المختلفة $\pm\mu_i$ ـ ويمكننا أن نقوم باختيار فريد، فقط، لـ ω. يعطي أضخم هذه الأزواج قيمة جاكوبي الذاتية العظمى μ_{max}، ويعطي، أيضاً، القيمة العظمى لـ ω وكذلك من أجل $\lambda = \omega - 1$. لذلك، ولما كان هدفنا جعل λ_{max} أصغر ما يمكن، فان الزوج الأقصى هو الذي يعين الاختيار المفضل ω_{opt}:

$$\lambda_{\max} = \omega_{\text{opt}} - 1 \quad \text{و} \quad \omega_{\text{opt}} = \frac{2(1 - \sqrt{1 - \mu^2_{\max}}\ )}{\mu^2_{\max}} . \tag{٨}$$

هذا هو قانون يونغ لمعامل زيادة الاسترخاء المفضل.

من أجل مصفوفة الفروق المنتهية A بعناصرها 1-,2,-1 الواقعة على الأقطار الرئيسية الثلاثة، يمكننا أن نحسب التحسين الذي تقدمه ω. في مثالنا، كانت المصفوفة من النوع 2×2؛ لنفرض الآن أنها من النوع $n \times n$، تقابل عين شبكة عرضها $h = 1/(n+1)$. إن قيمة جاكوبي الذاتية العظمى الملائمة للتمرين (٧-٤-٣)، هي $\mu_{max} = \cos \pi h$. لذا، فإن القيمة الذاتية العظمى، حسب غاوس ـ سايدل، هي $\mu^2_{max} = cos^2 \pi h$، ونستخرج القيمة العظمى الذاتية لطريقة SOR بالتعويض في (٨):

$$\lambda_{\max} = \frac{2(1 - \sin \pi h)}{\cos^2 \pi h} - 1 = \frac{(1 - \sin \pi h)^2}{\cos^2 \pi h} = \frac{1 - \sin \pi h}{1 + \sin \pi h} .$$

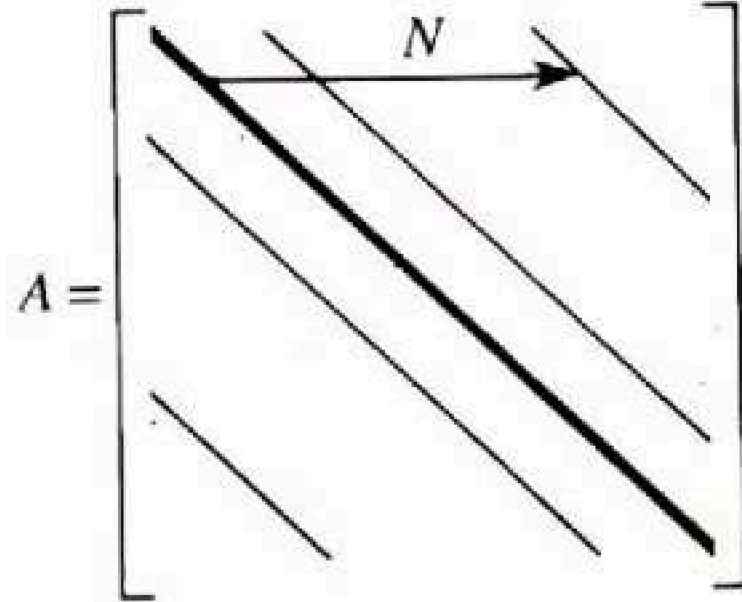
يمكن إدراك ذلك بمثال. لنفرض أن A من المرتبة (٢١)، وهي مرتبة معتدلة جداً، لذا يكون $\cos \pi h = .99$ ، $h = 1/22$. تكون، عندئذ، طريقة جاكوبي بطيئة؛ إن $\cos^2 \pi h = .98$ يعني أن طريقة غاوس ـ سايدل أيضاً تتطلّب تكرارات كثيرة. لكن، لما كان $\sin \pi h = \sqrt{.02} = .14$ ، فانه سيكون لطريقة زيادة الاسترخاء المفضلة معامل التقارب :

$$\omega_{\text{opt}} = 1 + \lambda_{\max} = 1.75 \quad \text{حيث} \quad \lambda_{\max} = \frac{.86}{1.14} = .75$$

يهبط الخطأ بمعدل ٢٥٪ في كل خطوة ***وإن خطوة واحدة من SOR تكافيء ثلاثين خطوة من خطوات جاكوبي : $.75 = (.99)^{30}$.***

إن ذلك نتيجة مدهشة لمثل هذه الفكرة البسيطة. تطبيقاتها الحقيقية ليست في المسائل ذوات البعد الواحد (معادلات تفاضلية عادية)؛ لقد أصبح حل نظام ذي ثلاثة أقطار أمراً سهلاً. موضعها في أبعاد أكثر، من أجل المعادلات التفاضلية الجزئية، حيث زيادة الاسترخاء أكثر أهمية. إذا استعضنا عن فترة الوحدة $0 \le x \le 1$ بمربع الوحدة $0 \le x, y \le 1$ وانتقلنا من المعادلة $-u_{xx} = f$ إلى المعادلة $-u_{xx} - u_{yy} = f$ فان الفرق المحدود الطبيعي هو «مخطط خمس نقاط». تتركب العناصر 1-,2,-1- الواقعة على محور x مع العناصر 1-,2,-1- الواقعة على المحور y لتعطي قطراً أساسياً بالعدد 4+ واربعة عناصر غير قطرية بـ 1- . لكن، لم يعد للمصفوفة عرض حزام يساوي 5 . لم يعد هناك سبيل لتعداد الـ N^2 من نقاط عين الشبكة في مربع، بحيث تبقى كل نقطة قريبة من النقاط الأربع المجاورة.

إذا حصل الترتيب على سطر في كل مرة، فان على كل نقطة أن تنتظر على طول سطر كامل من الجوار يقع فوقها وذلك لكي تتحرر ـ « ويكون لمصفوفة النقاط الخمسة» حزام من العرض N :



لقد استرعت هذه المصفوفة كثيراً من الاهتمام وهوجمت من طرق مختلفة أكثر من أي معادلة خطية أخرى $Ax = b$. اعتقد أن الإتجاه الآن خلفي إلى الطرائق المباشرة القائمة على أفكار *Golub* و *Hockny* ؛ يمكن لبعض المصفوفات الخاصة أن تقع جانباً عندما تهبط الطريق الصحيح . (يشبه ذلك تحويل فوريه السريع .) قبل أن يصل ذلك إلى طرائق التكرار ***لاتجاهات بديلة*** ، حيث التقسيم يفصل المصفوفة ذات الأقطار الثلاثة في اتجاه x عن الأخرى المتعلقة باتجاه y، وقبل أن نصل إلى زيادة الاسترخاء، بسبب كون قيمة جاكوبي الذاتية $\mu_{max} = cos\ \pi h$ مساوية ماكانت عليه في مسائل البعد الواحد. وكذلك الأمر من أجل معامل زيادة الاسترخاء w_{opt}. في كل حالة، تكمن الصعوبة في الانتقال من مسألة نموذجية إلى المسائل الواقعية، ولكل من هذه الطرائق امكاناتها الخاصة للعمل بنجاح مع معادلات أكثر عمومية من $-u_{xx} - u_{yy} = f$ ، وأكثر عمومية، من الناحية الهندسية، من المربع .

لايمكننا أن ننهي هذا الموضوع دون أن نذكر طريقة ***التدرجات المتوافقة*** التي اعتبرت ميتة ولكنها، في الدراسة، لاتزال، فعلاً، حية؛ إنها أكثر مباشرة من التكرار لكنها أقل من الحذف حيث يمكنها أن تتوقف في أي جزء من الطريق . ليس من الضروري أن نزعم أن على فكرة جديدة أن تبقى ظاهرة ومستهواة. لكن يظهر أنه من الجميل القول أن التحول من 99. إلى 75. كان ***له أثر*** فوري في حل $Ax = b$.

تمـاريـن

٧-٤-١ أوجد من أجل المصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

ذات القيم الذاتية $2-\sqrt{2}\ ,\ 2\ ,\ 2+\sqrt{2}$ ، مصفوفة جاكوبي $D^{-1}(-L-U)$ (وقيمها الذاتية ومصفوفة غاوس ـ سايدل $(D+L)^{-1}(-U)$ وقيمها الذاتية وكذلك العددين λ_{max} و ω_{opt} المتعلقين بـ SOR. لست بحاجة لحساب المصفوفة L_ω.

٧-٤-٢ من أجل المصفوفة ذات الشكل $n \times n$:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & \cdot & \cdot & \\ & \cdot & \cdot & -1 \\ & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

صف مصفوفة جاكوبي $J = D^{-1}(-L-U)$. برهن أن المتجه $x_1 = (\sin \pi h\ ,\ \sin 2\pi h\ ,\ldots\ldots, \sin n\,\pi h)$ متجه ذاتي للمصفوفة J متعلق بالقيمة الذاتية $\lambda_1 = \cos \pi h = \cos \pi/(n+1)$.

٧-٤-٣ من أجل المصفوفة A ذاتها، برهن أن المتجه :

$$x_k = (\sin k\,\pi h\ ,\ \sin 2k\,\pi h\ ,\ldots.\ ,\ \sin nk\,\pi h)$$

متجه ذاتي . اضرب x_k بالمصفوفة A لتحصل على القيمة الذاتية المقابلة α_k . تحقق من أنه في حالة مصفوفة من النوع 3×3 ، تكون القيم الذاتية

. $2-\sqrt{2}\ ,2\ ,2+\sqrt{2}$

ملاحظة : القيم الذاتية لمصفوفة جاكوبي $J = 1/2\,(-L-U) = I - \frac{1}{2}A$ هي $\lambda_k = 1 - \frac{1}{2}\alpha_k = \cos k\pi h$. تظهر هذه القيم أزواجاً بزائد ـ ناقص وتكون λ_{max} مساوية $\cos \pi h$.

التمارين التالية تتطلب «نظرية دائرة» *Gershgorin* : كل قيمة ذاتية للمصفوفة A تقع، على الاقل، داخل دائرة واحدة من الدوائر $C_1,\ldots\ldots,C_n$ ، حيث يقع مركز C_i في موضع العنصر القطري a_{ii} ويساوي نصف قطرها $r_i = \Sigma_{j\neq i}\,|a_{ij}|$ ، مجموع القيم المطلقة لبقية عناصر السطر الموافق.

البرهان : $Ax = \lambda x$ يؤدي إلى :

$$(\lambda - a_{ii})x_i = \sum_{j\neq i} a_{ij}x_j, \quad \text{or} \quad |\lambda - a_{ii}| \le \sum_{j\neq i} |a_{ij}|\,\frac{|x_j|}{|x_i|}.$$

إذا كانت المركبة العظمى للمتجه x هي x_i فإن النسبة الأخيرة تكون أصغر أو تساوي الواحد وهذا يعني أن λ تقع في الدائرة ذات الرقم i : $|\lambda - a_{ii}| \le r_i$.

٧-٤-٤ تدعى المصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

مسيطرة قطرياً . ذلك لأن كل $r_i < |a_{ii}|$. برهن أنه لايمكن للصفر أن يقع في أي دائرة من الدوائر واستنتج أن المصفوفة A غير شاذة .

٧-٤-٥ استخرج مصفوفة جاكوبي J لهذه المصفوفة المسيطرة قطرياً A وأوجد دوائر جيرشغورين الثلاث المتعلقة بالمصفوفة J . برهن أن جميع أنصاف

أقطارها تتحقق $r_i < 1$ ، وفسر لماذا يكون تكرار جاكوبي متقارب .

٧-٤-٦ الحل الصحيح للنظام $Ax = b$ مختلف قليلاً عن حل الحذف لـ $LUx_0 = b$ ؛ $A - LU$ - نخسر صفراً بسبب التدوير . أحد الامكانات هو عمل كل شيء بدقة ثنائية ، لكن الطريق الافضل والاسرع هو ***تنقية تكرارية*** : احسب متجهاً واحداً فقط $r = b - Ax_0$ بدقة ثنائية ، حل $LUy = r$ ، ثم اجمع التصحيح y لـ x_0 . مسألة : اضرب $x_1 = x_0 + y$ بـ LU، واكتب الناتج بشكل مجزأ $Sx_1 = Tx_0 + b$ وفسر لماذا T صغيرة جداً. هذه الخطوة الفريدة تنقلنا دوماً وتماماً نحو x .

٧-٤-٧ من أجل مصفوفة عامة من النوع 2×2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

أوجد مصفوفة تكرار جاكوبي $S^{-1}T = -D^{-1}(L+U)$ وقيمها الذاتية μ_i . أوجد أيضاً مصفوفة سايدل ـ غاوس $(D+L)^{-1}U$ ـ وقيمها الذاتية λ_i وقرر ما إذا كان $\lambda_{max} = \mu^2_{max}$.

الفصل الثامن

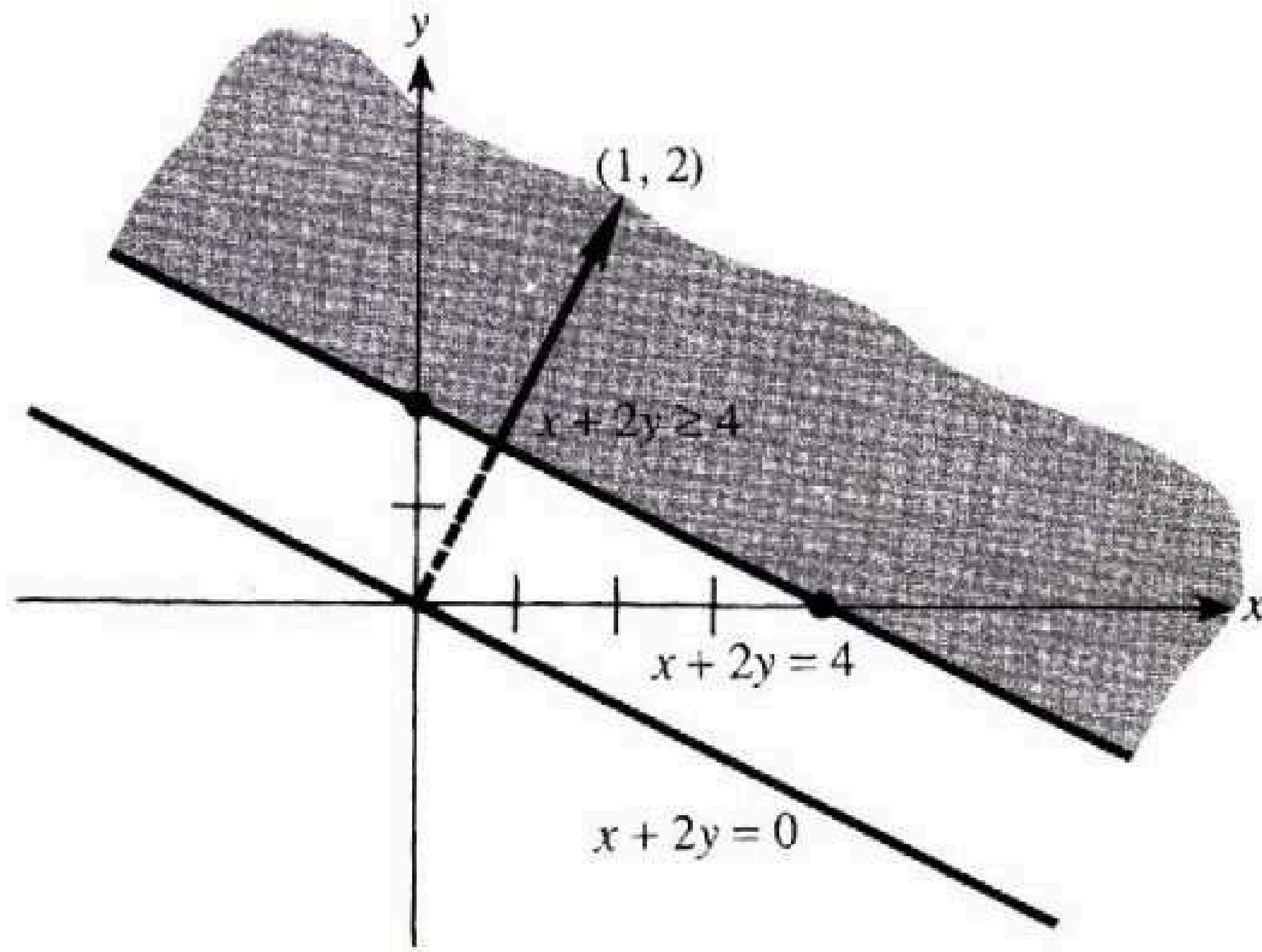
البرمجة الخطية ونظرية اللعب

٨-١ المتراجحات الخطية

جرت العادة أن ينظر للفرق بين الجبر والتحليل على أنه، إلى حد ما، مثل الفرق بين المعادلات والمتراجحات. ولقد بدا الخط الفاصل بينهما واضحاً بشكل دائم، ولكن، تحقق لي أخيراً أن البرمجة الخطية تمثل مثالاً معاكساً: إنها دراسة خاصة بالمتراجحات ولكنها، بدون نزاع، جزء من الجبر الخطي. إنها مفيدة جداً ـ تلائم البرمجة الخطية قرارات الاعمال أكثر من المحددات والقيم الذاتية. هناك ثلاث طرائق لمعالجة الرياضيات الاساسية: إما بطريقة حدسية من خلال الهندسة أو بطريقة حسابية بوساطة الإفراد أو جبرياً بالاعتماد على نظرية الثنوية. سنوضح هذه الطرائق في هذا البند والبندين ٨-٢ و ٨-٣. وستكون الفقرة ٨-٤ متعلقة بالمسائل التي حلولها أعداد صحيحة مثل مسألة الزواج. وفي النهاية، سنوضح نظرية أصغر النهايات العظمى (*minimax*) ونبين علاقتها بنظرية الثنوية في البرمجة الخطية.

توجد بعض الاشياء الجديدة في البند ٨-٢ من هذه الطبعة الثالثة. لقد أصبحت الآن طريقة الإفراد في منافسة مفعمة بالحياة مع طريقة مختلفة جداً باسلوب التخمين، إنها تدعى طريقة كارماركار *Karmakar*. لقد نالت هذه الفكرة كثيراً من الدعاية لأن التقرير الأولي يدّعي أنها أسرع بخمسين مرة من طريقة الإفراد. الادعاء لايزال قائماً،

ولكن هذه الطريقة لم تطبق في جميع المسائل . يظهر أن الطريقة الجديدة فعالة في المسائل الكبيرة غير الكثيفة ـ عندما تكون المصفوفة A ذات بنية ملائمة . لكن طريقة الإفراد تبقى في القمة من أجل كثير من المسائل الأخرى . الأمر ليس بعد واضحاً بصورة كاملة ، فالنظام لايزال قيد الدرس والتطوير في مخابر AT & T Bell ولايزال سرياً . (البرمجة الخطية واسعة الانتشار وذات أهمية كبيرة وذات وضع تجاري خطير ـ إن ذلك وضع غير موجود في الحساب العلمي) . لحسن الحظ ، إن مبادءها الاساسية أصبحت مشاعة ويمكننا توضيح مبادىء طريقة كارماركار في البند (٨-٢) .



شكل (١ ,٨) . معادلات ومتراجحات .

كان من الممكن أن يأتي هذا الفصل في أي مكان بعد الفصل الثاني . إنه يحوي مصفوفات مستطيلة ، إلا أنه ليس كل شيء هو معادلات خطية . في الحقيقة ، إحدى أسس هذا الباب كامنة في فهم المعنى الهندسي ***للمتراجحات الخطية*** تقسم متراجحة فضاءً ذا n بعداً ، ***إلى نصفي فضاء*** تكون المتراجحة في أحدهما محققة ولاتكون كذلك في الآخر . كمثال نموذجي على ذلك نأخذ المتراجحة $x + 2y \geq 4$. الحد

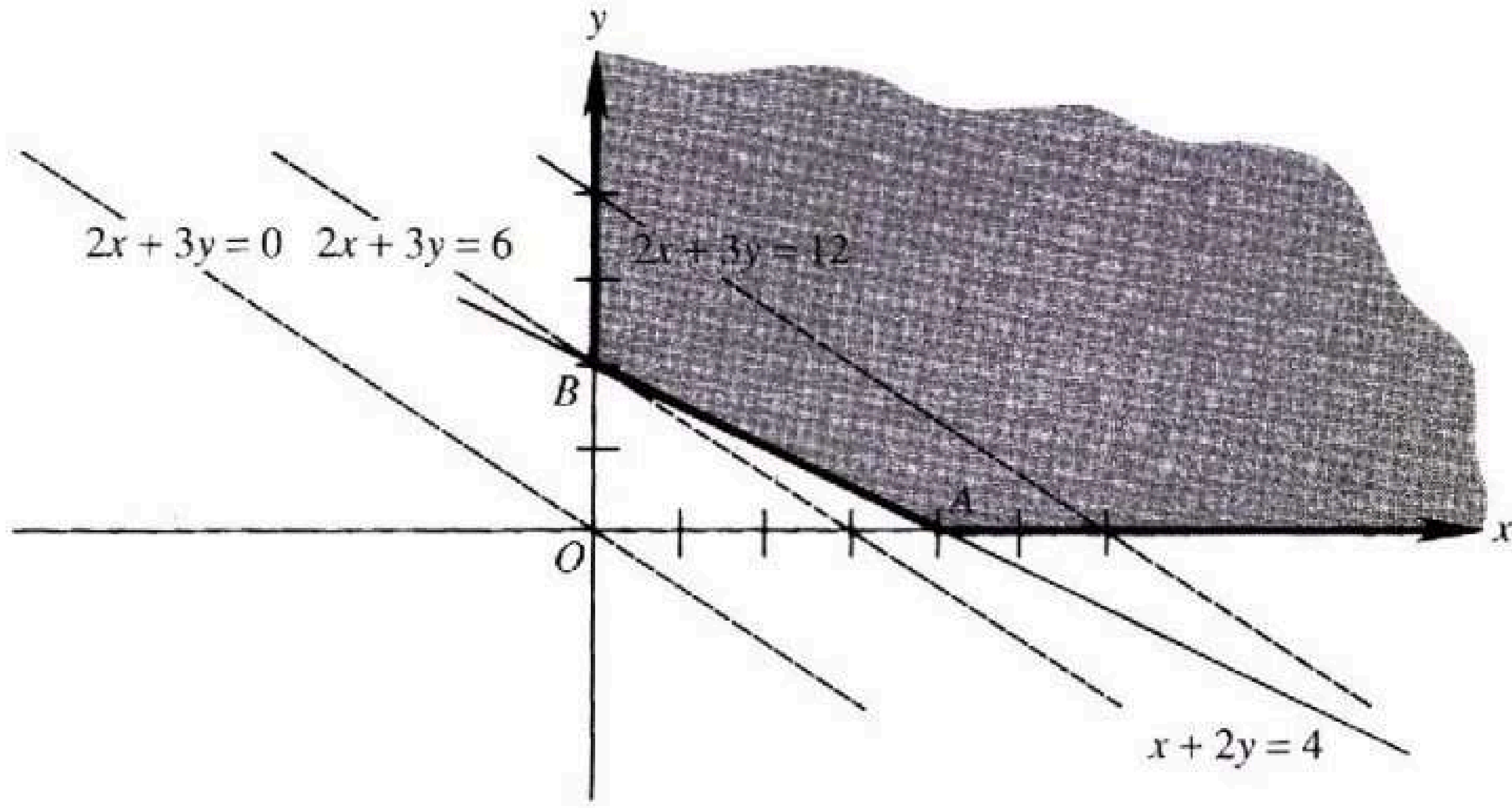
الفاصل بين نصفي الفضاء هو المستقيم $x + 2y = 4$ (١). يقع فوق هذا المستقيم نصف الفضاء المظلل في الشكل (٨-١) ؛ يقع تحته نصف الفضاء المقابل حيث المتراجحة غير محققة . ستكون الصورة في الفضاء ذي الابعاد الثلاثة مماثلة ؛ فالحد الفاصل هو مستو مثل $x + 2y + z = 4$، يكون فوقه نصف الفضاء $x + 2y + z \geq 4$. وفي فضاء ذي n بعداً، سنستمر بتسمية الحد الفاصل الذي عدد أبعاده $n - 1$، مستوياً .

بالاضافة إلى متراجحات من هذا النوع ، هناك قيود أساسية في البرمجة الخطية : تطلب من المتغيرين x,y أن يكونا ***غير سالبين*** هذا القيد ذاته مكون من متراجحتين $y \geq 0$ و $x \geq 0$. وبذا فان هناك نصفي فضاء آخرين يقع حداهما على المحورين الاحداثيين . جميع النقاط الواقعة على المستقيم $x = 0$ وعن يمينه ، تحقق المتراجحة $x \geq 0$. أما نصف الفضاء الآخر الذي يحقق المتراجحة $y \geq 0$ فمكون من نقاط المستقيم $y = 0$ والنقاط الواقعة فوقه .

المجموعة الملائمة ودالة التكلفة

تهدف الخطوة الأولى إلى تحقيق المتراجحات الثلاث الآتية آنياً : $x + 2y \geq 4, x \geq 0, y \geq 0$. من ناحية هندسية ، تتركب هذه المتراجحات الثلاث معاً لتنشيء المنطقة المظللة في الشكل (٨-٢) . يمكنك اعتبار هذه المنطقة انصاف الفضاء الثلاثة ، إنها ليست نصف فضاء لكنها هي ما جرت العادة على تسميتها في البرمجة الخطية ***المنطقة الملائمة*** وبصورة أوضح ، يمكن القول إن المنطقة الملائمة مكونة من مجموعة الحلول الآنية لمجموعة متراجحات خطية .

يصف النظام $Ax = b$ ذو الـ m معادلة والـ n مجهولاً ، تقاطع m من المستويات المختلفة ـ مستو واحد لكل معادلة . (عندما يكون $m = n$ وتكون المستويات مستقلة ، فان تقاطعها سيكون نقطة واحدة تمثل الحل : $x = A^{-1}b$) . بصورة مشابهة يتكون نظام مثل $Ax \geq b$ من m متراجحة يمثل تقاطع m من انصاف فضاء ، وإذا اشترطنا فوق ذلك



شكل (٢ – ٨). المجموعة الملائمة ودالة التكلفة **2x +3y** .

أن تكون جميع مركبات x غير سالبة (وهو ما نعبّر عنه بالمتراجحة المتجهة $x \geq 0$) فان ذلك يضيف إلى ماسبق n من أنصاف الفضاء نفسه. وكلما كثرت الشروط التي نفرضها كلما صغرت المنطقة الملائمة.

من الممكن أن تكون المنطقة الملائمة مجموعة محدودة أوحتى خالية. فاذا حولنا مثالنا إلى نصف الفضاء $x + 2y \leq 4$ مع المحافظة على $x \geq 0$ و $y \geq 0$، فإننا نحصل على المثلث OAB. بتركيب المتراجحتين $x + 2y \geq 4$ و $x + 2y \leq 4$ معاً تتقلص المجموعة إلى مستقيم، إذ أن هذين الشرطين معاً يؤديان معاً إلى $x + 2y = 4$. وإذا اضفنا شرطاً مناقضاً مثل $x + 2y \leq -2$ فان المجموعة الملائمة تصبح خالية.[١]

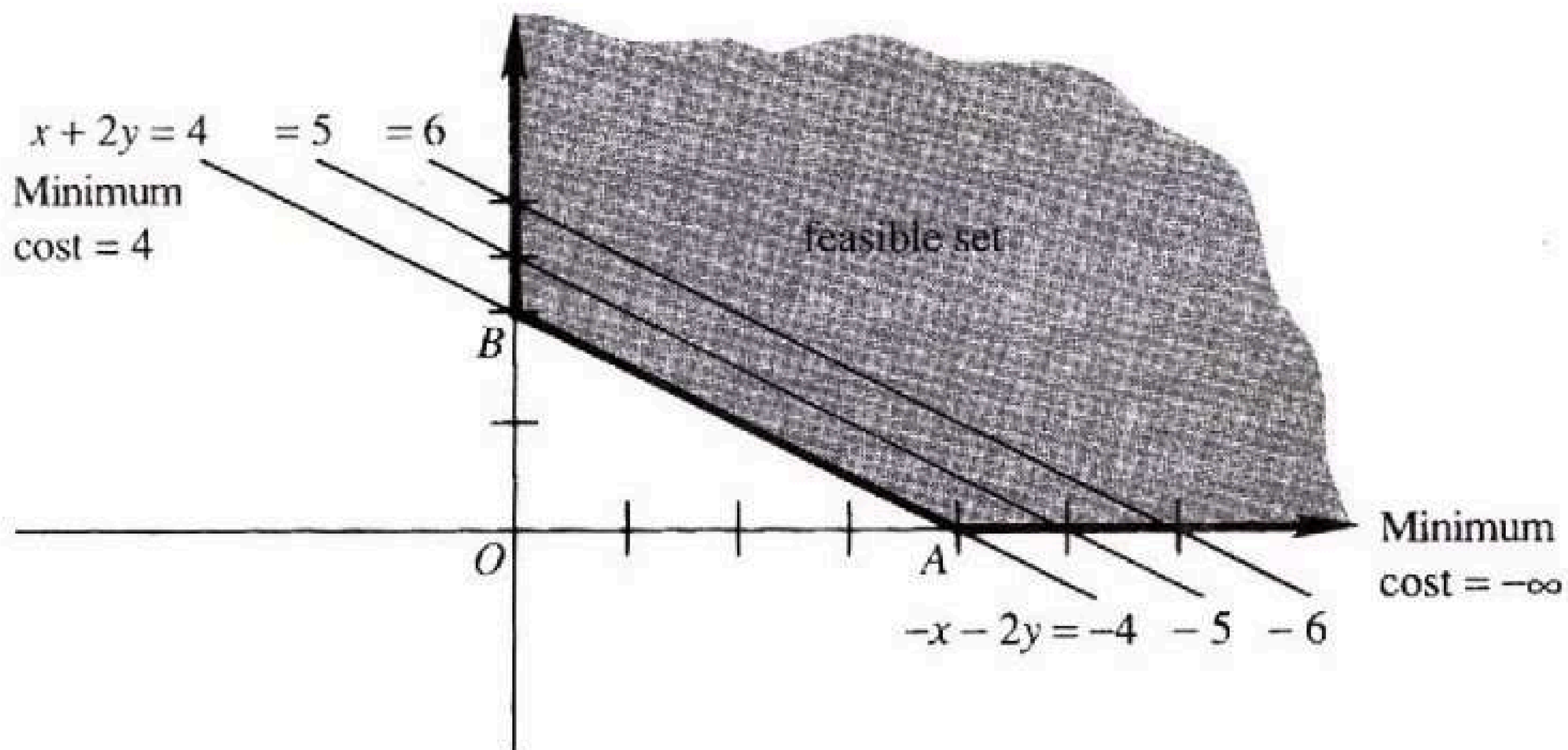
إن جبر المتراجحات الخطية (أو المجموعات الملائمة) هو جزء من موضوعنا. مع ذلك، يوجد في البرمجة الخطية أمر آخر اساسي : ***إننا لانهتم بمجموعة النقاط الملائمة بقدر مانهتم بتلك النقطة التي تجعل «دالة تكلفة» أعظمية أو أصغرية***. نضيف إلى مثالنا $x + 2y \geq 4 , x \geq 0 , y \geq 0$، ***دالة التكلفة*** (دالة الهدف) $2x + 3y$. وبذا،

(١) لاتوجد نقاط مشتركة بين نصف الفضاء $x + 2y \leq -2$ وبين الربع الأول $x \geq 0 , y \geq 0$ (المترجم).

تكون المسألة الحقيقية في البرمجة الخطية هي إيجاد النقطة x, y ***التي تقع في المجموعة الملائمة وتجعل التكلفة أقل مايمكن.***

المسألة موضحة هندسياً بالشكل (٨-٢). إن جماعة التكاليف $2x+3y$ تقابلها جماعة من المستقيمات المتوازية وعلينا أن نجد أصغر تكلفة، بقول آخر، أول مستقيم يتقاطع مع المنطقة الملائمة. ومن الواضح أن هذا التقاطع يحصل عند النقطة B، حيث $x^*=0$ و $y^*=2$ وتكون التكلفة الاصغرية مساوية $2x^*+3y^*=6$. يدعى المتجه (0,2) متجهاً ملائماً لأنه ينتمي للمنطقة الملائمة، وهو الأمثل لأنه يجعل دالة التكلفة أصغرية، وهذه القيمة التي هي 6 تدعى خبرة البرنامج. سنميز المتجه الامثل بنجمة تعلوه.

يمكنك أن ***تلاحظ أن المتجه الأمثل يظهر عند أحد رؤوس المنطقة الملائمة.*** يتأكد ذلك هندسياً، إذ أن المستقيمات المقابلة لدالة التكلفة (أو المستويات عندما يكون عدد المجاهيل أكبر) تتحرك إلى أن تتقاطع مع المنطقة الملائمة. ينبغي أن يحدث أول تماس عند الحدود. تبقى طريقة الإفراد، على هذه الحدود، متنقلة من قرنة من المنطقة الملائمة إلى التي تليها إلى أن تجد القرنة التي تكون فيها التكلفة أخفض ما يمكن. بالمقابل، تتقرب طريقة كارماكار من الحل الأمثل من ***داخل*** المجموعة الملائمة.



شكل(٣-٨). حالات خاصة: النقاط من A إلى B تصغر x + 2y؛ قيمة x - 2y الصغرى هي∞.

ملاحظة قد لايكون التقاطع ، من أجل دالة تكلفة أخرى ، نقطة واحدة : فلو كانت دالة التكلفة هي $x+2y$ ، لكانت نقاط الضلع الذي يقع بين A و B هي نقاط تقاطع في وقت معاً ، وسيكون هناك عدد غير منته من المتجهات المثلى على طول هذا الضلع ، الشكل (٨-٣) . تبقى قيمة البرنامج وحيدة ($x^* + 2y^*$ تساوي 4 لكل هذه المتجهات المثلى) ويكون لمسألة القيم الصغرى جواب محدد . من ناحية أخرى ، ليس لمسألة القيمة العظمى حل ؛ ففي منطقتنا الملائمة ، يمكن للتكلفة أن تزداد بدون حدود ، وهكذا ، فان التكلفة العظمى غير منتهية . ويمكن النظر لذلك بطريقة أخرى ، مع البقاء ضمن مسائل الاصغرية ، وذلك بان نعكس إشارة التكلفة لتصبح $-x-2y$ فتكون القيمة الصغرى $-\infty$ كما هو ظاهر في الشكل (٨-٣) ، ولايوجد ، حينئذ ، حل . تقع أي مسألة برنامج خطي في واحد من اصناف ثلاثة :

(١) المجموعة الملائمة خالية .

(٢) دالة التكلفة على المجموعة الملائمة غير محدودة .

(٣) للتكلفة *نهاية صغرى* (أو عظمى) على مجموعة التكلفة .

الحالتان الأوليان غير مألوفتين من أجل مسألة حقيقية في الاقتصاد أو الهندسة .

المتحولات المتراخية

توجد طريقة سهلة لتغيير قيد على شكل متراجحة إلى معادلة ، وذلك بإدخال *المتغير المتراخي* $w = x + 2y - 4$. يتحول القيد القديم $x + 2y \geq 4$ إلى $w \geq 0$ وهو شرط يلائم القيود الأخرى $x \geq 0, y \geq 0$. وستبدأ طريقة الإفراد ، تماماً ، على هذا النحو مستخدمة متغيراً متراخياً لكل متراجحة ، وذلك لكي نحصل على معادلات ، فقط ، وقيود بسيطة تجعل المتغيرات غير سالبة . تصبح المسألة الاساسية في البرمجة الخطية :

جعل cx ***في نهايته الصغرى خاضعاً لـ*** $Ax = b$ **و** $x \geq 0$

المتجه السطري يحوي التكلفة ؛ في مثالنا $c = [\,2 \;\; 3\,]$. يحوي المجهول x المتغيرات

الاصلية والمتغيرات المتراخية. يسحب الشرط $x \geq 0$ المسألة إلى المنطقة غير السالبة في فضاء ذي n بعداً. وتتداخل هذه المتراجحات مع الحذف الغاوسي، ومن الضروري إيجاد طريقة جديدة تماماً.

تفسير المسألة ومرافقتها

نريد أن نعود إلى مثالنا الاصلي، حيث دالة التكلفة هي $2x + 3y$، لصياغته بالكلمات. إنه توضيح لمسألة الحمية في البرمجة الخطية حيث يتوفر مصدران للبروتين ـ مثلاً اللحم وزبدة الفول السوداني. كل رطل من الزبدة يعطي وحدة من البروتين وكل رطل من اللحم يعطي وحدتين، ويتطلب من الوجبة أن تحتوي على أربع وحدات من البروتين على الاقل. فاذا كانت الوجبة تحتوي على x رطلاً من الزبدة و y رطلاً من اللحم فانها تكون مقيدة بالشروط الآتية:

$x + 2y \geq 4$، $y \geq 0$ و $x \geq 0$ (لايمكننا أن نحصل على كمية سالبة من اللحم أو الزبدة). هذه هي المجموعة الملائمة، والمسألة هي البحث عن التكلفة الاصغرية. إذا كان ثمن رطل الزبدة دولارين وثمن رطل اللحم ثلاثة دولارات فإن تكلفة الوجبة الكاملة هي: $2x + 3y$ لحسن الحظ، فإن الوجبة المثلى هي اللحم: $x^* = 0, y^* = 2$.

لكل برنامج خطي، بما في ذلك المثال السابق، ***برنامج مرافق***. إذا كانت المسألة الاصلية هي البحث عن الاصغر فان البرنامج المرافق يبحث عن الاعظم. حل إحدى هاتين المسألتين يؤدي مباشرة إلى الأخرى. في الحقيقة، يجب أن تكون القيمة الاصغرية في البرنامج الاصلي هي القيمة العظمى للمسألة المرافقة. وهذه، فعلاً، هي النتيجة الاساسية في نظرية البرمجة الخطية، وستتضح في البند (٨-٣). سنبقى الآن مع مسألة الحمية وسنحاول تفسير مرافقتها.

عوضاً عن أن يبحث الشاري أمر الاختيار بين اللحم والزبدة ليحصل على كمية البروتين المطلوبة بأقل تكلفة، فإن المسألة المرافقة تواجه صيدلياً يبيع بروتيناً *صناعياً*.

إنه يعتزم منافسة اللحم والزبدة. سنقابل مباشرة هذين المركبين في مسألة برمجة خطية نموذجية: إنه يريد الحصول على أعلى سعر p ولكن هذا السعر خاضع لقيود خطية. أولاً يجب على البروتين الصناعي ألا يكلف أكثر من بروتين الزبدة (الذي هو دولاران للوحدة) أو بروتين اللحم (الذي هو ٣ دولارات للوحدتين). بالوقت نفسه، يجب ألا يكون السعر سالباً، أو أن الصيدلي لن يبيع. لما كانت الوجبة تتطلب أربع وحدات من البروتين فإن دخل الصيدلي هو $4p$. والمسألة المرافقة هي فعلاً ما يلي: ***إيجاد قيمة عظمى للدالة $4p$ الخاضعة للقيود:*** $p \leq 2 , 2p \leq 3$ و $p \geq 0$. هذا مثال تكون فيه المسألة المرافقة أسهل حلاً من المسألة الاصلية، فهي ذات مجهول واحد. من الواضح أن القيد $2p \leq 3$ هو الوحيد الفعال وسيكون السعر الأعلى للبروتين الصناعي هو دولار ونصف؛ وبذلك يكون الدخل $4p = \$6$.

كانت التكلفة الدنيا للمسألة الاصلية ست دولارات وسينتهي الشاري بدفع المبلغ ذاته سواء من أجل البروتين الطبيعي أو البروتين الصناعي. إن ذلك يعني أن نظرية الثنوية هي: ***النهاية العظمى تساوي النهاية الصغرى.***

تطبيقات نموذجية

سوف نولي اهتمامنا، في البند التالي، حل البرامج الخطية. وقد حان الوقت كي نستعرض بعض الحالات العملية التي ينبثق منها السؤال الرياضي المهم الآتي: *إيجاد النهاية الصغرى أو العظمى لدالة تكلفة خطية خاضعة لشروط خطية.*

(١) ***تخطيط الانتاج.*** لنفرض أن شركة جنرال موتورز تربح ١٠٠ دولار عند بيع سيارة شفرولية و ٢٠٠ دولار لكل بويك و ٤٠٠ دولار لكل كاديلاك. تستهلك هذه السيارات غالوناً لكل عشرين ميلاً، ١٧ ميلاً، ١٤ ميلاً على التوالي. ولكن الكونغرس يشترط أن يكون المعدل هو ١٨ ميلاً لكل غالون. تقوم الشركة بتجميع سيارة شفروليه

واحدة في كل دقيقة وسيارة بويك في كل دقيقتين وسيارة كاديلاك في كل ثلاث دقائق . ماهو أعظم ربح للشركة خلال يوم ذي ٨ ساعات ؟

المسألة : أوجد القيمة العظمى للدالة $100x + 200y + 400z$ ، ضمن الشروط $x, y, z \geq 0$.

(٢) **اختيار سندات .** نفرض أن هناك ثلاثة أنواع من السندات : سندات اتحادية تعطي ربحاً قدره ٥٪ وبمعدل A، سندات إدارة محلية تعطي ٦٪ بمعدل B ، وسندات شركة اليورانيوم تعطي ٩٪ وبمعدل C. يمكننا أن نوظف في ذلك على الترتيب x,y,z بحيث لايزيد المجموع على 100000 $. المسألة هي إيجاد النهاية العظمى للربح تحت القيدين :

(١) لايمكن توظيف أكثر من 20000 $ في اليورانيوم،

(٢) يجب أن يكون معدل الانواع المختلفة على الاقل B .

مسألة : أوجد النهاية العظمى لـ $5x + 6y + 9z$ تحت الشروط :

$$x = y + z \geq 100,000 \,,\; z \leq 20,000 \,,\; z \leq x, x, y, z \geq 0$$

تمارين

٨-١-١ خطط المنطقة الملائمة الخاضعة للقيود $x + 2y \geq 6 \,, 2x + y \geq 6 \,, x \geq 0 \,, y \geq 0$. ما هي النقاط الواقعة في قرنات هذه المجموعة .

٨-١-٢ (ينصح به) في المجموعة الملائمة السابقة ، ماهي القيمة الاصغرية لدالة التكلفة $x + y$ ؟ ارسم المستقيم $x + y = c$ عندما يمس المجموعة الملائمة لأول مرة .

ماهي النقاط التي تجعل دالة التكلفة $3x+y$ أو $x-y$ في نهايتها الصغرى؟

٨-١-٣ برهن أن المجموعة الملائمة المقيدة بالشروط التالية مجموعة خالية :

$$x \geq 0, 2x+5y \geq 3, -3x+8y \geq -1$$

٨-١-٤ برهن أن المسألة التالية ملائمة ولكنها غير محدودة لذا، فليس لها حل أمثل : اجعل $x+y$ في نهايتها العظمى تحت القيود :

$$x \geq 0, y \geq 0, +-3x+2y \leq -1, x-y \leq 2$$

٨-١-٥ أضف قيداً واحداً على شكل متراجحة إلى $x \geq 0, y \geq 0$ بحيث لاتحوي المجموعة الملائمة سوى نقطة واحدة .

٨-١-٦ ماهو شكل المجموعة الملائمة $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x+y+z=1$، وماهي القيمة العظمى لدالة التكلفة $x+2y+3z$ ؟

٨-١-٧ حل مسألة السندات الواردة قبل هذه التمارين .

٨-١-٨ في المجموعة المواتية لشركة جنرال موتورز، نجد أن الشرط $x,y,z \geq 0$ يبقى من الفضاء الثلاثي ثمنه (الثمن الموجب) . كيف يقطع هذا الثمن من قبل المستويين الناشئين عن القيدين وماهو شكل المجموعة المواتية ؟ كيف تبين قرنات هذا الشكل أن الحل الامثل يتضمن، تحت هذين القيدين، نوعين فقط من السيارات .

٨-١-٩ *مسألة النقل* : لنفترض أن تكساس، كاليفورنيا وألاسكا تنتج كل منها مليون برميل من البترول وأن شيكاغو التي تبعد عن أماكن الانتاج هذه بمقدار ١٠٠٠ ميل، ٢٠٠٠ ميل، ٣٠٠٠ ميل على التوالي، تحتاج إلى ٨٠٠٠٠٠ ألف برميل وأن نيوانغلند التي تبعد عن اماكن الانتاج بمقدار ١٥٠٠ ميل، ٣٠٠٠ ميل، ٣٧٠٠ ميل على التوالي، تحتاج إلى ٢٢٠٠٠٠٠ برميل . إذا فرضنا أن نقل البرميل الواحد لمسافة ميل واحد

يكلف دولاراً واحداً فماهو البرنامج الخطي المتضمن خمس معادلات قيود والذي يجب حله كي تكون تكلفة النقل الاجمالية أصفر ما يمكن .

٨ - ٢ طريقة الإفراد وطريقة كارماركار

يتعلق هذا البند بالبرمجة الخطية التي يساوي عدد مجاهيلها n وعدد القيود يساوي m. لقد كان في البند السابق $n=2$ و $m=1$ ، وكان هناك متغيران غير سالبين وقيد وحيد هو $x+2y \geq 4$. ليس من الصعب شرح الحالة العامة وإن كان حلها ليس سهلاً حقاً .

إن أفضل طريقة هي وضع المسألة في الشكل المصفوفي مباشرة . لدينا :

(١) مصفوفة A من النوع $m \times n$

(٢) متجه عمود b ذو m مركبة

(٣) متجه سطر c ذو n مركبة .

على المتجه «الملائم» x أن يحقق $x \geq 0$ و $Ax \geq b$. المتجه الامثل هو المتجه الملائم الذي يحقق أصغر تكلفة ـ التكلفة هي $cx = c_1x_1+....+c_nx_n$.

مسألة القيمة الصغرى: جد القيمة الصغرى للدالة cx ، ضمن الشروط $Ax \geq b$, $x \geq 0$.

التفسير الهندسي واضح . فالشرط الأول $x \geq 0$ يقصر المتجه على المنطقة الموجبة في الفضاء النوني ــ هذه هي المنطقة المشتركة بين جميع انصاف الفضاء $x_i \geq 0$. وهي ، بالنسبة للفضاء الثنائي ، تمثل ربع المستوي ، وبالنسبة للفضاء الثلاثي تمثل ثمنه . بشكل عام للمتجه فرصة واحدة من بين 2^n كي يكون غير سالب . أما القيود الأخرى التي عددها m فهي تنشيء انصاف فضاء اضافية عددها m. وتكون المتجهات الملائمة هي تلك التي تحقق الـ $m+n$ شرطاً ، إنها تقع في المنطقة $x \geq 0$ وتحقق ،

في الوقت نفسه، $Ax \geq b$. بقول آخر إن المجموعة الملائمة هي تقاطع انصاف الفضاء هذه والتي عددها $m+n$. وهي ربما تكون محدودة أو غير محدودة، وقد تكون خالية .

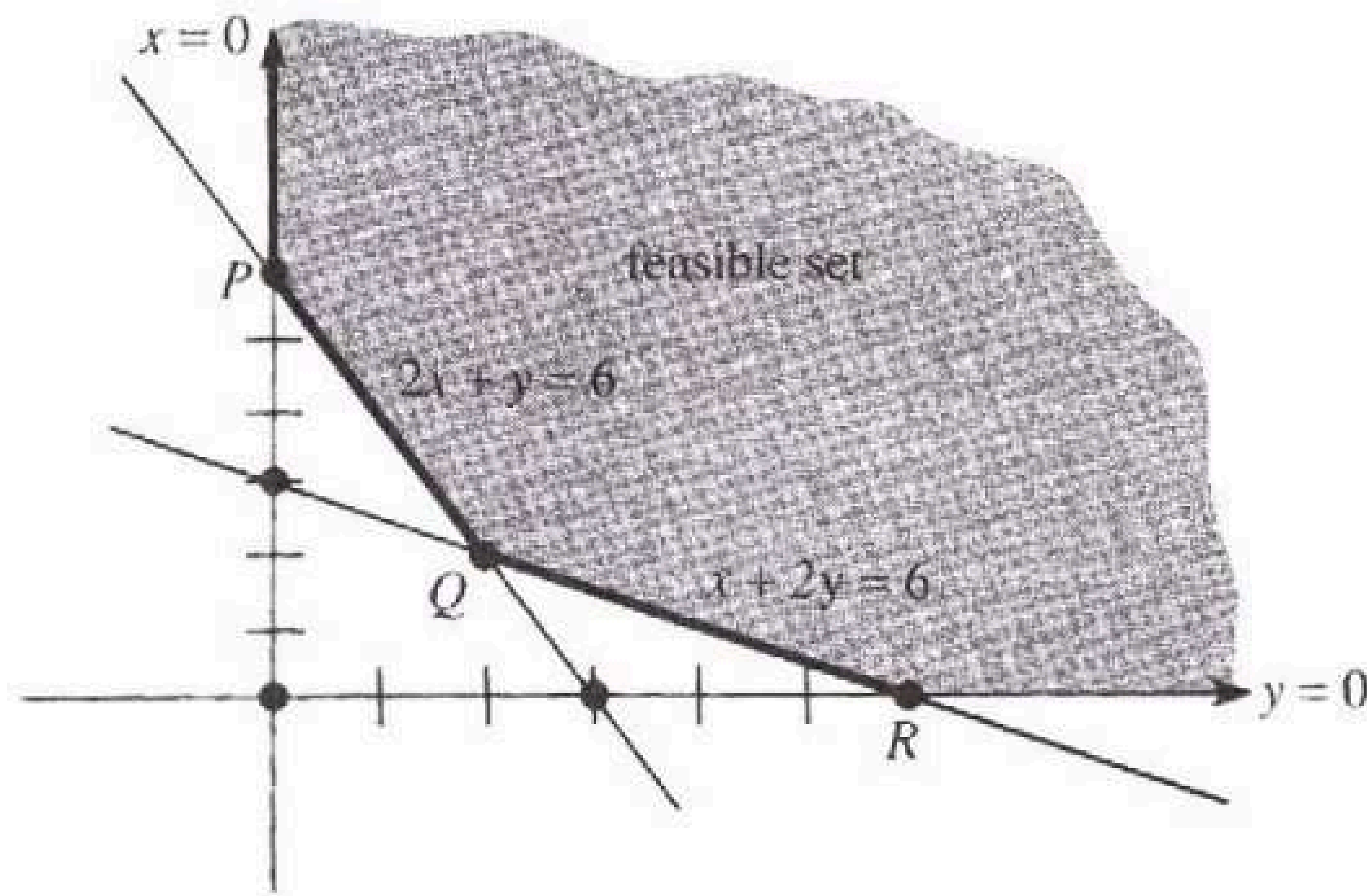
دالة التكلفة cx ترافق المسألة بجماعة من المستويات المتوازية . أحد عناصر هذه الجماعة هو المستوي الذي يمر بنقطة الاصل $cx = 0$. إذا حقق x هذه المعادلة فانه يمثل متجهاً ذا تكلفة أصغرية . المستويات الأخرى $cx = cont$ تعطي جميع التكاليف الممكنة . مع تغيير قيمة التكلفة، نجد أن هذه المستويات تمسح الفضاء النوني بأكمله ويقع المتجه الامثل x^* عند أول نقطة تماس مع المجموعة الملائمة . *المتجه* x^* ملائم ودالة التكلفة عنده cx^* هي أقل قيمة ممكنة ضمن المجموعة الملائمة . إنه حل مسألة التصغير في البرمجة الخطية .

أحد أهداف هذا البند هو حساب x^* . يمكن أن نتوصل إلى ذلك (من حيث المبدأ) بإيجاد جميع قرنات المجموعة الملائمة وحساب التكلفة عندها؛ تدعى القرنة التي تكون عندها دالة التكلفة أصغرية قرنة مثلى . من ناحية عملية يعتبر مثل هذا العمل مستحيلاً، فهناك بلايين من القرن ولا يسعنا حسابها جميعاً . بدلاً من ذلك فاننا نلتفت إلى ***طريقة الإفراد*** التي تعد، بحق، أنجح فكرة في الرياضيات الحاسوبية المعاصرة . لقد طورت من قبل *Dantzing* دانتزك كطريقة نظامية لحل البرامج الخطية، وسواءً كان اكتشافها صدفة أو نتيجة عبقرية فانها نجاح مدهش . لقد اجملت خطوات هذه الطريقة مؤخراً إلا أننا سنحاول أولاً تفسيرها، ثم نصف الطريقة الجديدة المقدمة من قبل كارماركار .

الهندسة : التحرك على الأضلاع

اعتقد أن التوضيح الهندسي هو الذي يكشف سر هذه الطريقة . تحدد الخطوة الأولى ببساطة إحدى قرنات المجموعة الملائمة . هذه هي المرحلة «١» التي نفترض أنها قد تمت . أما لب الطريقة فيكمن في مرحلتها الثانية ***التي تنتقل من قرنة إلى قرنة .***

على أضلاع المجموعة الملائمة . عند قرنة من القرن ، يمكننا أن نختار ضلعاً من بين n من الاضلاع التي قد يبتعد بعضها عن القرنة المثلى x^*، بينما يقترب البعض الآخر منها . لقد اختار دانتزك السير على ضلع بالاتجاه الذي تنقص عليه التكلفة . يؤدي هذا الضلع إلى قرنة جديدة ذات تكلفة أقل وليس هناك احتمال للعودة إلى نقطة ذات تكلفة أكبر . وفي النهاية نصل إلى نقطة معينة ، الاتجاه منها على جميع الخطوط المارة منها يؤدي إلى زيادة في التكلفة ، تكون التكلفة عندها أصغرية . هذه القرنة هي المتجه الامثل ، وتتوقف الطريقة .



شكل (٤-٨) . قرنات المجموعة الملائمة وأضلاعها .

تكمن المشكلة الحقيقية في كيفية صياغة هذه الفكرة بأسلوب الجبر الخطي . في البداية ، سوف نفسر كلمتي قرنة و ضلع في الفضاء النوني . القرنة نقطة تلاقي عدد من المستويات المختلفة ، كل منها معطى بمعادلة وحيدة ـ تماماً ، كما تتلاقى ثلاثة مستويات لتكون نقطة في الفضاء الثلاثي . لنتذكر أن المجموعة الملائمة في البرمجة الخطية تتحدد بالمتراجحات $Ax \geq b$ التي عددها m والمتراجحات $x \geq 0$ التي عددها n . تتولد كل قرنة لهذه المجموعة من تحويل n من هذه المتراجحات التي عددها $m+n$ إلى معادلات ، ثم إيجاد نقطة تقاطع المستويات الممثلة لها . بشكل خاص ، إحدى إمكانات اختيار هذه المعادلات هي $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$ التي تتلاقى عند نقطة الاصل .

كبقية الاختيارات الأخرى ، *فإن نقطة التقاطع هذه تكوّن نسخة قرنة أصيلة ، إذا حققت القيود الأخرى* وإلا فانها لاتنتمي إلى المجموعة الملائمة وتكون مزيفة تماماً. مثال ذلك التمرين ٨-١-١ الذي يحتوي على متغيرين ($n = 2$) وعلى قيدين ($m = 2$) ؛ وهناك ست نقاط تقاطع ممكنة موضحة في الشكل (٨ - ٤)، ثلاث منها هي قرنات في المجموعة الملائمة ولقد رمزنا لها بـ P,Q,R. وهي : $(0,6)$ ، $(2,2)$ ، $(6,0)$. واحدة منها لابد أن تمثل المتجه الامثل (ما لم تكن التكلفة الصغرى هي $-\infty$) أما الثلاث الأخر بما فيها نقطة الاصل فهي مزيفة .

بصورة عامة هناك $(n+m)!/n!\,m!$ نقطة تقاطع ممكنة، ذلك هو عدد الطرائق التي يتم بها اختيار n مستوياً من بين مستويات عددها $n+m$ [١] . إذا كانت المجموعة الملائمة خالية ، عندئذ، لن تكون أي نقطة من نقاط التقاطع قرنة أصيلة . عمل المرحلة الأولى هو إيجاد قرنةً أصيلة أو التأكد من أنها مجموعة خالية . سوف نستمر بفرض أننا قد وجدنا إحدى قرنات المجموعة .

والآن إلى ضلع من الاضلاع : لنفرض أن أحد المستويات المتقاطعة التي عددها n قد حذف فيبقى لدينا n -1 من المعادلات . ولذا، فهناك درجة واحدة من الحرية . النقاط التي تحقق المعادلات التي عددها n -1 تكوّن ضلعاً يمر بالقرنة . هندسياً، هذا الضلع هو تقاطع المستويات التي عددها n -1 . تجبرنا البرمجة الخطية على أن نبقى ضمن المجموعة الملائمة، لذا، فليس لنا اختيار في اتجاه التحرك على طول الضلع . اختيار واحد فقط يكون ملائماً. إلا أن هناك n من الاختيارات المختلفة بين الأضلاع ومهمة المرحلة الثانية هي إيجاد هذا الاختيار .

لكي نشرح هذه المرحلة ، علينا أن نعيد كتابة المتراجحات $Ax \geq b$ بما يتلائم مع

---

(١) إن هذا العدد الكبير يوضح السبب في كون إيجاد جميع القرنات إجراء غير عملي عندما يكون العدد n كبيراً.

القيود البسيطة $x_1 \geq 0 ,..., x_n \geq 0$. هذا هو دور *المتغيرات المتراخية* $w = Ax - b$. القيود $Ax \geq b$ التي عددها m ، تصبح $w_1 \geq 0 ,..., w_m \geq 0$ ، **متغير واحد متراخ** لكل سطر من المصفوفة A . تأخذ المعادلة $w = Ax - b$ أو $Ax - w = b$ الشكل المصفوفي الآتي

$$\begin{bmatrix} A & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} = b.$$

تتحدد المجموعة الملائمة من خلال المعادلات التي عددها m والمتراجحات البسيطة $x \geq 0 , w \geq 0$ التي عددها $n + m$. لدينا الآن **قيود معادلات** وقيود عدم السلبية .

ولكي نجعل التغيير تاماً، سوف لن ندع أي اختلاف يذكر بين المتغير الأساسي والمتغير المستحدث w . لن تشهد طريقة الإفراد أي اختلاف بذلك . ولذا، لن يبقى هناك ميزة للرمزين :

$$\begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{bmatrix} A & -I \end{bmatrix}$$

لذا، فإننا نعيد تسمية *المصفوفة الموسعة* A *وكذلك المتجه الموسع* x . تصبح معادلات القيود $Ax = b$ ، أما المتراجحات البسيطة التي عددها $n + m$ فتصبح $x \geq 0$ [1] . يحتاج متجه التكلفة الاصلي للتوسعة، أيضاً، وذلك بإضافة مركبات جديدة عددها m ، جميعها أصفار ؛ تبقى دالة التكلفة cx نفسها حتى بعد إجراء التعديلات على x و c . الأثر الوحيد الذي يبقى للمتغير المتراخي w هو أن المصفوفة الجديدة A قد أصبحت من النوع $m \times (n + m)$ وأن المتجه الجديد x قد أصبح بمركبات عددها $n + m$. سنحتفظ بهذه الزيادة من الرموز الأصلية تاركين m و n دون تغيير لتكون تذكرة لما قد حصل . وتصبح المسألة *أوجد القيمة الصغرى للدالة* cx *ضمن الشروط* : $x \geq 0$ ، $Ax = b$. لاحظ أن المصفوفة A مستطيلة .

---

(١) من الطبيعي أن يزودنا رجال الاقتصاد أو المهندسون بمعادلات شروط منذ البداية . في هذه الحالة تبدأ طريقة الإفراد بالمعادلات $Ax = b$ دونما حاجة إلى المتغيرات المتراخية .

مثال في المسألة الموضحة في (٨–٤) بالقيود $x + 2y \geq 6$, $2x + y \geq 6$ ودالة التكلفة $x + y$ ، يكون النظام الجديد :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \text{و} \quad c = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

بهذا التغير إلى قيود بمعادلات، يمكن لطريقة الإفراد أن تبدأ. تذكر أن المرحلة الأولى قد وجدت قرنة من قرنات المجموعة الملائمة التي هي مكان التقاء المستويات التي عددها n: لقد تحولت n من المتراجحات الاصلية $x \geq 0$ و $Ax \geq b$ (المعروفة بـ $w \geq 0$) إلى معـادلات. بقول آخر ***القرنة هي نقطة تنعدم من أجلها n من مركبات المتجه الجديد*** x (x القديمة و w). في نظام المعادلات $Ax = b$ ، هذه المركبات الـ n لـ x هي ***المتغيرات الحرة***، والمتغيرات الباقية التي عددها m هي ***المتغيرات الأساسية*.** بجعل المتغيرات الحرة، أصفاراً، تعين المعادلات $Ax = b$ التي عددها m الـ m متغيراً أساسياً. ندعو الحل الذي نحصل عليه *أساساً* وذلك لتأكيد ارتباطه التام بهذه المتغيرات. إنه الحل الخاص الوارد في البند ٢–٢. ولسوف يكوّن قرنة (حقيقية) إذا كانت جميع المركبات التي عددها m موجبة، لذا، فإنها تقع في المجموعة الملائمة.

٨أ إن قرنات المنطقة الملائمة هي، تماماً، ***الحلول الأساسية الملائمة للنظام*** $Ax = b$: يكون الحل أساسياً إذا كانت n مركبة من مركباته التي يبلغ عددها $n + m$ مساوية الصفر، ويكون الحل ملائماً إذا حقق الشرط $x \geq 0$. تكتشف الخطوة الأولى من طريقة الإفراد حلاً أساسياً ملائماً، بينما تتحرك المرحلة الثانية خطوة خطوة نحو الحل الامثل.

مثال القرنة p الظاهرة في الشكل (٨–٤) هي تقاطع $x = 0$ مع $2x + y - 6 = 0$ ، ولذا، فإن مركبتين من مركبات x تساويان الصفر والمركبتان الأخريان تساويان 6؛ إنه حل أساسي وملائم.

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix} = b.$$

لايزال القرار الحاسم بحاجة إلى تكوين : أي قرنة ستكون التالية ؟ لقد وجدنا إحدى القرن حيث $m = 2$ مركبة من مركبات x موجبة أما الباقي فأصفار . نود الانتقال على أحد أضلاع المجموعة الملائمة إلى قرنة مجاورة . حقيقة كون قرنتين متجاورتين تعني أن $m - 1$ من المتغيرات الاساسية التي عددها m *سوف تبقى أساسية ويصبح متغير واحد فقط حراً* (صفراً) . في الوقت نفسه ، سوف يصبح أحد المتغيرات الذي كان حراً ، متغيراً أساسياً ؛ وسوف تزداد قيمته انطلاقاً من الصفرو تتغير قيم المتغيرات الأخرى الاساسية التي عددها $m - 1$ ، لكنها تبقى موجبة . القرار الحقيقي هو في معرفة المتغير الذي يجب استبعاده من المتغيرات الأساسية وأيها يجب ضمه إليها ؛ في حالة معرفتنا أي المتغيرات أساسية بالنسبة للقرنة الجديدة ، فاننا نحصل عليها بحل النظام $Ax = b$ مع بقاء المركبات الباقية للمتغير x مساوية الصفر .

مثال لمتغيرات داخلة ومتغيرات باقية

أوجد القيمة الصغرى للدالة التالية ضمن الشروط الآتية :

صغر $7x_3 - x_4 - 3x_5$ بشرط

$$\begin{aligned} x_1 \quad + x_3 + 6x_4 + 2x_5 &= 8 \\ x_2 + x_3 \quad\quad + 3x_5 &= 9 \end{aligned}$$

نبدأ من القرنة التي يكون فيها $x_1 = 8$ و $x_2 = 9$ (هذان هما المتغيران الاساسيان) و $x_3 = x_4 = x_5 = 0$. إن القيود محققة ولكن قد لاتكون دالة التكلفة أصغرية . في الحقيقة ، فإن دالة التكلفة هي التي تعين المتغيرات الحرة التي يجب أن تنتقل إلى الاساس . إنه من الحماقة أن نجعل x_3 موجبة إذ إن معامله يساوي $+7$ ونحن نسعى إلى

تقليل التكلفة. أحد المتغيرين x_4 أو x_5 مناسب وسوف نختار x_5 لأن معامله -3 أكثر سالبية، *المتغير الداخل* هو x_5.

بإدخال x_5 إلى الاساس، لابد من اخراج x_1 أو x_2 منه. في المعادلة الأولى، نزيد من قيمة x_5 وننقص من قيمة x_1 بحيث يحافَظ على المعادلة $x_1 + 2x_5 = 8$. وعندما تصل قيمة x_5 إلى 4 فإن x_1 يصل إلى الصفر؛ المعادلة الثانية تبقى $x_2 + 3x_5 = 9$؛ هنا يمكن لـ x_5 أن تتزايد حتى 3 وعندها تصبح $x_2 = 0$؛ لو تعدت x_5 العدد 3 لاصبحت x_2 سالبة. بذا، تكون القرنة الجديدة قد تحددت حيث $x_3 = 0, x_5 = 3$، ومن المعادلة الأولى نجد أن $x_1 = 2$. *المتغير الباقي* هو x_2 وتهبط التكلفة إلى -9.

ملاحظة: في القيود، خذ نسب الاطراف اليمنى إلى معاملات المتغير الداخل، $\frac{8}{2}, \frac{9}{3}$. تدلنا النسبة الصغرى على المتغير الذي سيبقى. تأخذ هذه القاعدة النسب الموجبة، فقط، بعين الاعتبار، إذ إنه لو كان معامل x_5 هو -3 بدلاً من +3، لأدى ازدياد قيمة x_5 *إلى زيادة* x_2 في الوقت نفسه (بجعل $x_5 = 10$ ستعطي المعادلة الثانية $x_2 = 39$) ولن يصبح عندئذ x_2 مساوياً الصفر. إذا كانت جميع معاملات x_5 سالبة، وهذه هي الحالة غير المحدودة: إن قيمة المتغير x_5 قد تصبح كبيرة بقدر ما نشاء مما يجعل دالة التكلفة تؤول إلى $-\infty$. *ولكن النسبة الثانية في هذا المثال توحي لنا أن المتغير الثاني سيبقى، وهي تعطي* $x_5 = 3$.

انتهت الخطوة الحالية عند القرنة $x_1 = 2, x_2 = x_3 = x_4 = 0, x_5 = 3$. على كل حال، فإن الخطوة التالية تكون سهلة إذا كان للمعادلات شكل مناسب ـ ببقاء المتغيرات الاساسية على نحو ما كانت عليه، x_1, x_2. لذا، نجري عملية المحورة بحل المعادلة الثانية من أجل x_5 ونعوض الناتج في دالة التكلفة وفي المعادلة الأولى $3x_5 = 9 - x_2 - x_3$ وتصبح المسألة الجديدة، انطلاقاً من القرنة الجديدة هي: إيجاد القيمة الصغرى للدالة:

$$\text{صغر}\ \ 7x_3 - x_4 - (9 - x_2 - x_3) = x_2 + 8x_3 - x_4 - 9\ \ \text{بشرط}$$
$$x_1 - \tfrac{2}{3}x_2 + \tfrac{1}{3}x_3 + 6x_4 \quad = 2$$
$$\tfrac{1}{3}x_2 + \tfrac{1}{3}x_3 \quad + x_5 = 3.$$

تعدُّ الخطوة التالية سهلة . المعامل السالب الوحيد في دالة التكلفة يعني أن x_4 يجب أن يكون المتغير الداخل . النسبتان 3/0 , 2/6 ـ وهما الطرفان الأيمنان مقسومان على معامل x_4 ـ تعنيان أن x_1 هو المتغير الخارج . القرنة الجديدة هي $x_1 = x_2 = x_3 = 0 , x_4 = 1/3 , x_5 = 3$. وقيمة التكلفة هي $\frac{1}{3}$ 9 - وهي قيمة مثلى .

في مسألة كبيرة ، يمكن لمتغير خارج أن يعود ثانية . ولكن بما أن دالة التكلفة في تناقص مستمر ـ ماعدا الحالة المتردية ـ لذا فانه لن يحدث أن تبقى المتغيرات الأساسية (التي عددها m) هي نفسها كما كانت . لن نعود ثانية إلى قرنة سابقة ، وسوف تتوقف الطريقة عند القرنة المثلى . (أو عند ∞ - ، إذا كانت دالة التكلفة غير محدودة) . ومما يلفت النظر سرعة الوصول إلى الحل الامثل .

ملخص تحدد الاعداد 3- , 1- , 7 في القرنة الأولى والاعداد 1- , 8 , 1 في القرنة الثانية المتغيرات الداخلة . (تذهب هذه الاعداد إلى المتجه r ، المتجه الحاسم المعرف أدناه . عندما تكون هذه الأعداد موجبة نتوقف) . تعين النسب المتغيرات الباقية .

ملاحظة حول الحالة المتردية تدعى قرنة من القرنات *متردية* إذا زاد عدد المركبات الصفرية المعتادة لـ x عن n. أكثر من n مستوياً يمر من القرنة فتنعدم بعض المتغيرات الاساسية . يتضح ذلك ، بعد المحوروة ، بظهور صفر في الطرف الأيمن للمعادلات . النسب التي تحدد المتغير الخارج قد تتضمن أصفاراً ، ويمكن أن يتغير الاساس دون مغادرة القرنة . نظرياً ، يمكن أن ندور إلى الأبد في اختيار الاساس .

لحسن الحظ ، هذا الدوران لن يحدث . من النادر جداً أن يجهل ذلك نظام تجاري . لسوء الحظ ، فإن التردي معتاد بكثرة في التطبيقات ـ إذا طبعَت التكلفة بعد

كل خطوة إفراد، فانك سترى أن الإفراد سيكرر مرات عديدة قبل أن يجد الضلع الجيد. ثم تتناقص التكلفة من جديد.

الجدول

تتضمن كل خطوة من خطوات الإفراد قرارات وعمليات سطرية ـ إذ يجب اختيار المتغيرات الداخلة والباقية وأن نجعلها تأتي وتذهب. إحدى الطرائق لتنظيم الخطوات هي ملاءمة المعطيات ووضعها في مصفوفة كبيرة أو **جدول**. لكي نستطيع شرح العمليات، نبدأ بإظهارها بلغة المصفوفات بهدف الوصول إلى صيغة لدالة التكلفة (وكذلك للتوصل إلى اختبار التوقف الذي يمكن أن يتحقق، فقط، عند بلوغ القرنة المثلى.) لدينا المصفوفة A والطرف الأيمن b ومتجه التكلفة c والجدول الابتدائي هو تماماً كما يلي:

$$T = \begin{bmatrix} A & b \\ c & 0 \end{bmatrix}.$$

الجدول من النوع $(m+1) \times (m+n+1)$، بعمود وسطر إضافيين. في البدء، ربما تختلط المتغيرات الاساسية مع غيرها، وتهدف الخطوة الأولى للحصول على متغير أساسي واحد في كل سطر؛ وحينئذ، يسهل اتخاذ القرارات. نعيد الترقيم إن لزم الأمر، نفترض أن $x_1,\ldots,x_m$ هي المتغيرات الأساسية بالنسبة للقرنة الحالية، وأن بقية المتغيرات x حرة (أصفار). لذا، فإن الاعمدة الـ m الأوائل من المصفوفة A تكوّن مصفوفة مربعة B (*المصفوفة الأساسية* لهذه القرنة)، بينما تكوّن الأعمدة الأخرى مصفوفة N من النوع $m \times n$. بشكل مشابه، يجزئ متجه التكلفة c كما يلي $\begin{bmatrix} c_B & c_N \end{bmatrix}$ والمجهول x إلى $\begin{bmatrix} x_B & x_N \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ وعند القرنة نفسها نجد $x_N = 0$. بازالة المتغيرات الحرة، تأخذ المعادلة $Ax = b$ الشكل $Bx_B = b$ وتعين المتغيرات الاساسية x_B. تصبح دالة التكلفة $cx = c_B x_B$. ولكي يتم التعامل مع الجدول، فإننا نتصوره موزعاً على النحو التالي:

$$T = \begin{bmatrix} B & N & b \\ c_B & c_N & 0 \end{bmatrix}.$$

ستظهر المتغيرات الاساسية وحيدة، إذا أمكن الحصول على مصفوفة الوحدة في موضع المصفوفة B. إن ذلك يعني، تماماً، خطوات الحذف العادية (عمليات سطر) لنصل إلى:

$$T' = \begin{bmatrix} I & B^{-1}N & B^{-1}b \\ c_B & c_N & 0 \end{bmatrix}.$$

المصفوفة التي تحول المصفوفة B إلى I هي B^{-1}، بالرغم من أنها لم تظهر بشكل صريح. لذا، فإن جميع عمليات طرح سطر من آخر تعادل ضرباً بالمصفوفة B^{-1}. (في الحقيقة، لقد قمنا بخطوة غاوس ـ جوردان ؛ لقد قسمت المحاور لتعطي وحداناً على القطر الرئيسي. وقد كُونت أصفار فوق القطر كما حدث ذلك تحته.) ولكي ننتهي، نطرح جداء c_B في الجزء العلوي من الجزء السفلي :

$$T'' = \begin{bmatrix} I & B^{-1}N & B^{-1}b \\ 0 & c_N - c_BB^{-1}N & -c_BB^{-1}b \end{bmatrix}.$$

يعتبر الآن الجدول جاهزاً إذا ما أحسنا تفسير خواصه. لقد كانت مسألتنا هي تصغير cx خاضعاً لـ $x \geq 0, Ax = b$. ضربنا المعادلة $Ax = b$ بالمصفوفة B^{-1} لنحصل على :

$$x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b, \qquad (١)$$

وأخذت دالة التكلفة $cx = c_Bx_B + c_Nx_N$ الشكل :

$$cx = (c_N - c_BB^{-1}N)x_N + c_BB^{-1}b. \qquad (٢)$$

النقطة الاساسية هي أن كل كمية ذات أهمية تظهر في الجدول. في أقصى الطرف الأيمن، نجد المتغيرات الأساسية $x_B = B^{-1}b$ (المتغيرات الحرة هي $x_N = 0$). أما دالة التكلفة الحالية فهي $cx = c_BB^{-1}b$ وهي موجودة في القرنة السفلى بإشارة سالبة. الأمر الأهم هو أنه يمكننا أن نقرر ما إذا كانت القرنة مثلى، وذلك بالنظر إلى التركيب $r = c_N$

$c_B\ B^{-1}N$ - الواقع في منتصف السطر السفلي . إذا كانت عناصر في r سالبة ، فإنه يبقى من الممكن تخفيض قيمة دالة التكلفة . يمكننا جعل $r\ x_N < 0$ في المعادلة (٢) . من جهة أخرى ، إذا كان $r \geq 0$ فان القرنة المثلى تكون قد وجدت . هذا هو **شرط الأمثلية** أو ***اختبار التوقف*** .

٨ ب إذا كان المتجه $r = c_N - c_B\ B^{-1}N$ غير سالب ، عندئذ ، لايمكننا تخفيض التكلفة : تكون القرنة مثلى مسبقاً ، والقيمة الصغرى لدالة التكلفة هي $c_B\ B^{-1}b$. لذا ، فإن $r \geq 0$ هو اختبار التوقف . عندما يفشل هذا الشرط فان أي مركبة سالبة للمتجه r تقابل ضلعاً يمكن تنخفض التكلفة عليه . الخطة المعتادة هي اختيار مركبة r الاكثر سلبية .

مركبات r ***هي التكاليف المخفضة*** ـ ماذا يكلف استخدام متغير حر مطروحاً منه *ماتوفر* . إذا كانت التكلفة المباشرة (في c_N) أقل من الوفر (الناتج عن عدم استخدام المتغيرات الاساسية) فيمكن الدفع من أجل تجربة هذا المتغير الحر . لنفرض أن أقل تكلفة سالبة هي r_i ، لذا يمكن لمركبة x_N ذات الرقم i أن تصبح موجبة . إنها ***المتحول الداخل*** الذي يزداد من الصفر إلى قيمة موجبة α .

ماهي α ؟ إنها تتعين بنهاية الضلع . لما كانت المركبة x_i الداخلة متزايدة فإن على بقية مركبات x أن تتناقص (وذلك لكي تبقى $Ax = b$) . تصبح المركبة الأولى x_k التي تتناقص إلى الصفر ، هي ***المتغير الباقي*** ـ يتحول من أساسي إلى حر . *نصل إلى القرنة التالية عندما تصل إحدى مركبات* x_B *إلى الصفر* .

عند تلك النقطة ، نكون قد توصلنا إلى x جديدة أساسية ملائمة . إنها ملائمة لأن $x \geq 0$ وهي أساسية إذ أن لدينا من جديد n مركبة مساوية الصفر . إن المركبة i للمتجه x_N التي تغيرت من الصفر إلى α ، سوف تحل محل المركبة k للمتجه x_B والتي تناقصت إلى الصفر . أما المركبات الأخرى للمتجه x_B فقد تغيرت لكنها بقيت موجبة . المركبة التي تناقصت إلى الصفر هي التي تعطي النسبة الاصغرية في (٣) . يمكننا أن نفرض أنها العدد k .

٨ جـ لنفرض أن u هو العمود i للمصفوفة N . حيث يكون x_i المتغير الداخل ـ قد اختير للانتقال من حر إلى أساسي . لذا، فإن مركبته في القرنة الجديدة هي النهاية الصغرى للنسبة :

$$\alpha = \min \frac{(B^{-1}b)_j}{(B^{-1}u)_j} = \frac{(B^{-1}b)_k}{(B^{-1}u)_k} . \qquad (٣)$$

أخذت هذه القيمة الصغرى فقط على المركبات الموجبة للمتجه $B^{-1}u$. إذا لم تكن هناك مركبات موجبة ، فان القرنة التالية سوف تكون بعيدة جداً ويمكن جعل التكلفة صغيرة إلى أبعد حد، القيمة الصغرى للتكلفة هي $-\infty$. وإلا فان العمود القديم k للمصفوفة B سوف يترك الاساس و يدخل العمود الجديد u .

إن العمودين $B^{-1}b , B^{-1}u$ موجودان في الجدول الأخير ($B^{-1}u$ هو عمود في $B^{-1}N$ وهو موجود فوق العنصر الاكثر سالبية في السطر الاسفل r) . تتلخص خطوات الإفراد بعد مثال وتبدأ عندها الطريقة من جديد من القرنة الجديدة.

مثال بدالة التكلفة $x+y$ والشرطين $x + 2y - w = 6$ ، $2x + y - v = 6$ ، اللذين وجدناهما من قريب، نجد الجدول الأول :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

إذا انطلقنا من القرنة نفسها P في الشكل (٨ - ٤) حيث يتقاطع $x = 0$ مع $2x + y = 6$ (يعني أن $v = 0$)، فإن المتغيرين الاساسيين هما y و w . ولكي ننظم الأمور، نجري عملية مبادلة بين العمودين الأول والثالث وذلك لكي نضع المتغيرات الأساسية قبل المتغيرات الحرة :

$$T' = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

إن عملية الحذف تضرب السطر الأول بـ 1 - كي نحصل على محور قيمته واحد، ثم، نستخدم السطر الثاني كي نحصل على أصفار في العمود الثاني :

$$T'' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -6 \end{bmatrix}.$$

ننظر أولاً إلى $r = [\,-1 \;\; 1\,]$ في السطر الأسفل. إنه يحوي عنصراً سالباً. وعلى هذا فان القرنة الحالية $w = y = 6$ وكذلك التكلفة الحالية +٦ ليست مثلي. العنصر السالب موجود في العمود الثالث، لذا، فإن المتغير الثالث سوف يدخل الاساس. العمود الواقع فوق العنصر السالب هو $B^{-1}u = [\,3 \;\; 2\,]^{T}$ ؛ إن نسب العمود الأخير إلى هذا العمود هي $\frac{6}{3}$ ، $\frac{6}{2}$ وبما أن النسبة الأولى هي الأصغر، لذا، فإن المجهول الأول w (والعمود الأول من الجدول) سوف يخرج من الأساس.

الجدول الجديد يبادل بين العمودين الأول والثالث، وباجراء المحورة بوساطة تطبيق عملية الحذف، نجد :

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & -2 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 6 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -4 \end{bmatrix}.$$

أصبح الآن $r = \left[\,\frac{1}{3} \;\; \frac{1}{3}\,\right]$ موجباً و تحقق اختبار التوقف. القرنة $x = y = 2$ والتكلفة عندها، التي تساوي +4 هما مثليان.

تنظيم خطوة الإفراد

لقد انهينا الانتقال من الهندسة التابعة لطريقة الإفراد إلى الجبر ـ من لغة «القرنات» إلى «الحلول الاساسية الملائمة». ونحن نعلم الآن أن معرفة المتجه r والنسبة α أمر حاسم، ونود أن نعيد النظر في طريقة حسابهما. هذا هو قلب طريقة الإفراد التي يمكن تنظيمها بثلاثة طرق مختلفة:

(١) بجدول

(٢) بحساب B^{-1} ثم تعديلها عندما نستبدل بالعمود K من B العمود i من N.

(٣) بحساب $B = L\,U$ ثم تعديل هذين العاملين بدلاً من تعديل B^{-1}.

هذه القائمة هي في الحقيقة التاريخ المختصر لطريقة الإفراد. من بعض النواحي، كانت المرحلة الباهرة هي الأولى ـ *الجدول* ـ الذي كان مهيمناً لسنوات عديدة. لقد جلب لأغلبنا هالة من غموض البرمجة الخطية، خصوصاً لأنها تجنبت رموز المصفوفات بشكل كامل تقريباً (بالطريقة الماهرة في كتابة المصفوفات كاملة!) إلا أنه، بالنسبة للحسابات فان أيام الجدول ـ ماعدا بعض المسائل الصغيرة في الكتب الدراسية ـ قد انتهت.

لمعرفة السبب، تذكر أنه بعد حساب r وبعد أن حددت مركبته الاكثر سالبية وهو العمود الذي سيدخل الاساس، فإنه لن يستخدم أي عمود غير r. لقد كان حسابها مضيعة للوقت. في المسائل الكبيرة، هناك مئات من النقاط التي يجب حسابها مرة بعدمرة، منتظرة دورها لدخول الاساس. إن اجراء عمليات الحذف بشكل كامل يجعل النظرية واضحة إلا أن ذلك لايمكن تبريره عملياً.

نحن مستعدون لترك الجدول جانباً. سيكون النظر في طريقة الإفراد والحسابات التي تحتاجها، فعلاً، هو الأسرع وفي النهاية هو الابسط. كل خطوة تبادل بين عمود من N وعمود من B، وعلينا أن نقرر (من خلال r و α) أي أعمدة نختار. إن هذه

الخطوة تتطلب دورة العمليات التالية، مبتدئين بالمصفوفة الاساسية الحالية B وبالحل الحالي $x_B = B^{-1}b$.

جدول ٨ – ١ إحدى مراحل طريقة الإفراد

(١) احسب متجه السطر $\lambda = c_B B^{-1}$ والتكلفة المختزلة $r = c_N - \lambda N$.

(٢) إذا كان $r \geq 0$ فاننا نتوقف : الحل الحالي أمثل، وإلا، فإذا كانت r_i هي أكثر المركبات سالبية، فاننا نختار العمود i من N ليدخل الاساس ونرمز له بـ u .

(٣) نحسب المتجه $v = b^{-1}u$.

(٤) نحسب نسب $B^{-1}b$ إلى $B^{-1}u$ ، نقبل، فقط، المركبات الموجبة للمتجه $B^{-1}u$. إذا لم يكن هناك أية مركبة موجبة فالتكلفة الصغرى هي $-\infty$. أما إذا تكونت النسبة الصغرى عند المركبة k فان العمود k للمصفوفة الحالية B سوف يغادر .

(٥) نعدل المصفوفة B (أو B^{-1}) وكذلك الحل $x_B = B^{-1}b$ ثم نعود للخطوة (١) .

هذه الخطوات تدعى، أحيانـاً، ***بطريقة الإفراد المعدلة*** لتمييزها عن العمليات الموجودة في الجدول . إنها، في الحقيقة، مطابقة لطريقة الإفراد ذاتها إلا أنها ملخصة .

ننهي هذه المناقشة عندما نقرر كيف نحسب الخطوات (١) و (٣) و (٥) :

$$\lambda = c_B B^{-1}, \quad v = B^{-1}u, \quad \text{و} \quad x_B = B^{-1}b. \qquad (٤)$$

الأسلوب الأكثر تداولاً هو العمل مباشرة بالمصفوفة B^{-1}، حسابها بالتفصيل في القرنة الأولى . وبعدئذ، تكون عملية المحورة عند القرنات المتتالية بسيطة . عندما نعوض العمود k من مصفوفة الوحدة بالعمود u، فإن العمود k من B^{-1} يعوض بـ $v = B^{-1}u$. لكي نستعيد مصفوفة الوحدة، يضرب الحذف المصفوفة القديمة B^{-1} بما يلي :

$$E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & v_1 & & \\ & \cdot & \cdot & \\ & v_k & & \\ & \cdot & \cdot & \\ & v_n & & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -v_1/v_k & & \\ & \cdot & \cdot & \\ & 1/v_k & & \\ & \cdot & \cdot & \\ & -v_n/v_k & & 1 \end{bmatrix} \quad (٥)$$

يستخدم كثير من أنظمة الإفراد «***الشكل الضربي للمعكوس***» الذي يحافظ على المصفوفة السهلة E^{-1} عوضاً عن تعديل B^{-1} مباشرة. عند الضرورة، يطبق ذلك على b و c_B.في فترة نظامية (ربما ٤٠ خطوة بسيطة)، يعاد حساب B^{-1} وتمحى E^{-1}. سيجري تحقيق المعادلة (٥) في التمرين (٨-٢-٩).

هناك أسلوب جديد يستدعي استخدام الطرائق المعتادة في الجبر الخطي العددي معتبرين (٤) ثلاث معادلات تشترك بمصفوفة المعاملات B :

$$\lambda B = c_B \,, \quad Bv = u \,, \quad Bx_B = b. \quad (٦)$$

لذا فان التحليل القياسي $B = LU$ (أو $PB = LU$ مع السماح بتغييرات سطرية بهدف الاستقرار)، سوف يؤدي ذلك إلى الحلول الثلاثة. يمكن تعديل L و U عوضاً عن حسابها من جديد.

هناك أمر آخر : كم عدد خطوات الإفراد التي يجب أن نجريها؟ هذا سؤال تستحيل الإجابة عنه منذ البداية. تبين الخبرة أن الطريقة تمس حوالي m أو $3m/2$ قرنة مختلفة فقط، يعني ذلك أن العملية تحتاج إلى حوالي $m^2 n$ خطوة وهو ما يمكن مقارنته بطريقة الحذف المعتادة لحل النظام $Ax = b$، وهذا هو السبب في نجاح طريقة الإفراد. لكن الرياضيات تبين أن طول الطريق لا يحد أبداً بأي مضاعف ثابت للعدد m أو أي قوة له. يمكن لمجموعة ملائمة سيئة أن تفرض على طريقة الإفراد بتجربة كل قرنة. حتى الوقت الحالي، لم يكن معروفاً ما إذا كانت برمجة خطية واقعة في الصنف الجيد P -قابلة للحل بكثيرة حدود زمنية - أو في الصنف الرهيب NP

مثل مسألة البائع المتجول. إن مسائل *NP* موثوقة ولكن لم يبرهن أن كل الطرائق الحتمية تحتاج إلى زمن دالة أسية لتنتهي (وكذلك في الحالة الاكثر سوءاً).

لقد برهنت **طريقة** ***Khachian*** أنه يمكن حل برنامج خطي بزمن كثيرة حدود. إنها تبقى داخل المجموعة الملائمة وتفوز بالحل من خلال سلسلة مجسمات قطوع ناقصة منكمشة. لذا، فإن ***طريقة كارماركار*** الموصوفة أدناه لم تكن في وضع منافسة مع الجانب النظري فقط، بل مع العملي أيضاً. مع ذلك بقيت طريقة الإفراد، في كل هذا الزمن، تقوم بهذا العمل ـ بمعدل زمني، برهن حالياً، (من طريقة مختلفة عن الطريقة المستعملة) بأنه زمن كثيرة حدود. من أجل سبب ما مختف وراء هندسة كثيرات الوجوه ذوات الابعاد الكثيرة، كانت المجموعة الملائمة السيئة نادرةً وتبقى طريقة الإفراد محظوظة.

طريقة كارماركار *Karmarkar*

نصل الآن إلى الحادثة الاكثر إثارة في تاريخ البرمجة الخطية الحديث. عرض كارماركار طريقة قائمة على فكرتين بسيطتين تغلبت في تجاربها على طريقة الإفراد. في تجارب أخرى ومسائل أخرى، لم يحصل ذلك. إن اختبار المسألة وتفصيلات النظام أمران حاسمان، وسيبقى الجدال قائماً. لكن الافكار الاساسية طبيعية، فعلاً، وملائمة بصورة تامة لبنية الجبر الخطي التطبيقي، بحيث يمكن شرحها بفقرات قليلة. يمكنني الانطلاق بعملية ثم، إضافة الوسيلة التي أجازت لكارماركار أن يبرهن التقارب في زمن كثيرة حدود[(١)]

---

(١) عدد العمليات محدود بقوى لـ m و n كما هو الحال في الحذف وفي طريقة غرام ـ شميدت. من أجل برنامج كامل وتحليل إلى عوامل أولية، يعلم الكل أن العملية تأخذ طول دالة أسية في الحالات السيئة ـ المسألة الشهيرة «$P \neq NP$ -» تثبت أنه في مثل هذه المسائل لايمكن أن توجد طريقة كثيرة حدود.

الفكرة الأولى هي الانطلاق من نقطة واقعة **داخل المجموعة الملائمة** - لنفرض أنها $x^0 = (1,1,...,1)$ ـ والتحرك *في الإتجاه الذي تنخفض فيه التكلفة*. بما أن التكلفة هي cx، فان الاتجاه المفضل هو نحو c - . يقودنا ذلك، عادة، إلى خارج المجموعة الملائمة؛ إذ أن السير في هذا الاتجاه لايحافظ على $Ax = b$. إذا كان $Ax^0 = b$ و $Ax^1 = b$، فإن على $\Delta x = x^1 - x^0$ أن يحقق $A\,\Delta x = 0$. ***على الخطوة Δx أن تبقى في الفضاء الصفري لـ A*** . لذلك نسقط c - على الفضاء الصفري لنحصل على الاتجاه الملائم الاكثر قرباً من الاتجاه المفضل. إن ذلك أمر طبيعي ولكنها خطوة كثيرة التكلفة في طريقة كارماركار .

لقد كان الإسقاط على الفضاء الصفري موضوع التمرين (٣-٣-٢٠). المصفوفة المسقطة :

$$P = I - A^T(AA^T)^{-1}A \qquad (٧)$$

هي التي تضع كل متجه في الفضاء الصفري ، لأن $AP = A - (AA^T)(AA^T)^{-1}A = 0$ إذا كان x مسبقاً في الفضاء الصفري فان $Px = x$ ، لأن $Ax = 0$. لعلك تدرك أن $(AA^T)^{-1}$ لم يؤخذ بصورة حرفية؛ المعكوس لم يحسب. عوضاً عن ذلك، نحل معادلة خطية ونطرح مركبة فضاء الاسطر من c (الذي هو الآن متجه عمود) :

$$AA^Ty = Ac \quad \text{ثم} \quad Pc = c - A^Ty \qquad (٨)$$

الخطوة Δx هي مضاعف للمسقط Pc - الخطوة الكبرى والتكلفة الزائدة قد خفضتا - لكن لايمكننا أن نخرج من المجموعة المواتية. لقد اختير مضاعف لـ PC - بحيث يبقى x^1 في الداخل، ولكنه قريب من الحدود حيث مركبة x تصل إلى الصفر.

مثال . التكلفة $c^Tx = 8x_1 + 2x_2 + 7x_3$؛ القيود $Ax = 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 = b$.

في هذه الحالة، المجموعة الملائمة هي المثلث PQR شكل (٨-٥). إنه شكل مستوٍ في الفضاء الثلاثي الابعاد مقطوع بالقيود $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$. على الحل

الامثل أن يقع في واحدة من القرنات التالية :

$c^T x = 20$ التكلفة ، $P: \; x = (\frac{5}{2},\, 0,0)$

$c^T x = 5$ التكلفة ، $Q: \; x = (0, \frac{5}{2},\, 0)$

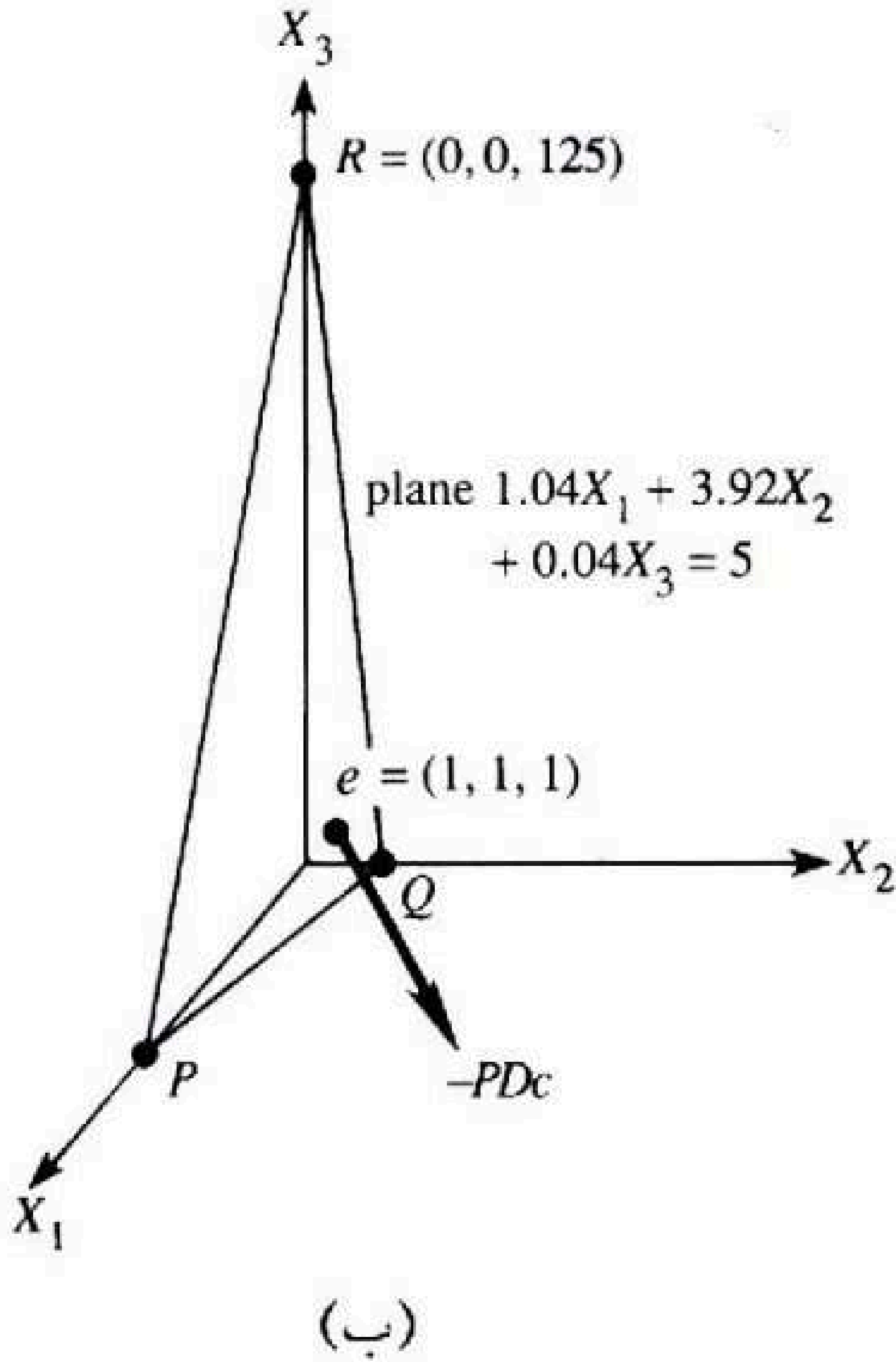
$c^T x = 35$ التكلفة ، $R: \; x = (0,\, 0,\, 5)$

لذا، فإن $x = (0, \frac{5}{2}, 0)$ هي المثلى ونأمل أن تتحرك الخطوة Δx بقرب Q.

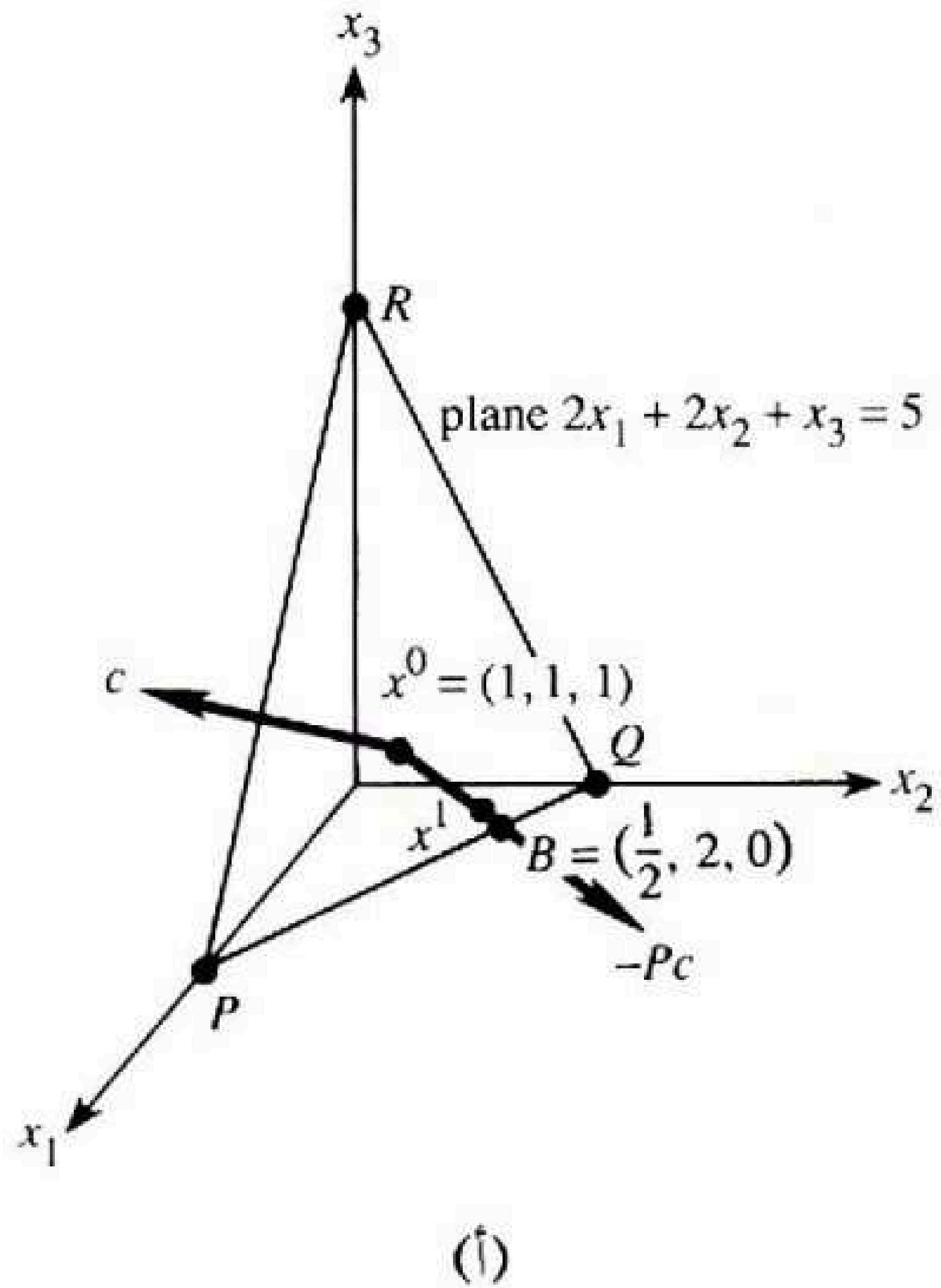
يسقط الحساب $c = (8,2,7)$ على المستوي $2x_1 + 2x_2 + x_3 = 5$:

$A = [2 \;\; 2 \;\; 1]$. لذا $AA^T y = Ac$ تصبح $9y = 27$

$$Pc = c - A^T y = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}.$$



(ب)



(أ)

شكل (٨-٥). خطوة من عملية تغيير سلم القياس: من x^0 إلى x^1 بالإسقاط و من x^1 إلى e بسلم القياس.

يجب أن يقع هذا المتجه في الفضاء الصفري لـ $A = [\ 2\ \ 2\ \ 1\ ]$ ، وهو كذلك. إنه يحدد اتجاه الخطوة Δx . بالتحرك من نقطة الانطلاق $x^0 = (1,1,1)$ في هذا الاتجاه، فنجد :

$$x^0 - sPc = \begin{bmatrix} 1 - 2s \\ 1 + 4s \\ 1 - 4s \end{bmatrix}.$$

بخطوة طولها $s = 1/4$ ، تصبح المركبة الثالثة صفراً. يبلغ هذا الاختيار النقطة الحدية B في الشكل، بالمركبات $(1/2 , 2, 0)$. إنها قريبة من النقطة المثالية Q ، ولكن، بقطعها كل الطريق نحو الحدود، تترك فراغاً قليلاً للخطوة التالية. كان من الممكن أن يحدث (رغم أنه لم يحدث هنا) أن تكون المركبة الصفرية لـ B ليست صفراً في القرنة المثالية. عندئذ، نتوقف قريباً من B ونختصر s من $.25$ إلى $.24$. العامل المضروب $\alpha = \frac{.24}{.25}$ $= .96$ نموذجي، ولقد نشرت القيمة المخفضة $.25$ في الاصل من قبل كارماركار، فقد اختارها ليبرهن تقارباً في زمن كثيرة حدود ـ ليس من أجل مساعدة القارىء في اتمام التقارب في زمن حقيقي ـ عندما يكون $.24 = (.96)\ \frac{1}{4} = s$ فإن الخطوة تنتهي عند :

$$B = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 2.0 \\ 0.0 \end{bmatrix} \quad \text{عوضاً عن} \quad x^1 = \begin{bmatrix} 0.52 \\ 1.96 \\ 0.04 \end{bmatrix}.$$

يتم ذلك الفكرة الأولى ـ الاسقاط الذي يعطي الهبوط الملائم. تحتاج الخطوة الثانية إلى فكرة جديدة لأن المتابعة في الاتجاه ذاته غير مفيدة.

اقتراح كارماركار هو ***تحويل*** x^1 ***إلى الوضع المركزي*** $e = (1,1,1)$. تبديل المتغير هذا يغير المسألة، ولذا، فإن الخطوة الثانية تسقط c الجديد على الفضاء الصفري لـ A الجديدة. تبديل المتغير هذا (سيقدم فيما بعد) غير خطي لكنه أبسط تحويل. هو، فعلاً، تغيير في سلم قياس المحاور.

لنقل $x^1 = (0.52 ,1.96,0, .04)$ إلى النقطة المركزية e ، نقسم مركبات كل متجه

على هذه الاعداد الثلاثة . بقول آخر ، نضع هذه الاعداد في مصفوفة قطرية D ***ونبدل سلم قياس كل متجه بواسطة*** D^{-1} :

$$D^{-1}x^{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = e \quad \text{و} \quad D = \begin{bmatrix} 0.52 & & \\ & 1.96 & \\ & & 0.04 \end{bmatrix}.$$

نحن من جديد في المركز بفراغ كاف للحركة رغم أن المجموعة الملائمة قد تغيرت (المثلث PQR) شكل (٨ ــ ٥ب) وكذلك متجه التكلفة c ، فإن لتغيير سلم القياس من x إلى $X = D^{-1}x$ تأثيرين :

القيد $Ax = b$ يصبح $ADX = b$ ؛

التكلفة $c^{\mathrm{T}}x$ تصبح $c^{\mathrm{T}}DX$.

عندئذ، تأخذ المصفوفة AD مكان A ويأخذ المتجه $c^{\mathrm{T}}D$ مكان c^{T} . في مثالنا يحصل مايلي :

$$AD = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \mathrm{D} = \begin{bmatrix} 1.04 & 3.92 & 0.04 \end{bmatrix}$$

$$c^{\mathrm{T}}D = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 7 \end{bmatrix} D = \begin{bmatrix} 4.16 & 3.92 & 0.28 \end{bmatrix}.$$

المسألة الجديدة هي جعل $c^{T}DX$ في نهايتها الصغرى خاضعة للقيود $ADX = b$ و $X \geq 0$ (الذي يكافىء $x \geq 0$). في الامثلة الكبيرة، سيكون للمصفوفة A، m سطراً عوضاً عن سطر واحد. تسقط الخطوة الثانية متجه التكلفة الجديد على الفضاء الصفري لـ AD. تتحول المعادلة (٨) إلى :

$$AD^{2}A^{\mathrm{T}}y = AD^{2}c \quad \text{ثم} \quad PDc = Dc - DA^{\mathrm{T}}y \qquad (٩)$$

إنك تملك الآن الطريقة كاملة عدا ما يتعلق بالانطلاق والتوقف. يمكن الانطلاق من أي نقطة x^{0} داخل المجموعة الملائمة. في كل خطوة، يغير سلم التخمين الحالي x^{k} ليأخذ موقع النقطة $e = (1,1,...,1)$ ، ثم، يعطي الاسقاط (٩) اتجاه الخطوة في المتغير الجديد. ناتج هذه الخطوة هو x^{k+1} :

عملية تغيير سلم القياس

(١) تكوين مصفوفة قطرية D من مركبات x^k ليكون :

$$D^{-1}x^k = (1, 1, \dots, 1) = e.$$

(٢) بـ D هذه، يحسب المسقط PDc في المعادلة (٩).

(٣) يعين العدد s بحيث يكون لـ $e - sPDc$ مركبة صفرية.

(٤) اختزال s بعامل α (مثل $\alpha = .96$).

(٥) المتجه الجديد هو $x^{k+1} = x^k - sDPDc$.

تنتقل الخطوة Δx في المتغير الذي بُدل سلم قياسه من e إلى $e - sPDc$. في المتغيرات الاصلية، تتحول من x^k إلى $x^k - sDPc$. لنقم بهذه الحسابات في المثال منطلقين من x^1 إلى x^2 :

$AD^2A^Ty = AD^2c$ تصبح $16.45y = 19.7$ أو $y = 1.2$

$$PDc = \begin{bmatrix} 4.16 \\ 3.92 \\ 0.28 \end{bmatrix} - 1.2 \begin{bmatrix} 1.04 \\ 3.92 \\ 0.04 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.91 \\ -0.78 \\ 0.23 \end{bmatrix}.$$

سيجعل طول الخطوة $s = 1/2.91$ المركبة الأولى صفراً عندما نطرح $sPDc$ من $e = (1,1,1)$. الخطوة $s = .96/2.91 = .33$ أكثر محافظة. لذا، فإن X^2 الجديد و $x^2 = DX^2$ الجديد يصبحان :

$$x^2 = \begin{bmatrix} 0.02 \\ 2.46 \\ 0.04 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad X^2 = e - (.33)PDc = \begin{bmatrix} 0.040 \\ 1.257 \\ 0.924 \end{bmatrix}.$$

نتحقق من أن x^2 واقع في المجموعة الملائمة : $2x_1 + 2x_2 + x_3 = .04 + 4.92 + .04 = 5$. إنه قريب جداً من القرنة Q التي مركباتها $(0, 2.5, 0)$. إننا، فعلاً، على

قرب كاف من الخطوة الأخيرة من طريقة كارماركار . *لمعرفة أية قرنة هي الفضلى للقفز إليها* . كلنا يعلم أن النقطة المثلى هي واحدة من الرؤوس P, Q, R . وبخطوتين من هذه الطريقة ، تمكنا من تعيين القرنة الصحيحة Q .

كان كل العمل في الخطوة 2 من الطريقة التي هي اسقاط محمّل . بلغة البند (٣-٦)، فإن المصفوفة المحملة هي $W = D$ والجداء $W^T W$ هو D^2. تعطي *المعادلة النظامية المحمّلة* y، وسيكون حلها مسألة اساسية من الجبر الخطي العددي :

$$(AD^2A^T)y = AD^2c. \qquad (١٠)$$

الطريقة النظامية لحساب y هي الحذف . ينجح ذلك في مسألة صغيرة، وكذلك في مسألة كبيرة إذا بقيت جميع المصفوفات متناثرة . تقوم طريقة غرام-شميدت البديلة على تقويم أعمدة DA^T ، وهي غالية رغم أنها تجعل بقية الحسابات سهلة . الطريقة المفضلة من أجل المسائل الضخمة هي *طريقة التدرج المشتق* . وهي شبه مباشرة تعطي الجواب الصحيح بشكل أكثر بطءاً من الحذف، لكنك ستسير جزءاً من الطريق ثم تتوقف . (لايمكنك الوقوف في منتصف طريق الحذف) . إن فكرة التدرج المشتق «بالشروط المسبقة» التي تعطي ذلك بالتدرج موصوفة في كتابي *Introduction To Applied Mathematics* (*Wellesley - Cambridge Press*) .

تسعى طريقة كارماركار الاصلية وراء تغيير سلم القياس $D^{-1}x$ الذي يبقي التكلفة خطية . بدلاً من ذلك، يوجد «تحويل إسقاط» إلى $D^{-1}x / e^T D^{-1}x$. يحتاج ذلك إلى برهان كون التقارب وفق كثيرة حدود زمنية، إلا أنه *عملياً*، يستخدم تغيير *سلم القياس* . حقاً، لقد حُققت الطريقة و عُدلت لتشمل كل شيء ومددت لحالة المثالية غير الخطية . أعتقد أن طريقة كارماركار ستبقى حية؛ إنها طبيعية وجذابة . شأنها شأن كل فكرة جديدة في الحساب العلمي، قد تنجح في بعض المسائل وقد تفشل في مسائل أخرى . تبقى طريقة الإفراد ذات قيمة هائلة وكذلك جميع مواضيع البرمجة الخطية التي اكتشفت بعد قرون من المعادلات الخطية $Ax = b$، لكنها

شاركت في الافكار الاساسية للجبر الخطي. إن أهم تأثيرات هذه الأفكار هي نظرية الثنوية التي تأتي بعد هذا البند.

تمارين

٨-٢-١ إجعل $x_1 + x_2 - x_3$ في نهايتها الصغرى ضمن القيود :

$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 \quad &= 4 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 \quad + x_5 &= 2. \end{aligned}$$

أي واحد من المتغيرات x_1, x_2, x_3 ينبغي أن يدخل الاساس وأي المتغيرين x_4, x_5 ينبغي أن يخرج منها؟ احسب المتغيرين الاساسيين الجديدين وكذلك قيمة التكلفة عند القرنة الجديدة.

٨-٢-٢ بعد خطوة الإفراد السابقة، هيء الخطوة التالية وفسرها.

٨-٢-٣ افرض، في المثال الوارد بعد (٨ جـ)، أن التكلفة أصبحت $3x+y$، بحيث يصبح متجه التكلفة بعد اعادة ترتيبه، $c = (0,1,3,0)$. برهن أن $r \geq 0$. لذا، فإن القرنة P مثلى.

٨-٢-٤ إذا كانت دالة التكلفة الأصلية هي $x-y$، بحيث تصبح c بعد اعادة الترتيب $c = (0,-1,1,0)$ عند النقطة P، احسب r وقرر أي عمود u سيدخل الاساس. احسب بعدئذ $B^{-1}u$ واستنتج من إشارته أنك لن تقابل قرنة أخرى. إننا نصعد على محور y في الشكل (٨-٤) و $x-y$ تسعى إلى $-\infty$.

٨-٢-٥ في المثال نفسه، استبدل بدالة التكلفة الدالة $x+3y$. تحقق من أن طريقة الإفراد تأخذك من P إلى Q إلى R وأن القرنة R مثلى.

٨-٢-٦ تتكون المرحلة الأولى من إيجاد حل أساسي ملائم لنظام $Ax=b$. بعد تغيير الإشارات لتصبح $b\geq 0$، انظر في المسألة التي تقتضي إيجاد النهاية الصغرى للدالة $w_1+w_2+...+w_m$ ضمن الشروط $Ax+w=b$ ، $x\geq 0$ ، $w\geq 0$. إذا كان للنظام $Ax=b$ حل غير سالب ، فان القيمة الصغرى للتكلفة في هذه المسألة سوف تكون صفراً ويكون $w^*=0$

أ) بين أنه، بالنسبة للمسألة الجديدة هذه، تكون القرنة $x=0$ ، $w=b$ أساسية وملائمة معاً. لذا، فإن مرحلتها الأولى قد تمت فعلاً ويمكن لطريقة الإفراد أن تعمل لإيجاد الزوج الأمثل x^* ، w^* . إذا كان $w^*=0$ فسوف تكون x^* هي القرنة المطلوبة في المسألة الأصلية.

ب) إذا كانت $A=[\,1\ \ -1\,]$ و $b=[\,3\,]$ فاكتب المسألة المساعدة ومتجه مرحلتها الأولى $x=0$ و $w=b$ وكذلك متجهها الأمثل. أوجد قرنة المنطقة الملائمة $x_1-x_2=3$ ، $x_1\geq x_2\geq 0$ وارسم شكل هذه المنطقة.

٨-٢-٧ إذا أردنا أن نجد القيمة العظمى بدلاً من القيمة الصغرى لدالة التكلفة (مع الاحتفاظ بـ $Ax=b$ ، $x\geq 0$)، فماذا يكون اختبار التوقف على r وماهي قواعد اختيار عمود من N ليدخل الأساس وعمود من B ليصبح حراً؟

٨-٢-٨ أوجد القيمة الصغرى للدالة $2x_1+x_2$ ضمن الشروط :

$$x_1+x_2\geq 4,\ x_1+3x_2\geq 12,\ x_1-x_2\geq 0, x\geq 0.$$

٨-٢-٩ حقق العكس في (٥) وبرهن أن BE تحوي $Bv=u$ في عمودها k . لذا، فإن BE هي المصفوفة الاساسية الحقيقية للتوقف التالي، $E^{-1}B^{-1}$ هي معكوسها و E^{-1} تغير المصفوفة الأساسية بصورة صحيحة.

٨-٢-١٠ نفرض أننا نريد جعل x_1-x_2 في نهايتها الصغرى ضمن القيود:

$$2x_1 - 4x_2 + x_3 \qquad = 6$$
(لكل $x_i \geq 0$)
$$3x_1 + 6x_2 \qquad + x_4 = 12$$

انطلاقاً من $x = (0,0,6,12)$، هل يمكن لـ x_1 أو x_2 أن يزيد من قيمته الحالية الصفرية؟ إلى أي مدى يمكنه أن يزداد قبل أن تدفع المعادلات x_3 و x_4 نحو الصفر؟ ماهي قيمة x في هذه النقطة ؟

٨-٢-١١ من أجل المصفوفة $P = I - A^T (A A^T)^{-1} A$ ، برهن أنه إذا كان x في الفضاء الصفري لـ A فان $Px = x$. يبقى الفضاء الصفري كما هو تحت تأثير الاسقاط.

٨-٢-١٢ تغير التكلفة في الخطوة الأولى من كارماركار هو $c^T \Delta x = - s c^T P c$. برهن أنها تساوي $- s \|Pc\|^2$، لذا، فإن التغير سالب والتكلفة متناقصة.

٨-٢-١٣ (أ) اجعل التكلفة $c^T x = 5x_1 + 4x_2 + 8x_3$ في نهايتها الصغرى على المستوي $x_1 + x_2 + x_3 = 3$ ، وذلك باختبار الرؤوس P, Q, R حيث لايتقاطع المثلث مع المطلوب $x \geq 0$.

(ب) اسقط $c = (5,4,8)$ على الفضاء الصفرى لـ $A = [\,1 \;\; 1 \;\; 1\,]$ وأوجد خطوة النهاية العظمى s التي تبقي $e - s P c$ غير سالبة.

٨-٢-١٤ اختصر s في التمرين السابق بـ $\alpha = .98$ لانهاء الخطوة قبل الحدود واكتب المصفوفة القطرية D . ارسم المثلث الملائم الواقع في المستوي $A\, DX = 3$، بعد الخطوة الأولى من طريقة كارماركار.

٨-٢-١٥ في التمرين السابق، أنجز خطوة ثانية في طريقة كارماركار وقارن x^2 بالمتجه في القرنة المثلى للمثلث $P\,Q\,R$.

٨ – ٣ نظرية الثنوية

ابتدأ الفصل الثاني بالقول: إنه بالرغم من أن طريقة الحذف تعطي أسلوباً لحل النظام $Ax = b$، إلا أنه من الممكن تصورفهم مختلف وأكثر عمقاً لذلك. إن هذا الامر ينطبق كذلك على البرمجة الخطية. تحل آلية الإفراد البرنامج الخطي ولكن، في الحقيقة، يقع مبدأ الثنوية في مركز أسس هذه النظرية. إنها فكرة بارعة وهي في الوقت نفسه أساسية بالنسبة للتطبيقات؛ سوف نشرح ذلك بقدر مانفهم.

إنها تبدأ بالمسألة القياسية:

المسألة الأصلية *أوجد النهاية الصغرى للدالة* cx ضمن الشروط $Ax \geq b$ ، $x \geq 0$.

لكن، الآن، بدلاً من أن نكوّن مسألة مكافئة تحتوي على معادلات عوضاً عن متراجحات، فإن الثنوية تحدث مسألة مختلفة تماماً. *تنطلق المسألة الثنوية من المعطيات A,b,c نفسها ويقلب كل شيء*. في المسألة الاصلية، كانت c في دالة التكلفة و b ضمن الشروط بينما يتغير دورها في المسألة المرافقة. بالاضافة إلى ذلك، فإن إشارة المتراجحة تتغير ويصبح المتغير الجديد y متجه سطر؛ وتكون المجموعة الملائمة ممثلة بـ $yA \leq c$ بدلاً من $Ax \geq b$. ختاماً، فإننا هنا نجد القيمة العظمى بدلاً من القيمة الصغرى. أما الشيء الوحيد الذي يبقى كما كان فهو شرط عدم السلبية؛ المتغير y له m مركبة، ويجب أن يحقق الشرط $y \geq 0$. باختصار، إن (ثنوية) مسألة القيمة الصغرى هي مسألة قيمة عظمى:

المسألة المرافقة *أوجد النهاية العظمى للدالة* yb *ضمن الشروط* $yA \leq c$ ، $y \geq 0$

المسألة المرافقة لهذه المسألة هي مسألة القيمة الصغرى الاصلية[١].

---

(١) هناك تناظر تام بين المسألتين. بدأنا بإيجاد القيمة الصغرى، ولكن طريقة الإفراد تطبق بشكل مشابه على القيمة العظمى. بأي طريق تحل المسألتان في وقت معاً.

من الوضح أنه يجب أن أشرح لك بعض الشيء حول هذه الامور المعكوسة. إنها تخفي نوعاً من المنافسة بين القيم الصغرى والقيم العظمى. وأوضح شرح لذلك يأتي من خلال العودة إلى مسألة الحمية التي آمل أن تتبعها مرة أخرى. تحوي مسألة القيمة الصغرى n مجهولاً تمثل n طعاماً مختلفاً تقدم بكميات (غير سالبة) x_1 ,....x_n . أما القيود التي عددها m فانها تمثل m فيتاميناً مطلوباً، بدلاً من الشرط الوحيد الذي سبق ذكره حول كمية البروتين اللازمة. العدد a_{ij} يمثل كمية الفيتامين i في الطعام j، ويتطلب السطر i في النظام $Ax \geq b$ أن تحتوي الوجبة على ذلك الفيتامين بكمية لاتقل عن b_i. وختاماً، إذا كانت c_j هي تكلفة الطعام j، عندئذ، تمثل الدالة $c_1x_1+...+c_nx_n = cx$ تكلفة الوجبة. والمطلوب هو جعل هذه التكلفة أقل ما يمكن. هذه هي المسألة الاصلية.

في المسألة المرافقة، يبيع الصيدلي فيتامينات بدلاً من الطعام. تعتبر أسعاره y_i قابلة للتعديل مادامت غير سالبة. الشرط الرئيسي، على كل حال، هو أنه لايمكن أن يتقاضى أكثر من البقال عن كل طعام. لما كان الطعام j يحوي فيتامينات بكميات مقدارها a_{ij}، فان السعر الذي يتقاضاه الصيدلي بالكمية المقابلة للفيتامينات لايمكنه أن يزيد على سعر البقال c_j. هذا هو القيد $yA \leq c$. ضمن هذا القيد، بإمكانه أن يبيع كمية مقدارها b_i من كل فيتامين بمبلغ اجمالي $y_1b_1+...+y_mb_m = yb$ وهو يسعى لجعله أعظم ما يمكن.

يجب أن نتبين أن المجموعتين الملائمتين بالنسبة للمسألتين مختلفتان فيما بينهما تماماً. فبينما الأولى مجموعة جزئية من R^n معينة بالمصفوفة A وبمتجه الشروط b، نجد أن الثانية مجموعة جزئية من R^m، تتعين بوساطة منقول A والمتجه c. بالرغم من ذلك، فانه حينما نأخذ دالتي التكلفة في الحسبان، فإن المسألتين تضمان المعطيات نفسها A,b,c . إن نظرية البرمجة الخطية بأكملها، مرتبطة بالعلاقة بين هاتين المسألتين. نصل مباشرة إلى النتيجة الاساسية:

٨ د نظرية الثنوية: إذا كان للمسألة الاصلية أو للمسألة المرافقة متجه أمثل، فسيكون للمسألة المرافقة كذلك وله القيمة ذاتها. ***تكون النهاية الصغرى للدالة cx مساوية للنهاية العظمى للدالة yb***. إذا لم يكن هناك حل أمثل، فهناك امكانان: إما أن تكون المجموعتان الملائمتان خاليتين أو تكون إحداهما خالية والمسألة الأخرى غير محدودة (القيمة العظمى $+\infty$ أو القيمة الصغرى $-\infty$).

إذا كان لكل من المسألتين متجه ملائم فان لهما متجهين أمثلين x^* و y^* بالاضافة إلى أن $cx^* = y^* b$.

من ناحية رياضية، يسوي ذلك المنافسة بين البقال والصيدلي: *النتيجة دائماً تعادل*. سوف نجد في نظرية اللعب، نظرية أصغر قيم عظمى مشابهة ونظرية توازن مشابهة. هذه النظريات لاتعني أن المستهلك لايدفع شيئاً مقابل وجبة مثالية، ولا يوجد أي سبب اقتصادي كي يفضل الفيتامينات على الطعام. رغم أن الصيدلي يضمن منافسة البقال على كل طعام ـ ومن أجل الطعام الغالي الثمن ـ مثل زبدة الفول السوداني فإن الصيدلي سيبيع بأرخص الأسعار. سنلاحظ أن الأطعمة الغالية ستبتعد عن الوجبة المثلى إلا أن النتيجة هي التعادل.

يمكن لهذه النتيجة أن تظهر كش ـ مات، إلا أنني آمل أن لاتكون واهماً. يحوي المتجه الامثل المعلومات الحاسمة. في المسألة الاصلية، x^* يخبر ما على الشاري أن يفعل. في المرافقة y^* يحدد الاسعار الطبيعية (أو «***أسعار الظل***» التي يجري وراءها الاقتصاد. بقدر ما يعكس نموذجنا الخطي الاقتصاد الحقيقي، تمثل هذه المتجهات القرارات التي يجب تنفيذها. لايزال هناك ضرورة لحسابها بطريقة الإفراد؛ تخبرنا نظرية الثنوية عن خواصها الأكثر أهمية.

نريد أن نبدأ بالبرهان. قد يبدو لنا واضحاً أنه يمكن للصيدلي أن يرفع أسعاره حتى تلائم أسعار البقال ولكن الأمر غير ذلك. بالاحرى، الجزء الأول هو

الذي يقع : لما كان يمكن تبديل كل طعام بالفيتامين المكافىء له دون زيادة في التكلفة فان على كل وجبة مناسبة أن تكون كلفتها مساوية على الاقل، لأي سعر يفرضه الصيدلي. إنها متراجحة باتجاه واحد، *أسعار الصيدلي* $\leq$ *أسعار البقال*، إلا أنها أساسية. إنها تدعى ***الثنوية الضعيفة***، ومن السهل أن نبرهن من أجل كل برنامج خطي ومرافقه مايلي :

٨ هـ إذا كان x و y متجهين ملائمين في مسألتي النهاية الصغرى والعظمى فانه يتحقق مايلي $y b \leq c x$.

البرهان بما أن المتجهين ملائمان، لذا، فهما يحققان :

$$Ax \geq b \quad \text{و} \quad yA \leq c$$

وبما أن الملاءمة تحوي $x \geq 0$ و $y \geq 0$، لذا، فإن الضرب الداخلي لن يغير من جهة المتراجحات :

$$yAx \geq yb \quad \text{و} \quad yAx \leq cx. \qquad (١)$$

وبما أن الطرفين الأيسرين متطابقان، لذا، فإننا نحصل على الثنوية الضعيفة $y b \leq c x$.

هذه المتراجحة ذات الاتجاه الواحد سهلة الاستعمال. أولاً لأنها تمنع هاتين المسألتين من أن تكونا غير محدودتين؛ إذا كانت $y b$ كبيرة إلى حد كبير فلا يمكن أن يوجد متجه ملائم x وإلا فاننا سنخالف $y b \leq cx$. بشكل مشابه، إذا كانت المسألة الاصلية غير محدودة ـ دالة التكلفة cx تسعى إلى $-\infty$، فإنه لايمكن أن يكون للمسألة المرافقة متغير y ملائم.

الأمر الثاني، وهو من الاهمية ذاتها : نستطيع أن نقرر، مباشرة، أن أي متجه يحقق المعادلة $y b = c x$ هو متجه أمثل. عند تلك النقطة، يتساوى سعر البقال مع سعر الصيدلي ونجد الوجبة المثلى والفيتامينات المثلى بحيث لن يكون للمستهلك خيار بين الأمرين.

٨ و إذا كان x و y متجهين ملائمين وكان $c\,x = y\,b$ فان x و y أمثلان .

البرهان: وفقـاً لـ ٨ هـ، ليس هناك متجه ملائم y يمكن أن يجعل $y\,b$ أكبر من $c\,x$. بما أن y يحقق هذه القيمة، لذا، فهو أمثل . بشكل مشابه ليس هناك متجه ملائم x يمكن أن يجعل $c\,x$ أقل من $y\,b$ و أي x يحقق هذه النهاية الصغرى لابد وأن يكون هو الأمثل .

سنقدم مثالاً بنوعين من الطعام ونوعين من الفيتامينات . لاحظ كيف تظهر A^T عندما نكتب المسألة المرافقة لأن $y\,A \le c$ من أجل متجهات أسطر تعني $A^T y^T \le c^T$ من أجل متجهات أعمدة .

الاصلية: أوجد النهاية الصغرى لـ $x_1 + 4x_2$ **المرافقة**: أوجد النهاية العظمى لـ $6y_1 + 7y_2$

شرط $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,$	شرط $y_1 \ge 0, y_2 \ge 0,$
شرط $2x_1 + x_2 \ge 6$	شرط $2y_1 + 5y_2 \le 1$
شرط $5x_1 + 3x_2 \ge 7.$	شرط $y_1 + 3y_2 \le 4.$

اختيار $x_1 = 3$ و $x_2 = 0$ ملائم بتكلفة قدرها $x_1 + 4x_2 = 3$. في المسألة المرافقة، يعطي $y_1 = 1/2\,,\ y_2 = 0$ القيمة نفسها $6y_1 + 7y_2 = 3$. لذا فان هذين المتجهين أمثلان .

يبدو ذلك سهلاً إلى حد كبير . بالرغم من ذلك لابد لنا من نظرة فاحصة لمعرفة مايحصل عندما تصبح المتراجحة $y\,b \le c\,x$ في لحظة ما معادلة . إن ذلك يشبه حساب التفاضل حيث الجميع يعلم شرط النهاية العظمى أو النهاية الصغرى : *المشتقات الأول تساوي الصفر* . من ناحية أخرى، قد ينسى أن هذا الشرط يتغير تماماً عند وجود قيود . إن أفضل مثال لذلك هو الخط المستقيم المائل نحو الأعلى، مشتقته لاتساوي الصفر أبداً، لذا يفشل حساب التفاضل هنا، والقيمة العظمى تقع عند الطرف الأيمن للفترة . هذه، تماماً، الحالة التي نواجهها في البرمجة الخطية . هناك متغيرات أكثر والفترة تصبح

مجموعة ملائمة ذات أبعاد متعددة، لكن ما يبقى هو أن القيمة العظمى كذلك تقع عند قرنة من قرنات المجموعة الملائمة. بلغة طريقة الإفراد، إن هناك حلاً أمثل x وهو *أساسي*: له m مركبة غير صفرية فقط.

المسألة الحقيقية في البرمجة الخطية هي في تحديد هذه القرنة. ومن أجل ذلك، يجب أن نقبل أن حساب التفاضل ليس، تماماً، دون فائدة. ليس الأمر بعيداً من ذلك إذ إن طريقة «معاملات لاغرانج» سوف تعيدنا إلى المشتقات الصفرية عند إيجاد النهايتين العظمى والصغرى. وفي الحقيقة، *المتغيرات المرافقة* y هي، *تماماً*، *معاملات لاغرانج* المتعلقة بمسألة إيجاد النهاية الصغرى للدالة cx. هذه الحيلة هي، أيضاً، مفتاح البرمجة غير الخطية. إن شروط النهايتين العظمى والصغرى المقيدتين سوف تظهر، رياضياً، في المعادلة (٢)، إلا أننا نود أن نعبر عنها هنا بتعابير اقتصادية: *ستكون الوجبة x واسعار الفيتامينات y أماثل عندما:*

(١) لايبيع البقال شيئاً من أي طعام يزيد سعره على سعر الفيتامين المكافىء.
(٢) لايطلب الصيدلي أي ثمن لفيتامين متوافر بزيادة في وجبة الطعام.

في المثال، $x_2 = 0$ لأن الطعام الثاني غال جداً، إذ يزيد سعره عن سعر الصيدلي حيث أن $y_1 + 3y_2 \leq 4$ متراجحة فعلية $\frac{1}{2} + 0 < 4$. بشكل مشابه سيكون $y_i = 0$ إذا زادت كمية الفيتامين i عن الحد المطلوب؛ إنه «طعام مجاني» وهذا يعني أنه بدون أية قيمة. يتطلب المثال سبع وحدات من الفيتامين الثاني إلا أن الوجبة مزودة فعلاً بـ $5x_1+3x_2=15$. وبذلك، نجد $y_2 = 0$. بامكانك أن ترى كيف أصبحت نظرية الثنوية مستكملة؛ فعندما يتحقق القيدان معاً، عندئذ، فقط، يكون لدينا حلان أمثلان.

من السهل فهم **شروط الملاءمة الأمثلية** هذه بلغة المصفوفات. نقارن المتجه Ax بالمتجه b (تذكر أن شرط الملاءمة يتطلب $Ax \geq b$) ونبحث عن المركبات التي تفشل من

أجلها المساواة. هذا يقابل الفيتامين الذي ازدادت كميته عن الحاجة المطلوبة، ولذا، فإن سعره $y_i = 0$. في الوقت نفسه، نقارن yA بـ c ونتوقع أن تقابل المتراجحات الفعلية (أطعمة باهظة الثمن) العلاقة $x_j = 0$ (اهمال الحمية). هذه هي «*الشروط المتراخية الاضافية*» في البرمجة الخطية وشروط «*Kuhn - Tucker*» في البرمجة غير الخطية.

٨ ز *نظرية التوازن:* لنفرض أن المتجهين الملائمين x و y يحققان الشروط المتراخية الاضافية:

إذا كان $(Ax)_i > b_i$ فإن $y_i = 0$ وإذا كان $(yA)_j < c_j$ فإن $x_j = 0$ (٢)

حينئذٍ، يكون x و y أمثلين، وبالعكس فان المتجهين الامثلين، يحققان (٢).

البرهان: المعادلات التي تعتبر مفتاح الحل هي:

$$yb = y(Ax) = (yA)x = c \qquad (٣)$$

عادة تكون المعادلة الوسطى، فقط، أكيدة. أما بالنسبة للمعادلة الأولى فنحن نعلم أن $y \geq 0$ و $Ax \geq b$ ولذا، فإن $yb \leq y(Ax)$. اضافة إلى ذلك، فإن هناك طريقة واحدة تتحقق من أجلها المساواة: *في كل مرة يقع التناقض* $b_i < (Ax)_i$، *يكون العامل* y_i *الذي يضرب بهذه المركبات مساوياً الصفر*. لذا، فإن هذا التناقض لايضيف شيئاً إلى الضرب الداخلي وتبقى المساواة محفوظة.

كذلك، الامر صحيح بالنسبة للمعادلة الأخرى: الملاءمة تعطي $x \geq 0$ و $yA \leq c$ ولذا، فإن $yAx \leq cx$. نحصل على التساوي عندما يتحقق الشرط المتراخي الثاني: إذا كان هناك زيادة في السعر $(Ay)_j < c_j$، فان ذلك سيلغي نتيجة الضرب بـ $x_j = 0$. يتركنا ذلك مع $yb = cx$ في المعادلة (٣) الاساسية، وهذه المساواة التي تضمن (وهي التي كانت قد ضمنت) مثالية x و y.

برهان الثنوية

هذا يكفي من أجل المتراجحة $y b \leq c x$. لقد كان من السهل برهانها، ومن خلالها، حصلنا على اختبار سريع للمتجهات الأماثل (إنها تحولها إلى مساواة). وقد اعطيت الآن شروط متراخية لازمة وكافية . الشيء الوحيد الذي لم يعمل هو أن نبين أن المساواة $y b = c x$ ممكنة حقاً. ولن تكتمل نظرية الثنوية قبل أن نحصل على المتجهين الامثلين اللذين لا يمكن الحصول عليهما بعمليات بسيطة.

لكي نحصل عليها نعود إلى طريقة الإفراد التي كنا قد حسبنا بواسطتها الحل الامثل x. مسألتنا هي تعيين الحل الامثل y وفي الوقت نفسه توضيح أن الطريقة تتوقف في المكان الصحيح المناسب للمسألة المرافقة (بالرغم من أنها صممت لحل المسألة الاصلية). أولاً، لنذكر كيف انطلقنا. جعلت المتراجحات $Ax \geq b$ التي عددها m، معادلات بادخال متغيرات التراخي $w = Ax - b$ وإعادة كتابة شروط الملاءمة كما يلي:

$$[A \ \ -I]\begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} = b \ , \quad \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} \geq 0. \qquad (٤)$$

لقد اختارت كل خطوة من خطوات الطريقة m عموداً من المصفوفة الكبيرة $[A \ -I]$ لتكون اعمدة اساسية ولإزاحتها (نظرياً على الاقل إذا لم يكن فيزائياً) إلى المقدمة، ينتج عن ذلك $[B \ \ N]$ وتم، تبعاً لذلك، إزاحة مقابلة في متجه التكلفة الطويل $[c \ \ 0]$ واعيد ترتيب مركباته لتصبح $[c_B \ \ c_N]$. إن شرط التوقف الذي ينهي طريقة الإفراد، كان: $r = c_N - c_B B^{-1} N \geq 0$.

نعلم أن *الشرط $r \geq 0$ قد تحقق أخيراً* لأن عدد القرنات محدود. وحينئذ تكون التكلفة الاصغرية:

$$\text{التكلفة الأصغرية} \quad c x = [c_B \ \ c_N]\begin{bmatrix} B^{-1} b \\ 0 \end{bmatrix} = c_B B^{-1} b \qquad (٥)$$

إذا امكن اختيار $y = c_B B^{-1}$ في المسألة المرافقة عندئذ يكون من المؤكد أن $y b = c x$. النهاية الصغرى والنهاية العظمى متساويتان. لذا، لابد أن نبين أن y تحقق قيود المسألة المرافقة: $y A \leq c$ و $y \geq 0$. علينا أن نبرهن أن:

$$y \begin{bmatrix} A & -I \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} c & 0 \end{bmatrix}. \qquad (٦)$$

عندما تعاود طريقة الإفراد إزاحة المصفوفة الطويلة والمتجه الطويل في (٦) بهدف وضع المتغيرات الاساسية في البداية، فان ذلك يؤدي إلى إعادة ترتيب القيود على النحو التالي:

$$g \begin{bmatrix} B & N \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} c_B & c_N \end{bmatrix}. \qquad (٧)$$

بالنسبة لاختيارنا $y = c_B B^{-1}$، فان النصف الأول مساواة أما النصف الثاني فإنه $c_B B^{-1} N \leq c_N$. يمثل ذلك شرط التوقف $r \geq 0$ الذي نعلم أنه محقق. لذا، فإن y ملائم وبذا، تكون *نظرية الثنوية قد تم برهانها*. بتحديد مكان المصفوفة الحرجة B التي هي من النوع $m \times m$ والتي هي غير شاذة مادام التردي غير ممكن، تكون طريقة الإفراد قد أوجدت y^* وكذلك x^*.

اسعار الظل Shadow Prices

كيف تتغير القيمة الصغرى لدالة التكلفة مع تغير الطرف الأيمن b أو تغير متجه التكلفة c؟ إنه سؤال يرتبط بموضوع ***تحليل الحساسية***، ويسمح لنا بأن نستنبط من طريقة الإفراد مجموعة من المعلومات الاضافية التي تحتويها. بالنسبة لرجل الاقتصاد أو المديرين التنفيذيين، سيكون لهذه الأسئلة حول *التكلفة الهامشية أهمية بالغة*.

إذا سمحنا بتغيرات كبيرة في b أو c فان الحل سوف يتصرف بصورة متوترة. فعندما يزداد سعر البيض فسيكون هناك مرحلة يختفي فيها البيض من الغذاء، وبلغة

البرمجة الخطية، يعني ذلك أن المتغير x_{egg} سوف ينتقل من متغير أساسي إلى متغير حر. ولكي نتابع ذلك بدقة، علينا أن ندخل مايسمى بالبرمجة الوسيطية. لكن، إذا كانت التغيرات صغيرة، الامر الاكثر احتمالاً، ***فان القرنة التي كانت مثلى تبقى كذلك،*** والمتغيرات الاساسية المختارة لن تتأثر. بتعبير آخر، إن B وN سوف تظلان كما هما. هندسياً، يعني ذلك أننا أزحنا المجموعة المواتية قليلاً (بتغيير b)، وأننا أملنا قليلاً جماعة المستويات لتقترب من تلاقيها (بتغيير c)؛ فإذا كانت هذه التغيرات صغيرة يحدث الاتصال أولاً عند القرنة ذاتها (بإزاحة طفيفة).

في نهاية طريقة الإفراد، عندما يصبح الاختيار الصحيح للمتغيرات الاساسية معلوماً، تكون الأعمدة المقابلة لها من المصفوفة A مصفوفة أساسية B. عند تلك القرنة، نجد:

$$\text{التكلفة الأصغرية} = c_B B^{-1} b = y^* b$$

وعلى هذا، فإن تغيراً مقداره Δb سوف يغير القيمة الصغرى لدالة التكلفة بما يعادل $y^* \Delta b$. يعطي y^*، حل المسألة المرافقة، *معدل تغير القيمة الصغرى لدالة التكلفة* (مشتقتها) بالنسبة إلى تغيرات b. تدعى مركبات y^* ***أسعار الظل*** وهذا أمر معقول؛ إذا ازداد الطلب على الفيتامين b_1 بمعدل Δ وكان سعر الصيدلي y_1^* وكان مزاحماً، تماماً، للبقال، فان كلفة الغذاء (سواء من عند الصيدلي أو البقال) ستزداد بمقدار Δy_1^*. في الحالة التي يكون فيها y_1^* صفراً، سيكون الفيتامين B_1 سلعة مجانية، ليس لتغير بسيط على طلبه أي أثر، لقد حوى الغذاء منه أكثر من الحاجة.

سوف نعرض الآن سؤالاً مختلفاً. لنفرض أننا نصر على أن تحوي وجبة الطعام عدداً صغيراً من البيض؛ يتغير شرط عدم السالبية ليصبح $x_{egg} \geq \delta$. كيف يؤثر ذلك على دالة التكلفة؟

لو كان البيض ضمن الوجبة المثلى لما كان هناك أي تغير ـ فالمتطلب الجديد متحقق سلفاً وليس هناك أي إضافة في التكلفة، ولكن، إذا كان البيض خارج الوجبة فإن

ذلك يكلف بعض الشيء وتجب إضافة المقدار δ. الزيادة لم تكن الثمن الكامل $c_{egg}\,\delta$، إذ أننا سوف نقتطع من الاطعمة الأخرى ونعوض جزئياً. هذه الزيادة محكومة فعلاً بـ«**فرق التكلفة**» للبيض ــ ثمن البيض ناقصاً الثمن الذي دفعناه لمكافئه من الطعام الرخيص. لحساب ذلك، نعود إلى المعادلة (٢) من البند (٨-٢):

$$\text{تكلفة} = (c_N - c_B B^{-1}N)x_N + c_B B^{-1}b = r x_N + c_B B^{-1}b$$

إذا كان البيض هو المتغير الحر الأول فان زيادة المركبة الأولى من x_N بمقدار δ يزيد التكلفة بمقدار $r_1\delta$. لذا، فإن التكلفة الحقيقية هي r_1. بصورة مشابهة، يعطي المتجه r التكلفة الفعلية لجميع الاطعمة غير الاساسية ـ التغير في التكلفة الكلية وكذلك صفر الحد الأدنى لـ x (قيد عدم السلبية) قد تحولا صعوداً. نعلم أن $r \geq 0$، بسبب كون ذلك اختبار التوقف؛ يظهر لنا الاقتصاد الشيء ذاته، أي أن السعر المنخفض للبيض لايمكن أن يكون سالباً أو سيدخل في نظام الحمية.

نظرية المتراجحات

هناك أكثر من طريقة لمعالجة الثنوية. إن الأسلوب الذي اتبعناه ــ لبرهان المتراجحة

$yb \leq cx$، ثم استخدام طريقة الإفراد للوصول إلى المساواة ــ كان شرطاً مناسباً. إذ إن تلك الطريقة قد وطدت من قبل، ولكن، على كل حال، فقد كان برهاناً مطولاً. بالطبع، لقد كان *برهاناً بناءً* إذ إن x^* و y^* قد حسبا فعلاً. والآن لننظر باختصار إلى أسلوب مختلف يستبعد آلية خوارزمية الإفراد ويتجه مباشرة إلى الهندسة. اعتقد أن الافكار الرئيسية ستكون واضحة (وربما أوضح) إن نحن اهملنا بعض التفاصيل.

إن أفضل توضيح لهذا الأسلوب يأتي من خلال النظرية الأساسية في الجبر الخطي. تذكر أن المسألة المطروحة في الباب الثاني كانت حل المسألة $Ax = b$ أي إيجاد

bضمن فضاء اعمدة A . بعد الحذف وبعد الفضاءات الجزئية الأربعة الأساسية، أجيب على مسألة قابلية الحل بطريقة مختلفة، تماماً، في التمرين (٣-١-١١).

٨ح إما أن يكون للنظام $Ax = b$ حل أو أن هناك y بحيث يكون $yA = 0$ و $yb \neq 0$.

هذه هي *نظرية البديل*، إذ إنه من المستحيل إيجاد x و y معاً: إذا كانت $Ax = b$ فإن ذلك يؤدي إلى $yAx = yb \neq 0$ وهذا يتناقض مع $yAx = 0x = 0$. بلغة الفضاءات الجزئية، تعني نظرية البديل ما يلي: إما أن ينتمي b إلى فضاء اعمدة A وإلا فإن له مركبة غير صفرية موجودة في الفضاء الجزئي العمودي الذي هو الفضاء الصفري الأيسر لـ A . تلك المركبة هي y المطلوبة [١] .

من أجل المتراجحات، نود أن نجد نظرية من النوع ذاته. الموقع الصحيح للبداية هو نظام المعادلات $Ax = b$ ولكن، مع القيد الإضافي $x \geq 0$. السؤال ليس عن حل لنظام المعادلات $Ax = b$ ولكن عن *حل غير سالب*. بقول آخر، متى تكون المجموعة المواتية غير خالية في المسألة ذات القيود الممثلة بمعادلات؟

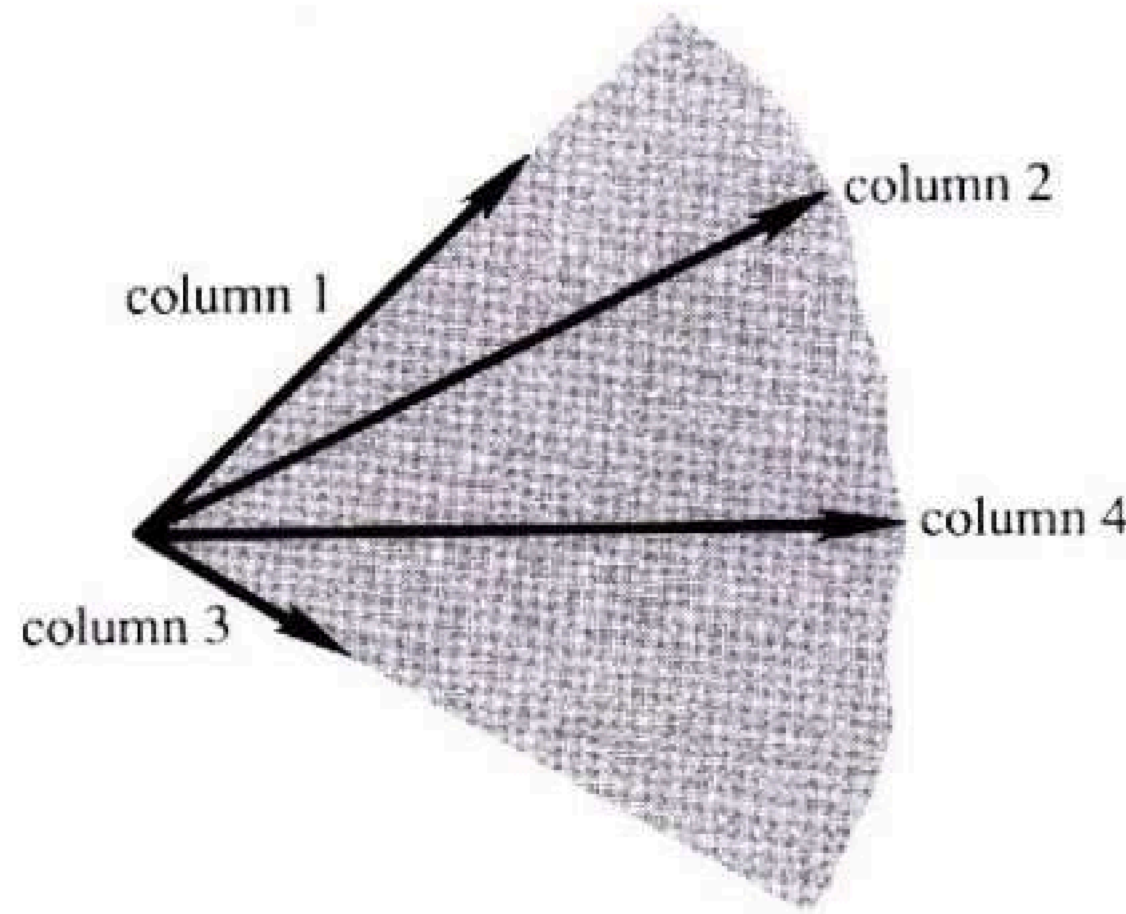
للاجابة عن هذا السؤال، ننظر ثانية إلى تراكيب اعمدة A. في الباب الثاني، عندما كان أي متجه x مقبولاً كان من الممكن أن يكون b في أي مكان من فراغ الأعمدة. أما الآن فاننا نسمح، فقط، بتراكيب غير *سالبة*، وفي هذه الحالة، لايمكن للمتجهات b ملء الفضاء الجزئي. بدلاً من ذلك، فإنها تمثل بالمنطقة المخروطية المظللة في الشكل (٨-٦). لكل مصفوفة من النوع $m \times n$ ، يوجد n عموداً في فضاء ذي m بعداً، ويصبح المخروط هرما مفتوحاً. في الشكل المذكور، يوجد أربعة اعمدة في فضاء

---

(١) لابد أنك لاحظت أن هذا البرهان ليس بناءً! إذ أننا نعلم فقط أن المركبة موجودة في الفضاء الصفري الايسر أو أن b ينتمي إلى فضاء الاعمدة.

ثنائي البعد و A من النوع 4×2 . إذا انتمت b إلى هذا المخروط فسيكون هناك حل غير سالب للنظام $Ax = b$ وإلا فلا يوجد ذلك .

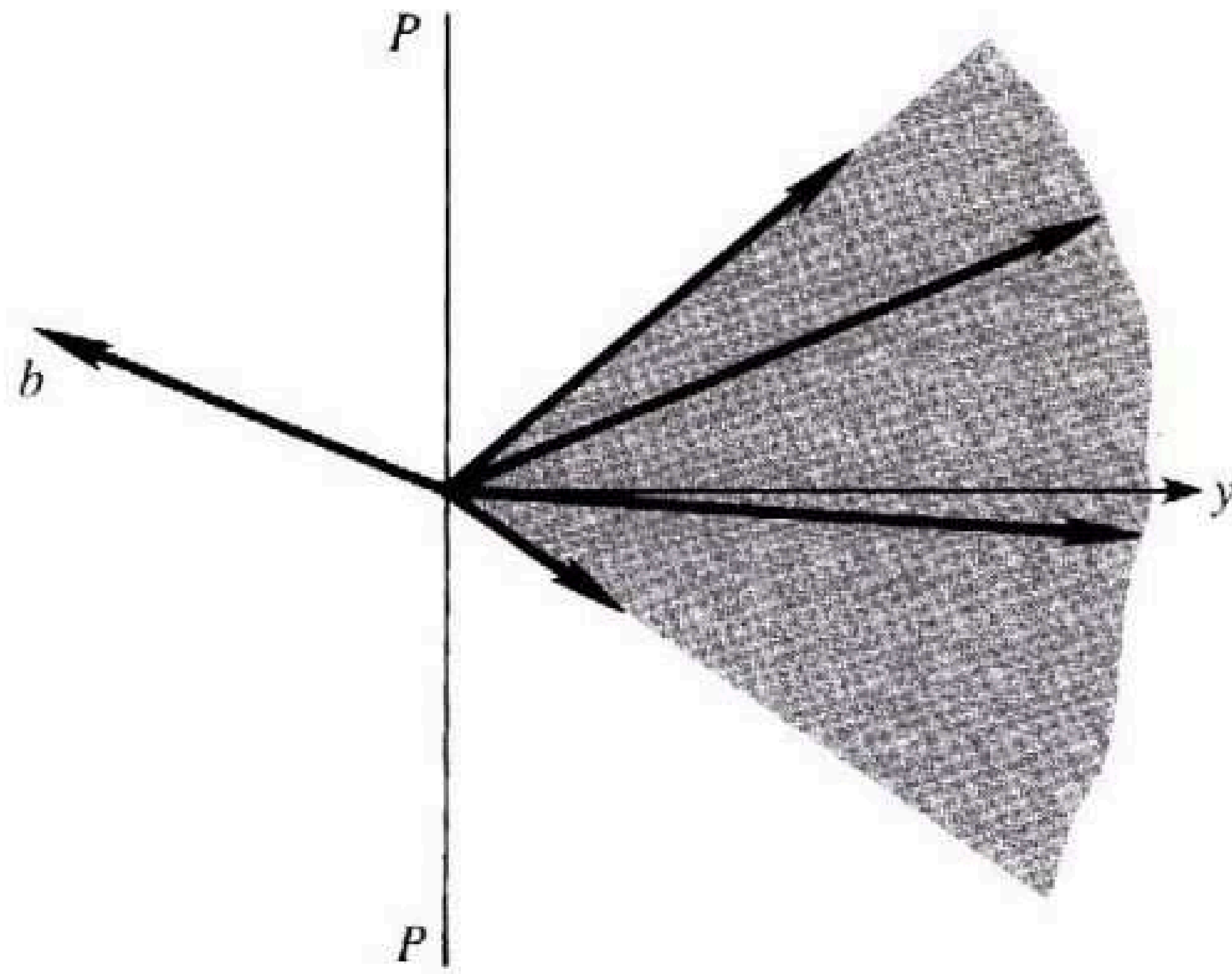
مشكلتنا الآن هي أن نتعرف على البديل : *ماذا يحدث لو أن* b *وقعت خارج المخروط؟* هذا الامكان موضح بالشكل (٨-٧) وبإمكانك تفسير الشكل *الهندسي*



شكل (٨-٦) . مخروط التراكيب غير السالبة للأعمدة : $b = Ax$ حيث $x \geq 0$.

بمجرد النظر . هناك «مستو زائد فاصل» يمر بنقطة الاصل ونجد أن b يقع في جهة من هذا المستوي بينما يقع كاملُ المخروط في الجهة الأخرى (كلمة زائد الملحقة تعني ، فقط ، أن عدد الابعاد كبير ؛ يتكون المستوي ، كالمعتاد ، من المتجهات العمودية على متجه ثابت y) . الجداء الداخلي لـ y بـ b سالب لأن قياس زاويتهما يزيد على ٩٠°، بينما الجداء الداخلي لـ y بأي عمود من A موجب . بلغة المصفوفات هذا يعني أن $yb < 0$ و $yA \geq 0$ وهذا يمثل البديل الذي كنا نبحث عنه .

٨ ط إما أن يكون للنظام $Ax = b$ حل غير سالب وإلا فانه يوجد متجه y بحيث يكون $yA \geq 0$ و $yb < 0$



شكل (٨-٧) . b يقع خارج المخروط مفصولاً بالمستوي العمودي على y.

هذه هي ***نظرية المستوي الزائد الفاصل،*** وهي نظرية أساسية في الاقتصاد الرياضي، أحد المراجع لبرهانها هو كتاب *Gale* حول نظرية النماذج الاقتصادية الخطية.

مثال: إذا كان $A = I$ فإن المخروط المقابل هو الربع الأول الموجب. أي أن كل bمن ذلك الربع هو تركيب غير سالب للأعمدة:

$$b = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{فإن} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{إذا كان}$$

يتحقق البديل الثاني من أجل كل b واقع خارج الربع الأول:

إذا كان $b = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ فإن $y = [0 \quad 1]$ **تعطي** $yA \geq 0$ **إلا أن** $yb = -3$

هنا المحور x (العمود على محور y) يفصل b عن الربع الموجب.

تقودنا هذه النظرية مباشرة إلى متتالية كاملة من بدائل مشابهة (انظر *Gale*). في الحقيقة، قد تعتقد أنه عندما يكون بديلان فإن أحدهما يمنع الآخر، فاذا لم يتحقق أحدهما فلابد أن يتحقق الآخر. مثال ذلك، من المستحيل لفضاء جزئي S ومتممه

المتـعـامـد $S^{\perp}$ أن يحويا معاً متجهات موجبة : سيكون جداؤهما الداخلي موجباً بينما يكون الجداء الداخلي لمتجهين متعامدين مساوياً الصفر . من جهة أخرى ، ليس من المؤكـد تمامـاً أن S أو $S^{\perp}$ يحوي متجهاً موجباً ، يمكن أن يكون S محور x و $S^{\perp}$ محور y، في هذه الحالة، يحويان ، فقط ، المتجهين شبه الموجبين $[0 \quad 1]$ و $[1 \quad 0]$. مما يجدر ذكره هو أن نظرية البدائل الضعيفة هذه صالحة للعمل . إما أن يحوي S متجهاً موجباً x أو يحوي $S^{\perp}$ متجهاً شبه موجب y . عندما يكون S و $S^{\perp}$ مستقيمين متعامدين في المستوي فمن السهل أن نرى أن واحداً منهما يجب أن يدخل الربع الأول ؛ لكن الأمر ليس واضحاً لي في الابعاد العليا .

بالنسبة للبرمجة الخطية ، تظهر البدائل المهمة ، عندما تكون القيود متراجحات على عكس حالة المعادلات .

٨ ي إما أن يكون للنظام $Ax \geq b$ حل غير سالب وإلا فان هناك متجه y بحيث يكون $yA \geq 0$ و $yb < 0$ و $y \leq 0$.

تنتج ٨ ي بسهولة من ٨ ط ، باستخدام المتغيرات المتراخية $w = Ax - b$ لتحويل المتراجحة إلى معادلة :

$$\begin{bmatrix} A & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} = b$$

إذا لم يكن لهذه المعادلة حل يحقق $x \geq 0$ و $w \geq 0$ فإنه ، حسب ٨ ي ، يجب أن يوجد y بحيث يكون :

$$y \begin{bmatrix} A & -I \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad y\, b < 0.$$

هذا هو ، فعلاً ، البديل الآخر في ٨ ي وهذه هي النتيجة التي تؤدي إلى برهان غير بناء في نظرية الثنوية . ولكننا وعدنا أن نتمسك بالهندسة ونهمل التفاصيل الجبرية ولقد التزمنا بذلك الوعد .

تمارين

٨-٣-١ ماهي المسألة المرافقة للمسألة الآتية: إيجاد القيمة الصغرى للدالة $x_1 + x_2$ ضمن الشروط $x_1 \geq 0$ و $x_2 \geq 0$ و $2x_1 \geq 4$ و $x_1 + 3x_2 \geq 11$.
أوجد حل المسألة ومرافقتها وحقق كون النهاية الصغرى تساوي النهاية العظمى.

٨-٣-٢ ماهي المسألة المرافقة للمسألة الآتية: إيجاد القيمة العظمى لـ y_2 ضمن الشروط $y_1 \geq 0$ و $y_2 \geq 0$ و $y_1 + y_2 \leq 3$؟ أوجد حل هذه المسألة ومرافقتها.

٨-٣-٣ لنفرض أن A هي مصفوفة الوحدة (حيث $m = n$) وأن المتجهين b, c غير سالبين. وضح لماذا يعتبر $x^* = b$ حلاً أمثل لمسألة القيمة الصغرى. أوجد y^* في مسألة القيمة العظمى وتحقق من أن القيمتين متساويتان. إذا كانت المركبة الأولى لـ b سالبة فماذا يكون حينئذ x^* و y^*.

٨-٣-٤ كون مثالاً من النوع 1×1 يكون فيه $Ax \geq b$ و $x \geq 0$ غير ملائم، والمسألة المرافقة غير محدودة.

٨-٣-٥ منطلقاً بالمصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$، اختر b و c بحيث تكون المجموعتان الملائمتان $Ax \geq b$, $x \geq 0$ و $yA \leq c$, $y > 0$ خاليتين.

٨-٣-٦ إذا كانت عناصر A و b و c موجبة، بين أن كلاً من المسألتين الاصلية والمرافقة ملائمة.

٨-٣-٧ بين أن المتجهين $x = (1,1,1,0)$ و $y = (1,1,0,1)$ ملائمان في المسألة الاصلية والمرافقة حيث:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

ثم، بعد حساب cx و yb، بين كيف يمكنك أن تعلم أن هذين الحلين أمثلان.

٨-٣-٨ حقق أن المتجهين الواردين في التمرين السابق يحققان شروط التراخي الإضافية (٢)، وأوجد متراجحة التراخي في كل من المسألة الاصلية والمسألة المرافقة.

٨-٣-٩ لنفرض أن: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، $b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ، $c = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ أوجد الحل الامثل x وكذلك y وتحقق من شروط التراخي الإضافية (وكذلك $yb = cx$).

٨-٣-١٠ إذا كانت المسألة الاصلية مقيدة بمعادلات بدلاً من متراجحات ـ *أوجد القيمة الصغرى للدالة* cx *ضمن الشروط* $Ax = b$ و $x \geq 0$ ـ عندئذ، يكون الشرط $y \geq 0$ قد أهمل في المسألة المرافقة: *أوجد القيمة العظمى* لـ yb ضمن الشروط $yA \leq c$. بين أن المتراجحة $yb \leq cx$ لاتزال محققة هنا. لماذا كان $y \geq 0$ ضرورياً في (١) وغير ضروري هنا؟ يمكن لهذه الثنوية الضعيفة أن تكتمل إلى الثنوية الكلية.

٨-٣-١١ (أ) بدون طريقة الإفراد، أوجد النهاية الصغرى للتكلفة $5x_1 + 3x_2 + 4x_3$ تحت القيود: $x_1 + x_2 + x_3 \geq 1 , x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

(ب) ماهو شكل المجموعة الملائمة؟

(جـ) ماهي المسألة المرافقة وما هو حلها؟

٨-٣-١٢ إذا كان للمسألة الاصلية الحل الامثل الوحيد x^*، فكيف يمكنك أن

توضح أن تغيراً بسيطاً في c سوف يبقي x^* حلاً أمثل .

٨-٣-١٣ إذا كان ثمن الستيك (قطعة لحم) $c_1 = \$ 3$ وزبدة الفول السوداني $c_2 = \$ 2$ وأنهما يعطيان وحدتين ووحدة واحدة من البروتبين على الترتيب (المطلوب أربع وحدات) فأوجد سعر الظل للبروتين والسعر المنخفض لزبدة الفول السوداني .

٨-٣-١٤ إذا كانت $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ ، فصف المخروط الناشيء عن تراكيب اعمدتها غير السالبة ، وإذا كان b واقعاً داخل المخروط ، مثلاً $b = (3,2)$ ، فما هو المتجه x الملائم ؟ إذا كان b واقعاً خارج المخروط ، مثلاً $b = (0,1)$ فما هو المتجه y الذي يحقق البديل ؟

٨-٣-١٥ في الفضاء ذي الابعاد الثلاثة ، هل بامكانك إيجاد ستة متجهات بحيث يملأ مخروط تراكيبها غير السالبة الفضاء كله؟ ماذا تقول لأربعة متجهات؟

٨-٣-١٦ استخدم ٨ ح كي تبين أنه لايوجد حل للمسألة الآتية (لأن البديل متحقق) :

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

٨-٣-١٧ استخدم ٨ ط كي تبين أنه لايوجد حل غير سالب (لأن البديل متحقق) :

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 1 & -4 & -7 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

٨-٣-١٨ بين أن البديلين في ٨ ي : $(Ax \geq b, x \geq 0, yA \geq 0,$ $y b < 0, y \leq 0)$ ، لايمكن أن يتحققا معاً . *إرشاد* yAx .

٨-٤ نماذج الشبكة

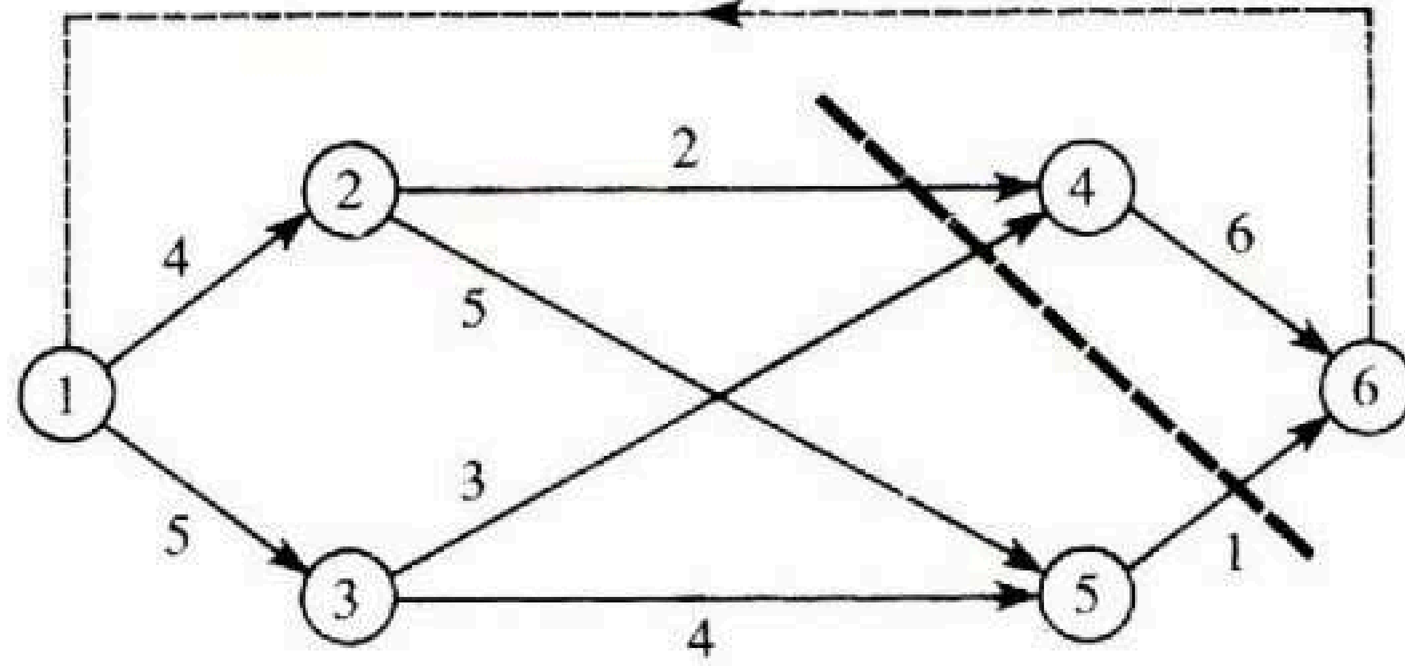
لبعض البرامج الخطية بنية تجعل إيجاد حل لها أمراً سريعاً . لقد كان ذلك صحيحاً في حل المعادلات الخطية في حالة المصفوفات الجزئية ، عندما تتواضع العناصر غير الصفرية قرب القطر الرئيسي . في البرمجة الخطية ، عندما كانت A مستطيلة ، فقد كنا نهتم في صنف خاص من المسائل تعرف ***ببرامج الشبكات*** . مصفوفة ذلك ***مصفوفة ورود*** عناصرها ± 1 أو (الاغلب أصفار) تحوي خطوات المحور فقط جمعاً وطرحاً . يمكن هنا حل مسائل أكبر من المعتاد .

لحسن الحظ ، تدخل الشبكات في كل أنواع التطبيقات . فتدفق المنتجات أو البشر أو السيارات ، كل ذلك خاضع لقانون التيار لكيرتشوف . لاتنوجد السيارات ولا تتلف في العقد . من أجل الغاز والزيت والماء ، صممت برمجة الشبكات أنظمة أنابيب كانت أرخص بملايين الدولارات من الشبكات الحديثة (غير المثلى) التصميم . ولقد حلت ***مسألة الزواج*** ـ كيف يمكن جعل عدد عمليات الزواج في نهايته العظمى عندما يكون للخطيبة حق النقض . ليس ذلك هو المسألة الحقيقية ولكنها بعض مايمكن لبرمجة الشبكات حله .

أحد نماذج الشبكات ظاهر في الشكل (٨ ، ٨) . إنها مسألة ***جعل التدفق في نهايته العظمى*** انطلاقاً من المنبع (العقدة ١) إلى المصب (العقدة ٦) . ***القيود هي سعات الخطوط*** . لايمكن للتدفق أن يزيد على هذه السعات ، الاتجاه معين بالاسهم التي لاعظمي .

لايمكن عكسها ، يمكن حل ذلك دون مرجع نظري ، ماهو ***التدفق الاعظم*** من اليسار إلى اليمين ؟

المجاهيل في هذه المسألة هي الكميات المنقولة x_{ij} من العقدة i إلى العقدة j. قيود السعات هي $x_{ij} \le c_{ij}$. التدفق غير سالب (يجري باتجاه السهم) ، *ودالة التكلفة*



شكل (٨-٨). شبكة ذات منبع وحوض وسعات وقاطع: مسألة التدفق.

هي x_{61}ـ التدفق الذي يمكننا إدعاء عودته من خلال الأنبوب المنقط. بزيادة التدفق الراجع x_{61}، نزيد التدفق الكلي في المصب.

هناك قيد آخر يجب ذكره. إنه «قانون الحفظ» الذي يقول: *التدفق الداخل في كل عقدة يساوي التدفق الخارج*. هذا هو قانون كيرتشوف في الجريان:

$$\sum_{i} x_{ij} - \sum_{k} x_{jk} = 0 \quad , \quad j = 1,2, \ldots, 6. \text{ لكل} \qquad (1)$$

التدفق في العقدة j هو x_{ij} القادم من جميع العقد i، والتدفق الخارج هو x_{jk} الذاهب إلى جميع العقد k. يمكن كتابة التوازن الظاهر في المعادلة (1) بالصورة $Ax = 0$ حيث A هي *مصفوفة الورود عقدة ـ ضلع* ـ حيث لكل عقدة سطر ولكل ضلع عمود:

$$A = \left[\begin{array}{ccccccccc} 1 & 1 & & & & & & & -1 \\ -1 & & 1 & 1 & & & & & \\ & -1 & & & 1 & 1 & & & \\ & & -1 & & -1 & & 1 & & \\ & & & 1 & & 1 & & 1 & \\ x_{12} & x_{13} & x_{24} & x_{25} & x_{34} & x_{35} & x_{46} & x_{56} & x_{61} \\ & & & & & & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ \\ 6 \end{array}$$

لقانون كيرتشوف $Ax = 0$ الذي هو نظام من النوع 9×6، حتماً، حل. نريد حلاً غير سالب ولايزيد على السعات.

بالنظر في السعات باتجاه المصب، نلاحظ أن التدفق لايمكنه أن يتجاوز $6 + 1 = 7$. هل يمكن انجاز ذلك؟ يمكن لتدفق في (2) أن يجري في الطريق 1 - 2 - 4 - 6 - 1. ويمكن لتدفق في (3) أن يجري في 1 - 3 - 4 - 6 - 1. تدفق اضافي في (1) يمكنه أن يأخذ الطريق الاخفض 1 - 3 - 5 - 6 - 1 التدفق الكلي ٦، وليس من الممكن أن يكون *أكثر من ذلك*. كيف يمكنك أن تبرهن أنه قد أمكن الوصول إلى القيمة العظمى؟

طريقة التجربة والخطأ مقنعة ولكن الرياضيات حاسمة: الطريقة هي إيجاد مقطع في الشبكة تكون فيه السعات كاملة. يفصل القاطع العقدتين 5 و 6 عن باقي العقد، للاضلاع الثلاثة التي تتقدم قاطعة المقطع سعة كلية $2 + 3 + 1 = 6$ ولايمكن لاكثر من ذلك أن يمر. تقول الثنوية الضعيفة إن كل مقطع يمثل حداً للتدفق الكلي وتقول الثنوية الكلية إنه يمكن للمقطع ذي السعة الاصغرية (المقطع الاصغري) أن يمتلىء بتدفق ممكن اتجاره.

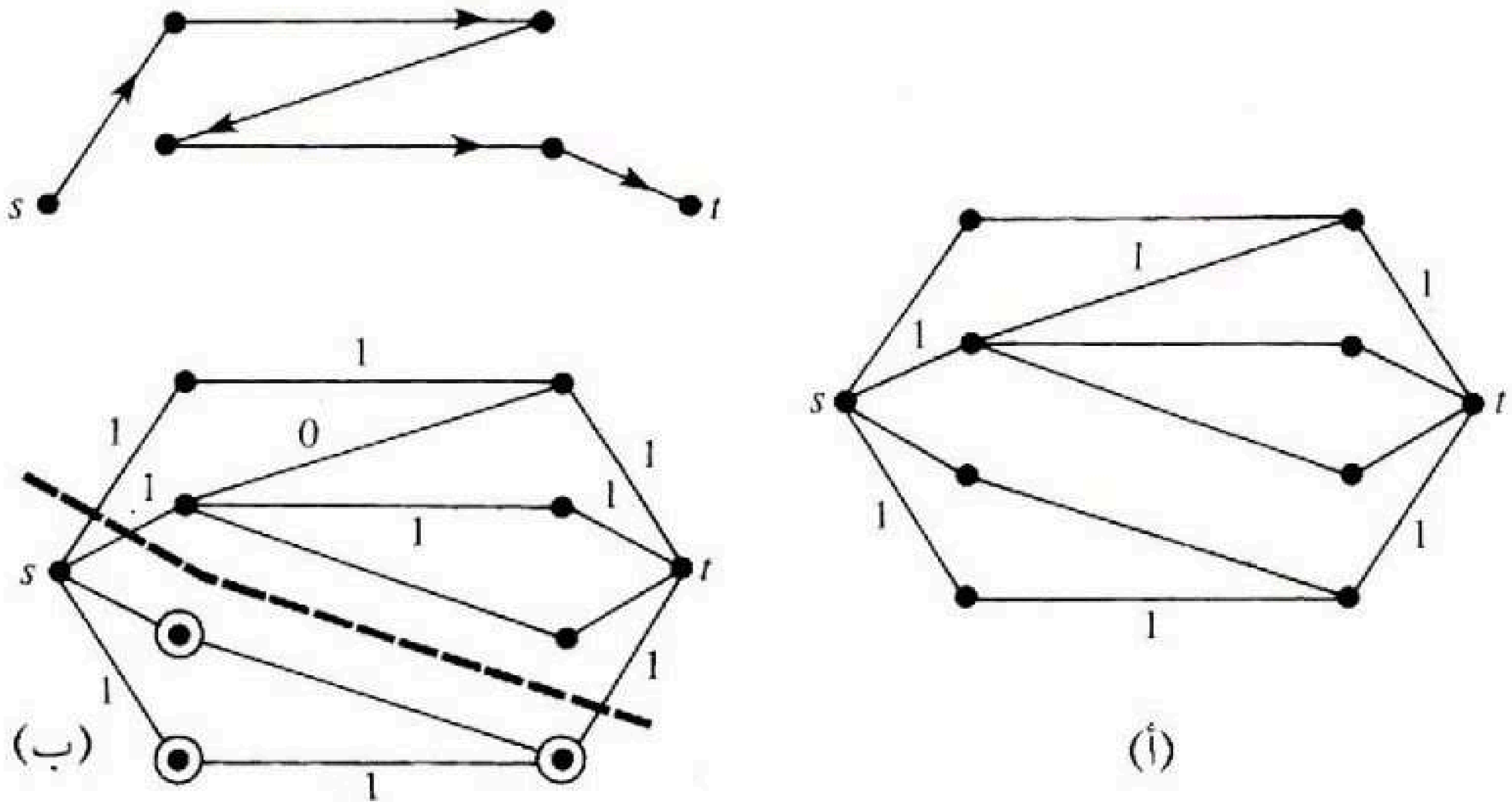
٨ك *نظرية التدفق الاعظمي ـ المقطع الأصغري*. التدفق الأعظمي في شبكة يساوي سعة المقطع الاصغري.

بقول دقيق يمكننا أن نقول «مقطع اصغري» لأنه يمكن أن تكون لمقاطع متعددة، السعة ذاتها. يقسم مقطع العقد إلى فئتين S و T حيث المنبع في S والمصب في T. تساوي سعتاهما مجموع سعات جميع الخطوط من S إلى T.

***برهان كون التدفق الأعظمي يساوي المقطع الأصغري*.** من المؤكد أنه لايمكن للتدفق أن يكون أكبر من سعة أي مقطع، بما في ذلك المقطع الأصغري. المسألة الاكثر صعوبة هنا وفي كل مسائل الثنوية، هي برهان إمكان الوصول إلى المساواة.

افرض تدفقاً أعظمياً. افحص جميع العقد التي من الممكن أن يصل إليها، من المنبع، تدفق اضافي دون أن يزيد على سعة كل خط. تتصل هذه العقد مع المنبع من خلال الفئة S. يجب أن يكون المصب مرتبطاً بالفئة الأخرى T (أو أنها سيصلها زيادة في التدفق). يجب أن يكون كل خط متصل بالمقطع ممتلئاً وإلا فسيذهب تدفق اضافي إلى عقدة في T. لذا، فإن التدفق سيملأ هذا المقطع بمقدار سعته، وبذلك نكون قد توصلنا إلى المساواة.

يستدعي ذلك طريقة لإيجاد تدفق اعظمي: تحقق فيما إذا كان في أحد الطرق سعة لم تستخدم واضف تدفقاً على طول الطريق الموسع. كل خطوة تحسب السعات الباقية وتقرر ما إذا كان المصب معزولاً عن المنبع أو أنه يمكن زيادة التدفق. العملية منظمة من قبل ***طريقة التمييز*** التي تميز كل عقدة من S بالعقدة التي تعطيها التدفق وتسمح لك أن تعود لتجد طريقاً لتدفق اضافي.



الشكل (٨ – ٩). شبكة مسألة الزواج.

الشكل (٨–٩ أ) يبين شبكة ثانية وتدفقاً قابلاً للانجاز. كل السعات (من اليسار

إلى اليمين) تساوي ١ . يظهر أن عقدتي الذروة وعقدتي الحضيض ، فقط ، يمكن أن يصلها زيادة في التدفق ـ لكن الامر ليس كذلك . يمكن للتدفق الزائد أن يعود ضمن أحد الخطوط وبالتالي يلغي تدفقاً موجوداً ـ شرط أن يصل أخيراً إلى المصب شكل (٨-٩ ب) . عندما يضاف هذا التدفق يصبح التدفق الكلي ٣ وهو التدفق الأعظمي . المقطع الأصغري مرسوم، أيضاً، في هذا الشكل، إنه يقطع ثلاثة خطوط .

مسألة الزواج

نفرض أننا أمام أربعة رجال وأربع نسوة . بعض الارتباطات الستة عشر منسجمة والبعض الآخر، مع الاسف، غير ذلك . متى يمكن وجود *تكافؤ تام* لكل فرد متزوج؟ إذا كان الجبر الخطي قادراً على العمل في فضاء ذي عشرين بعداً، فان بامكانه معالجة مسألة الزواج العادية .

هناك طريقتان لعرض هذه المسألة ـ بالمصفوفات أو بالبيانات . المصفوفة تحوي أصفاراً ووحداناً ـ $a_{ij} = 0$ إذا كانت المرأة i والرجل j غير منسجمين و $a_{ij} = 1$ إذا كانا مستعدين للتجربة . وهكذا يعطي السطر i اختيار المرأة i ويقابل العمود j الرجل j . مثال ذلك :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

يقع البيان المقابل في الشكل (٨-٩) . باهمال المنبع والمصب، يبقى هناك أربع عقد في اليسار وأربع عقد في اليمين . *تقابل الأضلاع الواصلة بينها الوحدان في المصفوفة* . لايوجد خط يصل بين المرأة الأولى والرجل الرابع، ونجد في المصفوفة $a_{14} = 0$.

يظهر التناسق الكامل (إذا كان ممكناً) باربعة وحدان واقعة في المصفوفة . عليها أن تأتي من أربعة أسطر مختلفة وأربعة أعمدة مختلفة أيضاً، لأن تعدد الزوجات غير

مسموح . إن ذلك مشابه لإيجاد *مصفوفة مبادلة* من عناصر A غير الصفرية . يجب أن يكون في البيان أربعة اضلاع ـ بدون عقد مشتركة . إذا عدنا إلى المنبع والمصب ، وأرسلنا وحدة تدفق في كل ضلع من المجموعة المتناسقة ، فانه يجب أن يكون التدفق الكلي مساوياً ٤ . سيكون التدفق الأعظمي أقل من ٤ عندما يكون تناسق كلي غير ممكن .

في المثال ، التدفق الاعظمي كان ثلاثة . القُرُن 4-4 , 2-2 ,1-1 ممكنة (وهناك مجموعات أخرى متعددة مكونة من ثلاثة قُرُن) ، ولكن من غير الممكن الوصول إلى أربعة . نريد أن نرى لماذا ذلك غير ممكن ، بطريقة تطبيق ذلك على مصفوفة 1-0 .

في البيان . للمسألة مقطع اصغري ، إنه يفصل أمرأتين في الجزء الاسفل الايسر عن ثلاثة رجال من اليمين الاعلى . لهاتين المرأتين رجل واحد للاختيار ـ إنه غير كاف . للرجال الثلاثة إمرأتان فقط (الاثنتان الأوليان) . يتوضح الشكل بالمصفوفة ، حيث :

(١) السطران ٣و٤ لايحويان عناصر غير صفرية إلا في العمود ٤ ،

(٢) الاعمدة ١ , ٢ , ٣ لاتحوي عناصر غير صفرية إلا في السطرين ١ و٢ .

عندما توجدمجموعة جزئية مكونة من k إمرأة يلائمهن أقل من k رجلاً ، فإن تناسقاً كلياً غير ممكن. نريد أن نبين أنه من أجل مصفوفات من أي حجم ، يكون ذلك هو المعيار الحاسم .

يمكن التعبير عن النتيجة باشكال متعددة مختلفة :

(١) (في *الشطرنج*) من المستحيل وضع أربعة رخوخ في مربعات لوحدان بطريقة لايمكن لرخ أن يميت رخاً آخر .

(٢) (في *الثنوية*) يمكن احتواء الوحدان في مصفوفة في أقل من أربعة خطوط . العدد الأدنى للخطوط المحتوية (أفقية ورأسية) هو ٣ ، وذلك يساوي العدد الأعلى لقُرُن الزواج .

(٣) (في *الجبر الخطي*) لكل مصفوفة لها أصفار A ذاتها ـ يمكن لأي عناصر

أخذ امكنة الوحدان ـ هي مصفوفة شاذة. محددتها تساوي الصفر.

تذكر أن المحددة مجموع $24 = 4!$ حداً. يستخدم كل حد الأسطر الأربعة والأعمدة الأربعة. بسبب وجود الاصفار في A، فان هذه الحدود الـ 24 يساوي كل منها الصفر. لذا، فالمحددة تساوي الصفر.

في هذا المثال، يمنع وجود كتلة من الاصفار قراناً كاملاً. المصفوفة الجزئية المكونة من السطرين ٣, ٤ و الاعمدة ١, ٢, ٣ هي مصفوفة جزئية من النوع 2×3 ـ إنها مكونة من اصفار بصورة كاملة. القاعدة العامة من أجل مصفوفة من النوع $n \times n$، هي: *إن وجود كتلة أصفار من النوع* $p \times q$ *يمنع قراناً إذا كان* $p+q>n$. للتمرين ٤-٣-٨ كتلة أصفار من النوع 3×3 و $n = 5$، يؤدي ذلك إلى كون محددتها صفراً. في مسألة الزواج، يمكن للنساء الثلاث أن يتزوجن، فقط، الرجلين الباقيين. إذا امكن زواج p إمرأة من $n-q$ رجلاً وكان $p > n-q$ (الامر المشابه لحالة الكتلة الصفرية حيث $p+q \geq n$) فان قراناً كاملاً غير ممكن.

المسألة الرياضية هي برهان العكس. إذا لم توجد كتلة كبيرة من الأصفار فإننا سنبرهن أنه من الممكن أن لاتكون المحددة صفراً. ***إذا كانت كل مجموعة p إمرأة يرضين p رجلاً على الاقل***، *فان القران الكامل ممكن*. إن ذلك شرط *Hall* يطبق على المجموعات من أي حجم كان: يجب أن ترضي كل امرأة رجلاً واحداً على الاقل، يجب على كل امرأتين أن يرضيا رجلين على الاقل وهكذا حتى $p = n$.

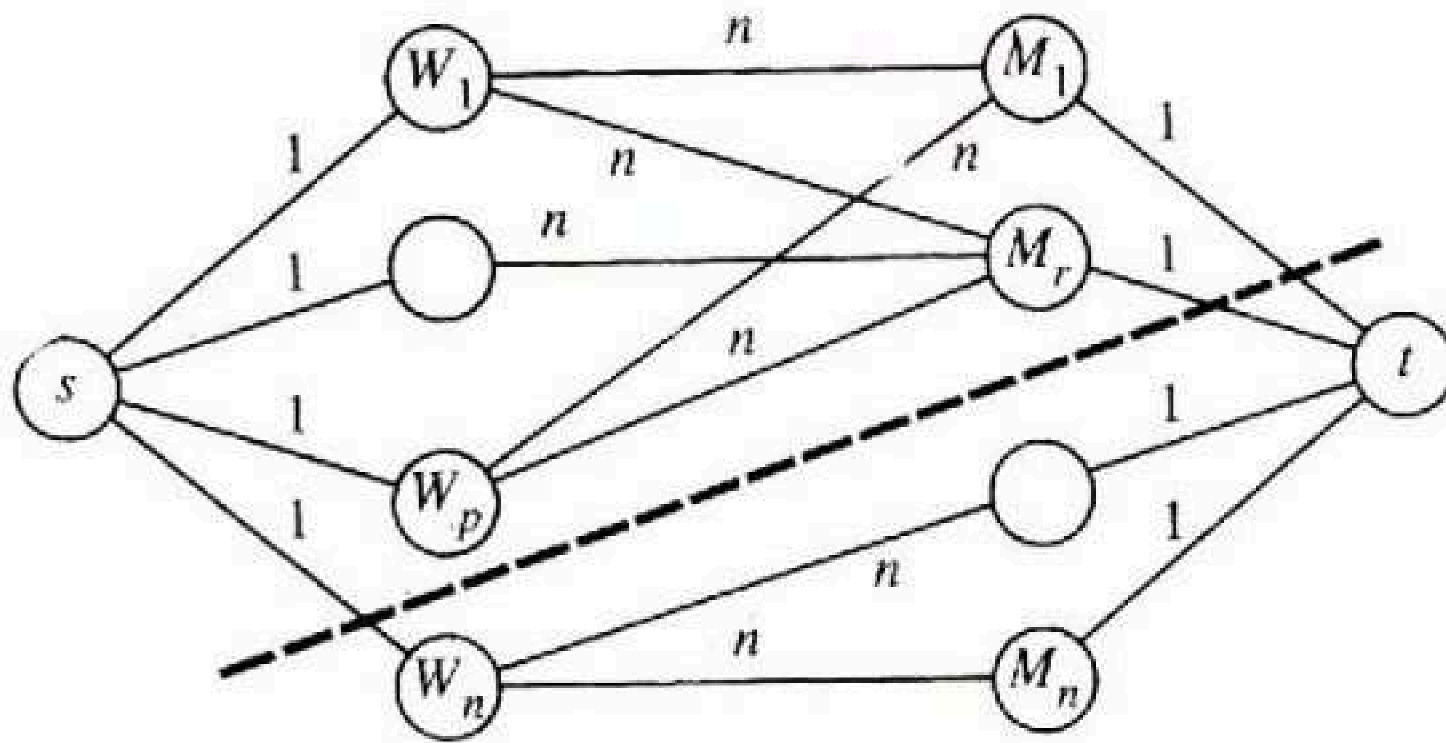
٨ ل يكون قران كامل ممكناً إذا وإذا فقط تحقق شرط *Hall*.

حتماً، إن شرط *Hall* ضروري: إذا اعجبت p إمرأة أقل من p رجلاً فان القران الكامل غير ممكن. المسألة الصعبة هو إيجاد القران ـ أو البرهان على وجود واحد ـ عندما يوافق الوضع شرط *Hall*. هناك دراسة تستخدم الاستقراء الرياضي على n من

دون تكوين المجموعة المتناسقة فعلاً . نفضل أن ننظر في مسألة الشبكات وتدفقها الاعظمي .

البرهان سهل ، إذا كانت السعات n ، بدلاً من وحدان على الاضلاع التي تلاقي الاوسط منها ـ مقابلة بذلك الوحدان في المصفوفة . تبقى السعات خارج المنبع عن يمين وعن يسار المصب، مساوية الواحد . شكل (٨-١٠) . إذا كان التدفق الاعظمي n فإن الاضلاع التي تبدأ من المنبع وتتجه نحو المصب تمتلىء ـ ويبقى التدفق موجوداً خلالها، الامر الذي يعين n زواجاً . عندما لايمكن وجود مجموعة متناسقة والتدفق الاعظم أقل من n فان هناك مقطعاً مسؤولاً عن ذلك .

قد يكون لهذا المقطع سعة أقل من n . لنفرض أن العقد $W_1,...,W_p$ من اليسار و $M_1,...,M_r$ من اليمين واقعة مع المنبع في S . السعة التي تقطع هذا المقطع هي $n-p$ اعتباراً من المنبع إلى باقي النساء و r من هؤلاء الرجال إلى المصب . لما كانت سعة المقطع أقل من n فانه لايوجد ضلع ينطلق من $W_1,...,W_p$ إلى بقية الرجال . النساء الـ p تلائم r رجلاً . لكن السعة $n-p+r$ هي أقل من n عندما يكون $p > r$.



شكل (٨ - ١٠) . سعة مقطع أقل من n ؛ تكافؤ تام غير ممكن .

عندما يكون التدفق الاعظمي أقل من n، فان ذلك يبين أن شرط *Hall* قد فشل . عندما يتحقق شرط *Hall* فان طريقة الوسم التي توجد التدفق الاعظمي توجد

في الوقت ذاته ـ من أجل هذه الشبكة الخاصة ـ قراناً كاملاً. في كل الاحوال، سنجد أكبر قران ممكن.

الشجرة الممتدة والطريقة الجشعة

من نماذج الشبكة الاساسية مسألة الطريق الاكثر قصراً ـ حيث للأضلاع *أطوال* عوضاً عن سعات ونريد معرفة أقصر طريق من المنبع إلى المصب. إذا كانت الأضلاع خطوط هاتف والأطوال هي زمن التأخر، فاننا نجد أسرع طريق لمكالمة. إذا كانت العقد حواسيب فإننا نكون أمام شبكة مثل **ARPANET** ـ التي تحل مسألة الطريق الاصغري باستمرار وآنياً تقريباً.

هناك مسألة قريبة الشبه بدون منبع ومصب، هي إيجاد ***أقصر شجرة ممتدة*** ـ مكونة من مجموعة من $n - 1$ تربط ضلعاً مجتمعة جميع عقد شبكة. عوضاً عن الاجتياز بسرعة بين عقدتين خاصتين، فاننا سنبحث الآن عن أصغر كلفة للاتصال بين جميع العقد. لاتوجد عرى، لأن تكلفة ضلع يغلق عروة غير ضرورية ـ كل مانطلبه هو طريقة للوصول من كل عقدة إلى كل عقدة أخرى. *تصل شجرة ممتدة بين العقد الخالية من العرى*، ونريد أقصر شجرة تقوم بذلك، هناك طريقة واحدة ممكنة:

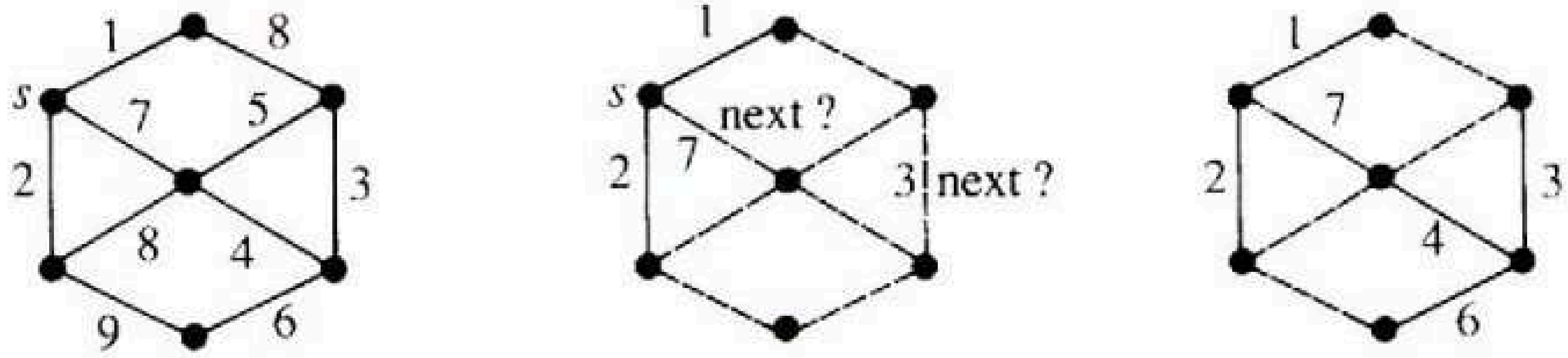
(١) *انطلق من أي عقدة s وكرر الخطوة التالية:*

اضف أقصر ضلع يصل الشجرة الحاضرة بعقدة جديدة.

في الشكل (٨-١١) تأتي أطوال الاضلاع بالترتيب 1,2,7,4,3,6 . الخطوة الأخيرة تتخطى الضلع 5 الذي يغلق الحلقة. الطول الكلي 22 ـ هل هو أصغري؟ لقد قبلنا الضلع ذا الطول 7 من قريب وأن الطريقة الثانية تصمد بصورة أكثر.

(٢) *اقبل كون الاضلاع بترتيب متزايد بالاطوال، ارفض كل ضلع يتم عروة.*

تأتي الآن الاضلاع بالترتيب التالي 1,2,3,4,6,7 (نرفض 5) إنها الاضلاع ذاتها ـ رغم أنه ليس من الضروري أن يحصل ذلك دائماً. الطول الكلي هو نفسه ـ يحصل ذلك دائماً. مسألة الشجرة الممتدة استثنائية لأنه يمكن حلها بمرور واحد.



شكل (٨-١١). شجرة ممتدة طولها 22 .

بلغة البرمجة الخطية، لقد وجدنا القرنة المثلى أولاً ! نموذج التدفق الأعظمي كان أكثر بساطة من معظم البرامج الخطية، ولكننا قد انطلقنا هناك أيضاً بتدفق واحد وحسبناه بالتدرج . لقد عملت طريقة الإفراد ولكن ليس هناك ضرورة للفت نظرنا إليها ـ لقد كانت A مصفوفة ورود ، تعاملنا معها مباشرة . لقد حلت الآن مسألة الشجرة الممتدة بصورة مشابهة للتعويض التراجعي دون خطوات خاطئة . تستخدم أي طريقة، تقريباً، طالما أنها مثلى في كل خطوة، يدعى هذا العرض العام ***الطريقة الجشعة*** .

(٣) *تنشأ شجرة من* n *عقدة، بتكرار الخطوة التالية : اختر* ***أي*** *شجرة واضف الضلع الأصغر طولاً انطلاقاً من هذه الشجرة .*

تعلق الخطوات بالترتيب المختار للاشجار . البقاء بالشجرة ذاتها هي الطريقة (١) . أخذ الأطوال مرتبة هي الطريقة (٢) . يؤدي التنقل خلال جميع الاشجار إلى طريقة جديدة (٤) . يمكن دراستها بسهولة، ولكن من أجل مسألة كبيرة، تصبح بنية المعطيات حرجة . بألف من العقد، يمكن أن يكون هناك مايقرب من مليون ضلع، وإنك لاتريد حتماً أن تتحرك خلال هذه القائمة ألف مرة .

يتم ذلك مدخلنا لنماذج الشبكات . هناك مسائل مهمة متصلة بالقران سهلة تقريباً :

١ - ***مسألة التخصيص الملائم:*** نفرض أن a_{ij} يقيس أهمية طالب التعيين i للوظيفة j . تخصيص الوظائف يستدعي جعل الاهمية الكلية في نهايتها العظمى ـ

مجموع القياسات a_{ij} يخصص الوظائف. (إذا كان كل واحد من a_{ij} صفراً أو واحداً تكون المسألة مسألة زواج).

٢- ***مسألة النقل:*** نفرض أن التكلفة ممثلة بالاضلاع c_{ij} والتزويدات في n نقطة والطلبات من n متجراً. يؤدي اختيار أرخص x_{ij} من مراكز التزويد إلى المتاجر إلى جعل التكلفة الكلية $\Sigma c_{ij} x_{ij}$ أصغرية. (إذا كان لكل تزويد وطلب العدد واحد فان ذلك مسألة تخصيص أمثلي - أي إرسال شخص واحد لكل وظيفة).

٣- ***تكاليف التدفق:*** للطرقات هنا، سعات وكذلك للتكاليف، تمزج مسألة التدفق الاعظمي مع مسألة النقل. ماهو أرخص تدفق خاضع لقيود السعة.

الجزء الفاتن في هذا الموضوع هو تطور الطريقة. عوضاً عن البرهان الثنوي للنظرية، نستخدم سعة *أول* بحث أو عمق *أول* بحث، لإيجاد التخصيص الامثل أو التدفق الارخص. إن ذلك يشبه طريقة الإفراد بالانطلاق من تدفق موات (قرنة) وإضافة تدفق آخر (للتحرك إلى القرنة التالية). تعدُّ هذه الطريقة خاصة لأن مسائل الشبكات خاصة أيضاً.

هناك أيضاً تقنية ***البرمجة الفعالة*** *Dynamic Programing* التي تبقى ذات فكرة بسيطة: إذا كان الطريق من المنبع إلى المصب مواتياً، فان كل جزء من هذا الطريق موات أيضاً. لايوجد أي شيء مفضل للإنطلاق من عقدة من هذا الطريق إلى المسقط. بني الحل بالتراجع، بطريقة القرار على مراحل متعددة. في كل مرحلة، تكون المسافة إلى المصب أصغر من المسافة الجديدة مضاف إليها مسافة قديمة:

المسافة $x\text{-}t$ = النهاية الصغرى على y لـ (المسافة $x\text{-}y$ + المسافة $y\text{-}t$)

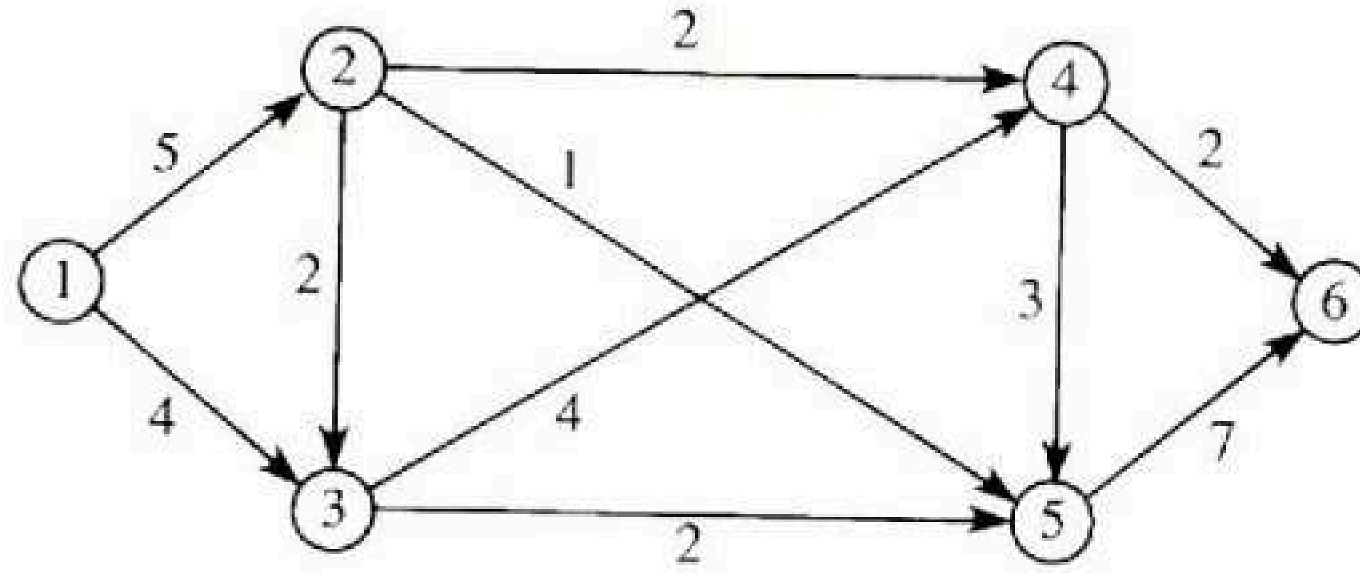
إن ذلك هو معادلة *Bellman* للبرمجة الفعالة في أبسط أشكالها.

كنت أريد مكاناً أكبر لما يتعلق بالشبكات. إنها بسيطة لكنها جذابة.

تمـاريـن

٨-٤-١ أضف في الشكل (٨-٨) العدد ٣ إلى كل سعة. أوجد بالنظر التدفق الاعظمي والمقطع الاصغري.

٨-٤-٢ أوجد التدفق الاعظمي والمقطع الاصغري من أجل الشبكة التالية:



٨-٤-٣ إذا كان بامكانك زيادة سعة كل خط من الشبكة الواردة اعلاه، ماهو التغيير الذي سيحدثة أوسع زيادة في التدفق الاعظمي ؟

٨-٤-٤ ارسم شبكة ذات خمس عقد بسعة قدرها $|i-j|$، بين العقدة i والعقدة j أوجد أكبر تدفق ممكن من العقدة 1 إلى العقدة 4 .

٨-٤-٥ العدد الاعظمي للطرقات من s إلى t بدون اضلاع مشتركة، في بيان ما، يساوي العدد الاصغري للاضلاع التي تقطع إزالتها الاتصال بين s و t . اربط ذلك بنظرية التدفق الأعظمي والمقطع الأصغري.

٨-٤-٦ أوجد مجموعة زواج اعظمية (قران كامل إذا امكن) لما يلي:
ارسم شبكة لـ B بخطوط ثخينة على أضلاع القران.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

٨-٤-٧ من أجل المصفوفة A أعلاه، ماهي الاسطر التي تخالف شرط *Hall*، بامتلاكها جميع وحدانها في قليل من الاعمدة؟ ماهي مصفوفة الاصفار الجزئية ذات النوع $p \times q$ التي تحقق $p + q > n$؟

٨-٤-٨ كم عدد المستقيمات (الافقية والرأسية) الضرورية لتغطية جميع وحدان A الواردة أعلاه؟ من أجل أية مصفوفة، فسر لماذا تكون الثنوية الضعيفة صحيحة: إذا كان k زواجاً ممكناً فإن ذلك يأخذ، على الاقل، k مستقيماً لتغطية الوحدان.

٨-٤-٩ (أ) نفرض أن كل سطر وكل عمود يحوي تماماً واحدين. برهن أن القران الكامل ممكن (بين أنه لايمكن تغطية هذه الوحدان باقل من n مستقيماً).

(ب) أوجد مثالاً لواحدين *أو* أكثر لكل سطر وكل عمود، يكون من أجله القران الكامل غير ممكن.

٨-٤-١٠ إذا حوت مصفوفة من النوع 7×7 خمسة عشر واحداً، برهن أنها تسمح بثلاثة قرن على الاقل.

٨-٤-١١ في مجموعة *لانهائية*، يمكن أن يكون القران الكامل مستحيلاً رغم أن شرط *Hall* محقق. إذا كان السطر الأول وحداناً وكذلك كل $a_{ii-1} = 1$، برهن أن أي p سطراً تحوي وحداناً في p عموداً على الاقل - ومع ذلك، فإن القران الكامل غير ممكن.

٨-٤-١٢ إذا مثل الشكل ٨ - ٨ أطوالاً عوضاً عن السعات، أوجد أقصر طريق من s إلى t وكذلك شجرة ممتدة أصغرية.

٨-٤-١٣ طبق الطريقتين (١) و (٢) لإيجاد أقصر شجرة ممتدة لشبكة التمرين (٨-٤-٢).

٨-٤-١٤ (أ) لماذاتعمل الطريقة الجشعة في مسألة الشجرة الممتدة؟

(ب) بين، بمثال، أنه من الممكن الفشل في إيجاد اقصر طريق من s إلى t وذلك بالانطلاق بأقصر ضلع.

٨-٤-١٥ إذا كانت A مصفوفة من النوع 5×5 بوحدان تحت وفوق القطر الرئيسي مباشرة، أوجد:

(أ) مجموعة أسطر بوحدان في أقل مايمكن من الأعمدة،

(ب) مجموعة من الأعمدة بوحدان في أقل مايمكن من الاسطر،

(جـ) مصفوفة جزئية باصفار من النوع $p \times q$ حيث $p + q > 5$،

(د) أربعة مستقيمات تغطي جميع الوحدان.

٨-٤-١٦ في مسألة تدفق أعظمي، تمثل المتغيرات المتراخية $w_{ij} = c_{ij} - x_{ij}$ الفروق بين السعات والتدفقات. ضع مسألة الشكل (٨-٨) بصورة برنامج خطي.

٨-٤-١٧ فسر لماذ يمكن امداد كل عقدة واقعة تحت المقطع في الشكل (٨ - ٩) بزيادة تدفق ـ رغم أن في العقدة تدفقاً مباشراً يساوي ١ .

٨-٥ نظرية اللعب ونظرية أصغر القيم العظمى

إن أفضل طريقة لشرح مصفوفة اللعب هي أن نعطي مثالاً. يوجد لاعبان وتبقى قواعد اللعب نفسها في كل دورة:

يرفع اللاعب X يداً واحدة أو يديه معاً، وبشكل مستقل يفعل كذلك اللاعب Y. إذا نفذا الامر نفسه فان Y يربح عشرة دولارات. أما إذا نفذا قرارين مختلفين فان X هو الذي يربح - عشرة دولارات إذا رفع يداً واحدة وعشرين دولاراً إذا رفع يديه. يمكن تسجيل الربح الصافي لـ X بالمصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} -10 & 20 \\ 10 & -10 \end{bmatrix} \begin{matrix} Y \text{ يد واحدة من} \\ Y \text{ يدان من} \end{matrix}$$

يد واحدة by X   يدان by X

إذا فكرت لحظة فانك تتوصل إلى فكرة مبدئية لافضل طريقة . من الواضح أن X سوف لن يفعل الشيء نفسه دائماً وإلا سوف يقلده Y وبالتالي يربح كل شيء . كذلك لايمكن لـ Y أن يستمر بطريقة واحدة وإلا فان X سوف يفعل العكس . يجب على كلا اللاعبين أن يستخدم *طريقة مختلطة* . بالاضافة إلى ذلك ، يجب أن يكون الاختيار عند كل دورة مستقل تماماً عن الدورات السابقة . وإلا ، فإذا كان هناك نمط معين في اللعب فان اللاعب الآخر سوف يلاحظ ذلك ويستفيد منه . كذلك الطريقة التي تقول : «استمر بالاختيار نفسه طالما أنك تربح وغير اختيارك عندما تخسر» هي بالواضح خاطئة . فبعد فترة من اللعب ، سوف يعرف منافسك ماذا عليه أن يتوقع .

هذا يدع اللاعبين يجريان الحسابات التالية : يمكن أن يقرر X بأنه سيرفع يداً واحدة باحتمال مقداره x_1 ويرفع يديه باحتمال مقداره $x_2 = 1 - x_1$. في كل مرة ، يكون القرار عشوائياً. كذلك الامر بالنسبة إلى Y الذي نرمز لاحتماليه بـ y_1 و $y_2 = 1 - y_1$. لقد رأينا أنه ينبغي أن لايكون أحد هذه الاحتمالات مساوياً الصفر أو الواحد ، وإلا فان المنافس سوف يعدل وضعه وفقاً لذلك ويربح . في الوقت ذاته ، ليس الأمر واضحاً بأن الاحتمالات يجب أن تكون مساوية 1/2 ، حيث سوف يخسر Y عشرين دولاراً غالباً . (سوف يخسر عشرين دولاراً في ربع الوقت وعشرة دولارات في ربع آخر ويربح عشرة دولارات في نصف الوقت ـ متوسط الخسارة ٥ , ٢ دولاراً وهو أكثر مماهو ضروري) . لكن كلما زاد Y تحركاً نحو رفع يديه كلما زاد X تحركاً نحو رفع يد واحدة .

المسألة الرئيسية هي *إيجاد توازن* . هل هناك خطة مختلطة بين y_1 و y_2 بحيث لو استخدمت بشكل متناسق من قبل اللاعب Y لما ترك أي مزية للاعب X ؟ بشكل

مشابه، هل يمكن أن يختار اللاعب X الاحتمالين x_1 و x_2 بحيث يضع اللاعب Y في وضع لا يجد فيه مبرراً للتحرك وفق خطته؟ عندما يحصل مثل هذا التوازن، إن وجد، فان متوسط ربح اللاعب X سوف يكون قد وصل إلى **نقطة سرجية**: إنها القيمة العظمى بالنسبة إلى X والقيمة الصغرى بالنسبة إلى Y. إيجاد النقطة السرجية يعني إيجاد «حل» لمسألة اللعب.

يمكن النظر لحسابات X كما يلي: إنه يركب عموديه بالوزنين x_1 و $1 - x_1$ لينشىء عموداً جديداً. لنفرض أنه يستخدم الوزنين 3/5 و 2/5 فينتج العمود:

$$\frac{3}{5}\begin{bmatrix} -10 \\ 10 \end{bmatrix} + \frac{2}{5}\begin{bmatrix} 20 \\ -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

مهما كان الامر الذي سيفعله Y مقابل هذه الخطة فانه سوف يخسر دولارين.

في كل دورة منفردة يكون صافي الربح عشرة دولارات أو عشرين دولاراً ولكن إذا رفع Y يداً واحدة، بشكل دائم، فانه سيربح عشرة دولارات في $\frac{3}{5}$ المدة ويخسر عشرين دولاراً في $\frac{2}{5}$ المدة وهذا يعني أن متوسط خسارته دولاران. وإذا رفع Y يديه أو اختار خطة مختلطة بأي نسبة فان خسارته تبقى دولارين.

هذا لا يعني أن جميع الخطط أمثلية بالنسبة لـ Y! إذا كان كسولاً ويستمر برفع يداً واحدة فان X سوف يغير وسيربح عشرين دولاراً. عندئذ، سوف يغير Y ثم X مرة ثانية. وفي النهاية، إذا فرضنا أنهما ذكيان، فان Y وكذلك X سوف يستقر رأيهما على خليط أمثلي. هذا يعني أن Y سوف يركب سطريه بالاوزان y_1 و $1 - y_1$ محاولاً أن يحصل على سطر جديد صغير بقدر الإمكان:

$$y_1\begin{bmatrix} -10 & 20 \end{bmatrix} + (1 - y_1)\begin{bmatrix} 10 & -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 - 20y_1 & -10 + 30y_1 \end{bmatrix}.$$

الخلط الصحيح يجعل المركبتين متساويتين: $10 - 20\, y_1 = -10 + 30\, y_1$ وهذا يعني أن $y_1 = 2/5$. بهذا الاختيار، تكون كل من المركبتين مساوية 2، ويصبح السطر

الجديد مصفوفة [2 2] . لذا **بهذه الخطة لن يخسر Y أكثر من دولارين.** فقد جعل Y خسارته العظمى في نهايتها الصغرى ، واصغر النهايات العظمى هذه تساوي أكبر النهايات الصغرى التي وجدت بشكل مستقل لـ X . *إن قيمة اللعبة* هي $mini\ max = max\ min = \$2$.

مثل هذه النقطة السرجية جديرة بالملاحظة لأنها تعني أن X يلعب خطته الثانية خلال $\frac{2}{5}$ الوقت ، رغم أن هذه الخطة تعطيه فرصة ربح ٢٠ دولاراً. بالوقت ذاته ، سيكون Y مجبراً على تبني خطة خاسرة ـ يتمنى أن يتماشى مع X ، لكن ، بدلاً من ذلك ، فإنه يستخدم الاحتمالين العكسيين $2/5$ و $3/5$. بامكانك أن تتأكد من أن X سيربح عشرة دولارات بتواتر مقداره $9/25 = 3/5 \times 3/5$ ويربح عشرين دولاراً بتواتر $4/25 = 2/5 \times 2/5$ ويخسر عشرة دولارات بالتواتر الباقي $12/25$. كما هو متوقع ، يعطيه ذلك متوسط ربح يساوي دولارين .

يجب أن نذكر هنا غلطة من السهل حدوثها . القول بأن الخلط الصحيح للأسطر يعطي سطراً عناصره متساوية ، غير صحيح دائماً . لنفرض أنه يسمح لـ X أن يلعب خطة ثالثة تالية ، يرفع فيها ثلاث أيد ويربح ستين دولاراً عندما يرفع Y يداً واحدة و ثمانين دولاراً عندما يرفع Y يديه . تصبح مصفوفة الربح :

$$A = \begin{bmatrix} -10 & 20 & 60 \\ 10 & -10 & 80 \end{bmatrix}.$$

سيختار X الخطة الجديدة كل مرة ؛ سيعطي الاحمال الآتية للاعمدة : $x_1 = 0$ ، $x_2 = 0$ ، $x_3 = 1$ (ليس عشوائياً على الاطلاق) وسيكون ربحه الاصغر ستين دولاراً . بالوقت ذاته ، يتطلع Y للتركيبة أسطر تكون أصغر مايمكن . وسيختار ، دوماً ، السطر الاول وستكون خسارته العظمى ستين دولاراً . بذلك ، يبقى $maximin = minimax$ ، لكن النقطة السرجية تقع عالية في القرنة .

يبدو أن القاعدة الصحيحة هي خليطة مثلى لأسطر Y حيث تظهر قيمة اللعبة، فقط، (كما كان الامر في حالة 2 $ و 60 $) في الاعمدة التي استخدمت فعلاً من قبل X . بشكل مشابه: بخليطة مثلى لأعمدة لـ X ستظهر هذه القيمة نفسها التي ظهرت في تلك الاسطر التي دخلت ضمن خطة Y المثلى ـ تعطي الاسطر الأخرى قيمة أعلى ولكن Y يتجنبها. تقابل هذه القاعدة تماماً شرط حالة التراخي الاضافي في البرمجة الخطية.

نظرية أصغر القيم العظمى Minimax thearen

تشبه مصفوفة اللعب العامة مثالنا البسيط مع اختلاف واحد مهم: للاعب X، n من الإمكانات يختار أحدها للتحرك ولـ Y، m من الإمكانات. تبقى مصفوفة الربح A كما هي كلما تكررت اللعبة، لها m سطراً و n عموداً. يمثل العنصر a_{ij} مقدار مايحصل عليه اللاعب X عندما يختار الخطة j ويختار Y الخطة i. يعني العنصر السالب دفعة سالبة وهذا يعني ربحاً للاعب Y . النتيجة تبقى ***لعبة شخصين بمجموع صفري***؛ فما يخسره لاعب يربحه آخر. ولكن وجود توازن سرجي ليس أمراً واضحاً.

كما هو ظاهر في المثال، فإن اللاعب X حر في اختيار أي خطة مختلطة $x = (x_1,...,x_n)$. هذا الخليط هو دائماً متجه احتمالات؛ الأعداد x_i غير سالبة ومجموعها يساوي الواحد. تعطي هذه المركبات تواتر الخطط الـ n الخالصة والمختلفة. وفي كل تكرار، ينبغي على اللاعب أن يقرر اختيار أحدها بوسيلة عشوائية ـ تستخدم هذه الوسيلة لتكوين خطة i بتواتر مقداره x_i . على اللاعب Y أن يأخذ قراراً مشابهاً: فهو يختار المتجه $y = (y_1,...,y_m)$ حيث $y_i \geq 0$ و $\Sigma y_i = 1$، وهي تعطي التواترات في خليطة خططه الخاصة.

لايمكننا أن نتنبأ، بنتيجة دورة واحدة من اللعبة، أنها عشوائية. على كل حال، في المتوسط، نجد أن تركيب الخطة j للاعب X مع الخطة i للاعب **Y** سيحدث باحتمال

مقداره $y_i x_j$ ـ حاصل ضرب الاحتمالين منفصلين. عندما يحصل ذلك، فإن الربح يكون a_{ij}. وبذا، فإن الربح المتوقع في هذاالتركيب الخاص هو $a_{ij} x_j y_i$ *والربح الكلي المتوقع في كل دورة من اللعبة هو* $\Sigma\Sigma a_{ij} x_j y_i$. نود أن نؤكد مرة ثانية أنه يمكن لأي واحد من العناصر a_{ij} أن يكون سالباً؛ قواعد اللعبة هي نفسها بالنسبة للاعبين X و Y، والاعداد a_{ij} هي التي تحدد من يربح اللعبة.

يمكن كتابة الربح المتوقع بسهولة برموز المصفوفات: فالمجموع المضاعف $\Sigma\Sigma a_{ij} x_j y_i$ ماهو إلا yAx نتيجة للضرب المصفوفي:

$$yAx = \begin{bmatrix} y_1 & \dots & y_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ : & : & & : \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ : \\ x_n \end{bmatrix} = a_{11} x_1 y_1 + \dots + a_{mn} x_n y_m$$

المقدار yAx هو الربح الكلي وهو مايريد اللاعب X أن يجعله أعظمياً بينما يود اللاعب Y جعله أصغرياً.

مثال ١ لنفرض أن المصفوفة A هي مصفوفة الوحدة من النوع $n \times n$ ؛ $A = I$ لذا، يكون مقدار الربح $y I x = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$، وليس من الصعب توضيح اللعبة: يأمل X أن يكتشف اختيار Y، وفي هذه الحالة، سيربح مبلغاً مقداره $a_{ii} = \$1$. في الوقت ذاته، يحاول Y أن يتهرب من X. وهكذا، فليس عليه أن يدفع شيئاً. عندما يختار X العمود i ويختار Y سطراً مختلفاً j فإن الربح $a_{ij} = 0$. إذا اختار X واحدة من خططه أكثر من غيرها فانه يمكن لـ Y أن يتهرب أكثر فأكثر؛ لذا، فإن الخليط الامثل هو $x^* = (1/n, 1/n, \dots, 1/n)$. بشكل مشابه، لايمكن لـ Y أن يزيد في التركيز على خطة معينة فيكتشفها X . ولذا، فإن اختياره الامثل سيكون، أيضاً، باحتمالات متساوية مجموعها الواحد، $y^* = (1/n, 1/n, \dots, 1/n)$. احتمال اختيار كل منهما الخطة i هو $(1/n)^2$ والمجموع على مثل هذه التراكيب هو الربح المتوقع للاعب X. القيمة الكلية

للعبة هي n مرة المقدار $(1/n)^2$ أي $1/n$ وهو مايمكن التأكد منه من خلال :

$$y^* A x^* = [1/n \ldots 1/n]\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \cdot & \\ & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/n \\ : \\ 1/n \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{n}.$$

وكلما ازدادت n كلما ازدادت فرصة Y للتهرب.

لاحظ أن المصفوفة المتناظرة $A = I$ لم تضمن أن تكون اللعبة عادلة. في الحقيقة، الوضع الصحيح هو عكس ذلك تماماً: إنها المصفوفة التناظرية التخالفية $A^T = -A$، هي التي تعني أن اللعبة عادلة تماماً. إن مصفوفة كهذه تقابل اللاعبين بقرارات متطابقة، إذ إن اختيار خطة j من قبل اللاعب X واختيار خطة i من قبل اللاعب Y تجعل X يربح مبلغاً مقداره a_{ij}، كما أن اختيار j من قبل Y و i من قبل X يجعل Y يربح المبلغ نفسه (لأن $a_{ji} = -a_{ij}$). يجب أن تكون الخطتان المثليان x^* و y^* متطابقتين ويجب أن يكون الربح المتوقع $y^* A x^* = 0$. إن قيمة اللعبة عندما يكون $A^T = -A$، هي الصفر. ولكن، يبقى من الضروري إيجاد الخطة.

مثال ٢

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

تعني هذه المصفوفة أن كلاً من X و Y يختار عدداً واقعاً بين 1 و 3 واللاعب الذي يختار الرقم الاصغر يربح 1 $ (إذا اختار X العدد 2 و اختار Y العدد 3 فإن الربح $a_{32} = 1$، أما إذا اختارا العدد نفسه فيكون الوضع على القطر الرئيسي ولايربح أي واحد منهما). من الواضح أنه لن يختار أحد اللاعبين خطة تتضمن 2 أو 3 وإلا فان اللاعب الآخر سيكون تحته مباشرة. ولذا، فإن الخطة الخالصة $x^* = y^* = (1,0,0)$ هي المثلى - كلا اللاعبين يختار 1 كل مرة - وقيمة اللعبة هي $y^* A x^* = a_{11} = 0$.

مما يجدر ذكره أن المصفوفة التي تترك جميع القرارات دون تغيير ليست هي مصفوفة الوحدة ولكنها المصفوفة E التي كل عنصر فيها يساوي 1 . إن اضافة مضاعف لـ E إلى مصفوفة الربح ، $A + \alpha E$ ـــــ A ، يعني ، ببساطة ، أن اللاعب X يربح كمية اضافية مقدارها α كل مرة وأن قيمة اللعبة تزيد بمقدار α ولكن ، ليس هناك سبب لتغيير x^* و y^* .

والآن ، لنعد إلى النظرية العامة واضعين أنفسنا في البداية مكان X . لنفرض أنه يختار الخطة المختلطة $x = (x_1, ..., x_n)$ ، عندئذ ، سوف يلاحظ Y تلك الخطة ويختار y الذي يؤدي إلى أقل دفع ممكن yAx : X سوف يحصل على $min_y\, yAx$. أي لاعب ذكي X سيختار متجهاً x^* (ربما لايكون وحيداً) ***يجعل هذه القيمة الصغرى اعظمية*** . بهذا الاختيار ، يضمن X ربحاً لايقل عن :

$$\min_y yAx^* = \max_x \min_y yAx. \qquad (١)$$

ولايمكنه أن يتوقع ربحاً أكثر من ذلك .

سيقوم اللاعب Y بعمل معاكس لأية واحدة من خططه المختلطة y ، عليه أن يتوقع أن X سيكتشف المتجه الذي يؤدي للقيمة العظمى للدالة yAx (١) . لذا ، فإن Y سيختار الخطة المختلطة y^* التي ***تجعل هذه القيمة العظمى اصغرية*** ويضمن أن لن يخسر أكثر من :

$$\max_x y^* Ax = \min_y \max_x yAx. \qquad (٢)$$

ولن يتوقع Y أن يفعل شيئاً أفضل .

آمل أن تكون قد لاحظت ماستكون عليه النتيجة الرئيسية إن كانت صحيحة . نريد أن يكون المقدار (١) الذي يضمن لـ X ربحه مطابقاً للمقدار (٢) الذي يرضى Y

---

(١) لايمكن أن يكون ذلك x^*. إذا تبنى Y خطة حمقاء فان X قادر على أن يحصل على أكثر مما تضمن له العلاقة (1) . تفرض نظرية اللعب أن اللاعبين أذكياء .

أن يخسره. عندئذ، ستؤدي الخليطة x^*, y^* إلى نقطة توازن سرجية، وتكون اللعبة قد حلت: X يمكن أنّ يخسر، فقط، حينما ينحاز عن الخطة x^* و Y يمكن أن يخسر، فقط، حينما ينحاز عن y^*. إن وجود النقطة السرجية هذه قد أثبتت من قبل ڤون نيومان *Von Neumanm* وقد عرف ذلك باسم نظرية *اصغر النهايات العظمى* والتي تنص على مايلي:

٨م لكل مصفوفة A من النوع $m \times n$، يتحقق التساوي بين أصغر النهايات العظمى، على جميع الخطط، وأكبر النهايات العظمى، أي:

$$\max_x \min_y yAx = \min_y \max_x yAx \quad (٣)$$

هذه الكمية هي قيمة اللعبة. إذا وُصل إلى القيمة العظمى الواقعة في الطرف الايسر عند x^* ووُصل إلى القيمة الصغرى في الطرف الايمن عند y^* فإن هاتين الخطتين مثليان وتؤديان إلى نقطة سرجية لايريد أحد أن يغادرها.

$$y^* Ax \le y^* Ax^* \le yAx^* \quad \text{لكل } x \text{ و } y \quad (٤)$$

عند النقطة السرجية تكون x^*، على الاقل من جودة أي نقطة أخرى x (إذ إن $y^*Ax \le y^*Ax^*$). بشكل مشابه سيدفع اللاعب الثاني أكثر ببقائه في y^*. تماماً، كما في نظرية الثنوية، يمكن أن نبدأ بمتراجحة ذات اتجاه واحد $maximin \le minimax$. ليس ذلك سوى تركيب لتعريف x^* مع تعريف y^*.

$$\max_x \min_y yAx = \min_y yAx^* \le y^* Ax^* \le \max_x y^* Ax = \min_y \max_x yAx. \quad (٥)$$

هذا يعني، فقط، أنه إذا كان X متأكداً من أنه سيربح على الاقل، α وأن Y متأكد من أنه لن يخسر أكثر من β، فمن الضروري أن يكون $\alpha \le \beta$. كان انجاز ڤون نيومان البرهان على أن $\alpha = B$ وهذه هي نظرية أصغر القيم العظمى. إنها تعني أن المساواة

يجب أن تتحقق من خلال (٥)، وأن خاصة النقطة السرجية (٤) تستنتج منها في التمرين (٨-٥-١٠).

بالنسبة لنا، الشيء المبهر في البرهان هو أنه يستخدم *تماماً الرياضيات المستخدمة في نظرية البرمجة الخطية*. بشكل حدسي، يكون الامر، غالباً، واضحاً إذ إن X و Y يلعبان دورين «مترافقين» وكلاهما يختار الطرائق من المجموعة المواتية لمتجهات الاحتمال $x_i \geq 0$ و $\Sigma x_i = 1$ و $y_i \geq 0$ و $\Sigma Y_i = 1$. الشيء المذهل أنه حتى ڤون نيومان *Von Neumann* لم يدرك في الحال أن النظريتين تعنيان الشيء نفسه. (لقد برهنت نظرية *mini max* عام ١٩٢٨م، وقد ابتدأت البرمجة الخطية عام ١٩٤٧م، وقد نشر *Gale , Kuhn , Tucker* البرهان الأول للثنوية عام ١٩٥١م ـ معتمدين، على كل حال، على مذكرات ڤون نيومان *Von Neumann* ؟) وقد ظهر برهانه في المجلد الذي ابرز فيه دانتزك *Dantzig* تكافؤ البرامج الخطية مع مصفوفة اللعب، وهكذا، فإننا نعكس الترتيب التاريخي باستنتاج نظرية *mini max* من الثنوية.

باختصار، يمكن اثبات نظرية *minimax* كما يلي: ليكن $b = (1,....,1)^T$ المتجه العمود المكون من m من الوحدان و c هو المتجه السطري المكون من n واحداً. لنأخذ بعين الاعتبار البرنامجين الخطيين التوافقيين:

(P) إيجاد النهاية الصغرى لـ $c\,x$ شرط $x \geq 0$، $A\,x \geq b$

(D) إيجاد النهاية العظمى لـ $y\,b$ شرط $y \geq 0$ و $yA \leq c$

لكي نطبق الثنوية، علينا أن نتأكد من أن كلاً من المسألتين مواتية، لذا، إذا كان ذلك ضرورياً، فاننا نضيف α إلى جميع عناصر A. إن هذا التغيير لايؤثر على الخطط المثلى للعبة إذ أن كل ربح يزداد بمقدار α وكذلك أصغر النهايات العظمى وأكبر النهايات الصغرى. بالنسبة للمصفوفة الناتجة التي نرمز لها بـ A، يكون $y = 0$

ملائما في المسألة المرافقة وتكون كل قيمة كبيرة لـ x ملائمة في المسألة الاصلية .

تضمن نظرية الثنوية في البرمجة الخطية وجود متجهين x^* و y^* ملائمين يحققان $cx^* = y^*b$. وبما أن b و c مكونان من وحدان، لذا، فإن $\sum x_i^* = \sum x_i^*$ إذا كان هذا المجموع يساوي θ فان القسمة على θ تجعل المجموع مساوياً الواحد *وتكون الخطتان المختلطتان الناتجتان* x^*/θ و y^*/θ *مثليان*. من أجل أي خطتين أخريين x و y ، يتحقق :

$Ax^* \geq b$ يؤدي إلى $yAx^* \geq yb = 1$ و $y^*A \leq c$ يؤدي إلى $y^*Ax \leq cx = 1$

النقطة الرئيسية هي كون $y^*Ax^* \leq 1 \leq y^*Ax$. بالقسمة على θ ، نجد أنه لايمكن للاعب X أن يربح أكثر من $1/\theta$ مقابل الطريقة y^*/θ، ولايمكن للاعب Y أن يخسر أقل من $1/\theta$ ضد x^*/θ. باختيار هاتين الطريقتين، يتحقق $maximin = minimax = 1/\theta$.

هذا يكمل النظرية، لكن السؤال الطبيعي جداً يبقى بدون اجابة : ماهي الالعاب العادية المكافئة «لالعاب مصفوفة»؟ ***هل الشطرنج والبريدج والبوكر تتلائم مع نظرية نيومان Neumann*** ؟

يبدو لي أن الشطرنج لايتلائم مع ذلك تماماً وذلك لسببين . أولاً، لاتحوي خطة القطع البيض على الحركة الاولى فقط، لكنها يجب أن تضمن قراراً حول كيفية الرد على كل حركات القطع السود ثم كيف يكون الرد على استجابتها الثانية وهكذا حتى نهاية اللعبة . توجد بدائل عديدة عند كل خطوة، لذا للاعب X بلايين الخطط الخالصة وينطبق ذلك أيضاً على منافسه . لذا، فإن m و n كبيران بشكل لايمكن تحديده . بالاضافة إلى ذلك، فانني لاأرى دوراً للمصادفة . إذا امكن للابيض أن يجد خطة رابحة أو إذا امكن للاسود أن يجد خطة انسحاب ـ لم يكن من الممكن لأي واحدة منهما أن توجد ـ فسيؤدي ذلك إلى انهاء لعبة الشطرنج بصورة فعلية . من الطبيعي أنه يمكن للعبة أن تستمر إلا أن المتعة ستختفي .

خلافاً للعبة الشطرنج، فإن البريدج يحوي على شيء من المخادعة، من ذلك تقرير ماسيعمله في حيلة ما . لذا، فهي تعد لعبة مصفوفية . لكن m و n كبيران جداً. ربما يمكن تحليل جزء منفصل من اللعبة للحصول على طريقة مثلى . الامر ذاته صحيح من أجل البيسبول(كرة القاعدة)، عندما يحاول كل من الرامي وحامل العصى أن يخدع أحدهما الآخر في اختيار الضربة . (أو يمكن لمتلقي الكرة محاولة معرفة متى سيباغته العداء مدعياً رمية خارجية؛ لايمكنه عمل ذلك في كل مرة دون التقدم للقذف وإلا سيكون هناك تواتر أمثل ـ يتعلق بهدف العداء وبالوضع القائم). يمكن ، أيضاً ، عزل جزء من هذه اللعبة وتحليله .

لعبة *البلاك جاك* ليست مصفوفية (على الاقل، في الكازيونات) لأن دوُر اللعب تتبع في ذلك قواعد ثابتة . عندما وجد صديقي *Ed Thorp* طريقة رابحة ونشرها ـ أدى ذلك إلى تغيير قواعد اللعب في لاس فيغاس *Las Vegas* وكانت وصيته متعلقة كلياً بالمحافظة على مراقبة الورق المكشوف . لايوجد في ذلك عناصر صدفة . لذا، لاتوجد خليطة خطط x^* .

توجد كذلك ***لعبة مأزق السجين*** *Prisoner Dilemma* حيث يلقى القبض على شريكين في جريمة . يقدم إليهما العرض ذاته . اعترف وأنت حر، شرط أن لايعترف شريكك (يحصل الشريك، عندئذ، على عشر سنوات سجن) . إذا اعترف الشريكان فان كلاً منهما يحصل على ست سنوات سجن . إذا لم يعترف أي منهما فانه لايمكن التحقق إلا من جريمة صغيرة (سنتان لكل منهما) . ماهو العمل ؟ اغراء الاعتراف ضخم جداً ، رغم أن كل منهما متعلق بالآخر فان بامكانهما الاصرار على أقوالهما . هذه اللعبة ليست ذات مجموع صفري؛ يمكن لكل منهما أن يخسر .

الشكل المثالي للعبة معتادة يمكن أن تكون مصفوفية هي لعبة ***البوكر*** ***Poker*** ، فالخداع فيها أساسي، ولكي تكون حقيقية، يجب أن تكون غير قابلة للتنبؤ . يجري قرار الخداع بصورة عشوائية، إذا قبلت دعوى نظرية اللعب الأساسية وهو كون

خصمك ذكياً. (إذا وجد اسلوباً يربح فيه). تتعلق الاحتمالات المواتية والمعاكسة للخداع بالاوراق المكشوفة وبقيمة الرهن. بالفعل عدد البدائل الكبير يجعل إيجاد خطة مثلى مطلقة x^* امراً غير قابل للتطبيق. رغم ذلك، فان على لاعب البوكر الماهر أن يحاول الاقتراب بقدر مايمكنه من x^*، يمكننا أن نحسب ذلك، بدقة، إذا قبلنا التبسيط الشديد التالي للعبة:

قد يكون لدى اللاعب X ولد أو ملك باحتمالين متساويين بينما يحصل اللاعب Y على ملكة. بعد نظر اللاعب X على مافي يده، يمكنه أن يغلق أوراقه ويستسلم ويخسر الدولار الذي وضعه مسبقاً أو يمكنه أن يراهن بدولارين آخرين. إذا راهن اللاعب X فان اللاعب Y إما أن يغلق أوراقه ويستسلم ويخسر الدولارالذي وضعه مقدماً أو يقرر متابعة خصمه ويضع دولارين ليرى فيما إذا كان X يخادعه. في هذه الحالات، يربح صاحب الأوراق الاعلى قيمة الدولارات الثلاثة التي راهن بها خصمه.

حتى في هذه اللعبة البسيطة فإن «الخطة الخالصة» ليست واضحة بصورة تامة ومن المفيد كتابتها كما يلي. لـ Y احتمالان لأنه يتجاوب، فقط، مع اللاعب X:

(١) إذا راهن X وجمع Y أوراقه.

(٢) إذا راهن X ونظر Y باوراقه وراهن على ثلاثة دولارات.

فإن لدى X اربع خطط بعضها منطقي والبعض الآخر احمق:

(١) يراهن بـ 2 $ اضافيين على ملك ويلقي أوراقه على ولد.

(٢) يراهن في كلا الحالين (مخادعاً).

(٣) يغلق اوراقه في كل من الحالين، ويخسر 1 $.

(٤) يغلق أوراقه عندما يأتيه ملك ويراهن عندما يأتيه ولد.

تحتاج مصفوفة الربح إلى قليل من الصبر لحسابها:

$a_{11} = 0$ لأن X يخسر دولاراً في نصف الوقت مع الولد ويربح مع الملك (Y يغلق اوراقه).

$a_{21} = 1$ لأن X يخسر دولاراً واحداً في نصف الوقت ويربح ثلاثة دولارات في النصف الآحر من الوقت. (Y يحاول خداعه رغم أن لدى X ملكاً).

$a_{12} = 1$ لأن X يرد و Y يغلق أوراقه (تنجح الخديعة).

$a_{22} = 0$ لأن X يربح ثلاثة دولارات مع الملك ويخسر ثلاثة دولارات مع الولد (تفشل الخديعة).

الطريقة الثالثة تخسر دوماً دولاراً والرابعة غير ناجحة أيضاً:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

الطريقة المثلى في هذه اللعبة من أجل X هي خداع في نصف الزمن،

$x^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0,0)$ وعلى الخاسر Y أن يختار $y^* = (1/2, 1/2)$. قيمة هذه اللعبة هي 50 سنتاً.

إن ذلك خاتمة غريبة لهذا الكتاب، بتعليمك لعب نسخة مخففة من البوكر. ومع ذلك، فإنني أظن أن للبوكر مكانه الخاص في الجبر الخطي وتطبيقاته. آمل أن تكون قد سررت بهذا الكتاب.

تمارين

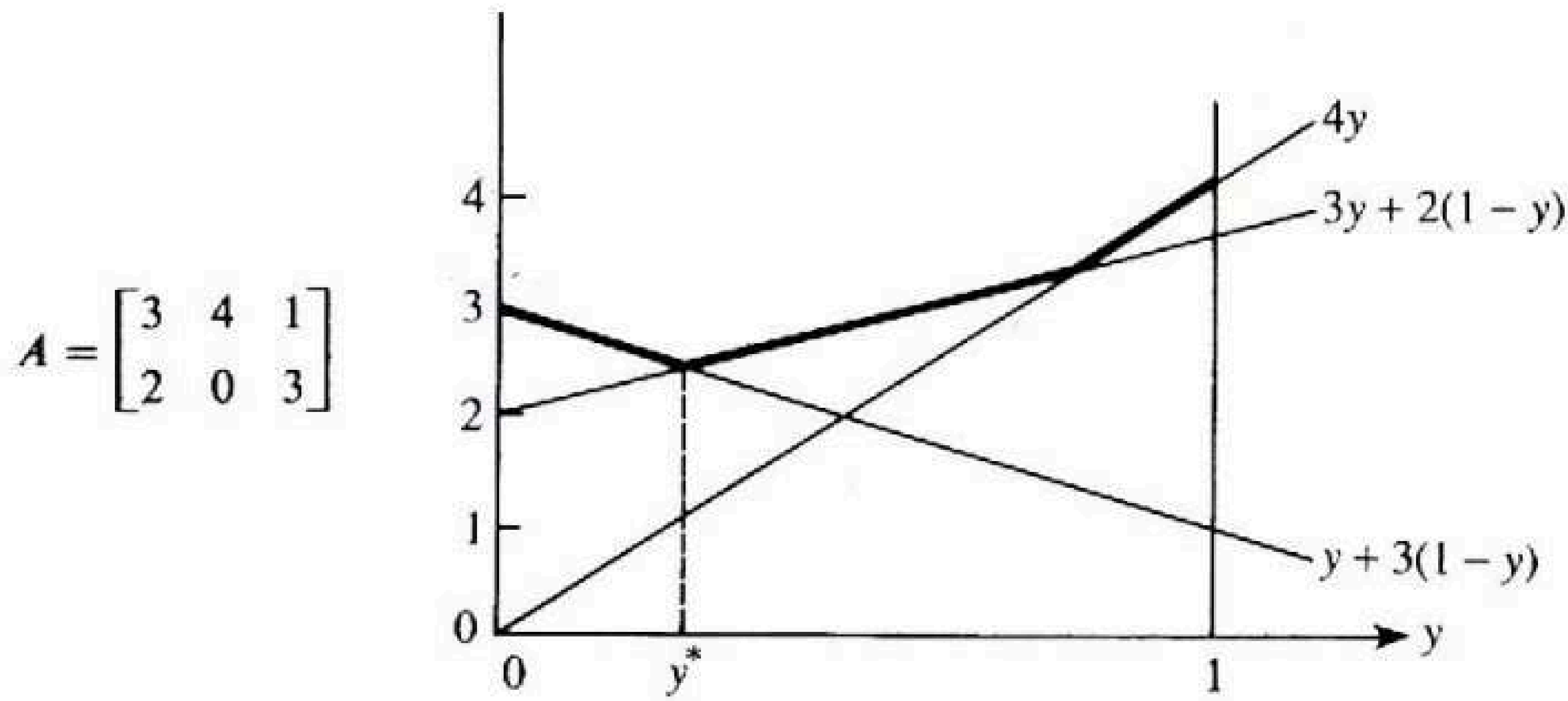
٨-٥-١ كيف تتأثر الخطط المثلى في اللعبة الاصلية إذا ازدادت العشرون دولاراً إلى سبعين دولاراً وكم هي قيمة هذه اللعبة (متوسط ربح X) ؟

٨-٥-٢ بمصفوفة الربح $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$، اشرح حساب X لأكبر نهاياته الصغرى

وكذلك حساب Y لأصغر نهاياته العظمى. أي الخطتين x^* و y^* تعتبر أمثلية ؟

٨-٥-٣ إذا كان العنصر a_{ij} هو الأكبر في سطره والأصغر في عموده، لماذا يختار X دائما العمود j ويختار Y دائماً السطر i (دون اعتبار لعناصر المصفوفة الأخرى) ؟ بين أن التمرين السابق يتضمن مثل هذا العنصر، ثم كون مصفوفة A بدون واحد.

٨-٥-٤ أوجد الخطة المثلى لـ Y باعطاء أحمال لأسطر A مثل y، $1-y$ وارسم جميع المركبات الثلاث. سيركز X على المركبة العظمى (الخط الاسود) وعلى Y تصغير هذه القيمة العظمى. ماهي y^* وكم هو ارتفاع اصغر القيم العظمى (المستقيم المنقط)؟



٨-٥-٥ بالمصفوفة A ذاتها، أوجد الخطة المثلى لـ X وبين أنه يستخدم فقط العمودين (الأول والثالث) اللذين يلتقيان عند اصغر قيمة عظمى في الشكل.

٨-٥-٦ أوجد كلاً من الخطتين وكذلك قيمة اللعبة إذا كان:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

٨-٥-٧ لنفرض أن $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. أي حملين $1 - x_1$ و x_1 يؤديان إلى عمود من الشكل $[u \quad u]^T$ وأي حملين $1 - y_1$ و y_1 يعطيان للسطرين كي يؤدي ذلك إلى سطر جديد $[v \quad v]^T$ ؟ بين أن $u = v$.

٨-٥-٨ أوجد x^* و y^* وكذلك قيمة v من أجل :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

٨-٥-٩ أحسب مايلي :

$$\min_{\substack{y_i \geq 0 \\ y_1 + y_2 = 1}} \max_{\substack{x_i \geq 0 \\ x_1 + x_2 = 1}} (x_1 y_1 + x_2 y_2).$$

٨-٥-١٠ وضح كلاً من المتراجحات الواردة في (٥) ثم عندما تحولها نظرية *minimax* إلى معادلات، استنتج (بالكلمات من جديد) معادلات النقطة السرجية (٤).

٨-٥-١١ بين أن $x^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0)$ و $y^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ هما خطتان مثليان بالنسبة للعبة البوكر وذلك بحساب $y^* A x$ وَ $y A x^*$ والتحقق من الشروط (٤) بالنسبة للنقطة السرجية.

٨-٥-١٢ هل بُرهن أنه لاتوجد خطة في لعبة الشطرنج تربح دائماً بالنسبة للاسود ؟ اعتقد أن هذا معلوم فقط عندما يقوم اللاعبان بحركتين معاً. لو كان للاسود خطة رابحة فإن بإمكان الأبيض أن يقدم الحصان ويؤخره ثم يتابع خطته مما يؤدي إلى النتيجة المستحيلة أن اللاعبين سيربحان معاً.

٨-٥-١٣ إذا اختار X عدداً أولياً وبالوقت ذاته، خمن Y هذا العدد بين فردي أو

زوجي (بربح أو خسارة مقدارها دولار واحد) من منهما له ميزة على الآخر؟.

٨-٥-١٤ إذا كان X مهاجماً يختار هجوماً أو امراراً للكرة وكان Y قائد الدفاع حيث يمكنه أن يتولى الدفاع ضد هجوم أو امرار، لنفرض أن التصفية مقدرة باليرد هي

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 6 & -6 \end{bmatrix}$$

(الصف الأول: دفاع ضد هجوم، الصف الثاني: دفاع ضدامرار)

امرار هجوم

ماهي الخطة المثلى ومعدل الكسب في كل لعبة؟

ملحق (أ)

التحليل وفق القيمة الشاذة والمعكوس الكاذب

لقد احتفظنا بالتحليل المصفوفي الثالث الضخم لهذا الملحق، إنه يضاف إلى LU الناتج عن الحذف و QR الناتج عن التقويم (غاوس وغرام شمبدت). لم يربط هذا التحليل بأي أسم وقد عرف بالرمز SVD الذي هو الحروف الأولى من *Singular value decomposition*. نريد وصفه وبرهانه ومناقشة تطبيقاته التي هي كثيرة في ازدياد.

يرتبط SVD بقرب مع تحليل القيمة الذاتية - المتجه الذاتي لمصفوفة متناظرة: $A = Q \Lambda Q^T$. تقع هنا القيم الذاتية على قطر المصفوفة Λ. ومصفوفة المتجهات الذاتية Q *قائمة*: $Q^T Q = I$. ذلك لأنه يمكن اختيار المتجهات الذاتية لمصفوفة متناظرة، متعامدة نظامية. إن ذلك غير صحيح من أجل كثير من المصفوفات ومن أجل المصفوفات المستطيلة مدعاة للسخرية. لكن، إذا تركنا Q في اليسار و Q^T في اليمين شرط أن تكونا أي مصفوفتين *قائمتين* - ليس من الضروري أن تكون احداهما منقول الأخرى - فإن التحليل يصبح ممكنا. علاوة على ذلك، فإن المصفوفة القطرية (لكنها مستطيلة) الواقعة في الوسط يمكن جعلها غير سالبة. يرمز لها عادة بـΣ ولعناصرها الموجبة بـσ أيضا إنها $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$. إنها ***القيم الشاذة*** لـ A وإنها تشغل المواضع الـ r الأولى من القطر الرئيسي لـΣ وإن r هي رتبة A.

أساس العمل بالمصفوفات المستطيلة هو ، دائما بصورة تقريبية، النظر في AA^T و A^TA.

تحليل القيمة الشاذة : يمكن تفريق أي مصفوفة A بالصورة :

$A = Q_1 \Sigma Q_2^T =$ (قائمة) (قطرية) (قائمة).

أعمدة $Q_1 (m \times m)$ هي المتجهات الذاتية لـ AA^T وأعمدة $Q_2 (n \times n)$ هي المتجهات الذاتية لـ A^TA. القيم الشاذة 1 لـ r الواقعة على قطر Σ $(m \times n)$ هي الجذور التربيعية للقيم الذاتية غير الصفرية لكل من AA^T و A^TA.

ملاحظة ١ : من أجل مصفوفة معرفة إيجابيا، يطابق هذا التحليل $Q \Lambda Q^T$. من أجل مصفوفة غير معرفة، تصبح أي قيمة ذاتية سالبة في Λ موجبة في Σ . لذا، ستكون Q_1 مختلفة عن Q_2. من اجل مصفوفات مركبة، Σ تبقى حقيقية لكن Q_1 و Q_2 تصبحان واحديتين (التركيب مشابه للتعامد). وهكذا تكون $A = U_1 \Sigma U_2^H$.

ملاحظة ٢ : تعطي أعمدة Q_1 و Q_2 أسسا متعامدة نظامية للفضاءات الجزئية الأساسية الأربعة :

الأعمدة الـ r الأوائل من Q_1 : فضاء أعمدة A

الأعمدة الـ m-r الأواخر من Q_1 : الفضاء الصفري اليساري لـ A

الأعمدة الـ r الأوائل من Q_2 : فضاء أسطر A

الأعمدة الـ n-r الأواخر من Q_2 : الفضاء الصفري لـ A

ملاحظة ٣ : يختار التحليل *SVD* هذه الأسس بطريقة خاصة فعلا. إنها أكثر من متعامدة نظامية. إذا ضربت A ***بعمود من*** Q_2، ***فإنه ينتج مضاعفا لعمود من*** Q_1. ينتج ذلك مباشرة عن $AQ_2 = Q_1\Sigma$، ينظر الى ذلك كضرب عمود في كل مرة.

ملاحظة ٤ : ستكون الرابطة بين AA^T و A^TA صحيحة إذا كان القانون $Q_1 \Sigma Q_2^T$

صحيحا . لذا من السهل أن ترى :

(١) $A^TA = Q_2\Sigma^T\Sigma Q_2^T$ وبشكل مشابه $AA^T = (Q_1\Sigma Q_2^T)(Q_2\Sigma^T Q_1^T) = Q_1\Sigma\Sigma^T Q_1^T$

من العلاقة الأولى ، نجد أن Q_1 يجب *أن تكون مصفوفة المتجهات الذاتية* لـ AA^T . مصفوفة القيم الذاتية هي الوسطى وهي $\Sigma\Sigma^T$ – التي هي من النوع $m \times m$ ويقع على قطرها $\sigma_r^2 ,..., \sigma_1^2$. من الثانية ، نجد أن Q_2 يجب *أن تكون مصفوفة المتجهات الذاتية* لـ A^TA . للمصفوفة القطرية $\Sigma^T\Sigma$ الأعداد $\sigma_r^2 ,..., \sigma_1^2$ ذاتها لكنها من النوع $n \times n$.

هذه التحقيقات سهلة ولكنها لا تبرهن التحليل *SVD* . البرهان ليس صعبا ولكن من الممكن استخلاصه من الأمثلة والتطبيقات .

مثال ١ (A قطرية)

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال ٢ (A عمود واحد ، فقط)

$$A = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [1]$$

A^TA هنا من النوع 1×1 بينما AA^T من النوع 3×3 . لكل منهما القيمة الذاتية 9 (جذرها التربيعي 3 واقع في Σ) . القيمتان الذاتيتان الصفريتان لـ AA^T تتركان بعض الحرية للمتجهين الذاتيين الواقعين في العمودين ٢ , ٣ من Q_1 . لقد قمنا باختيار يجعل هذه المصفوفة قائمة .

مثال ٣ (A قائمة مسبقا)

إما $A = QII$ أو $A = IIQ$ أو $A = (QQ_2)I\,Q_2^T$ أيضا ، لكن $\Sigma = I$ حتما .

مثال ٤ (A مصفوفة ورود و $AA^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ حيث $\lambda = 3,1$) .

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} /\sqrt{6} \\ /\sqrt{2} \\ /\sqrt{3} \end{matrix}$$

$$/\sqrt{2} \quad /\sqrt{2}$$

تطبيقات التحليل SVD

نريد أن ننتقي قليلا من التطبيقات المهمة بعد أن نؤكد نقطة أساسية . يعدُّ التحليل *SVD* رائعاً بالنسبة للحسابات المستقرة عدديا . السبب الأول هو كون Q_1 و Q_2 مصفوفتين قائمتين : إنهما لا يغيران أبدا من طول أي متجه ، لأن $\|Qx\|^2 = x^TQ^TQx = \|x\|^2$ ، الضرب بـ Q لا يخرب التدريج . مثل هذه القضية لا يمكن أن تحصل من أجل المضروب الآخر Σ ، يمكننا أن نضرب بعدد كبير σ أو (أكثر عمومية) التقسيم على عدد صغير σ ونغمر الحاسوب . لكن Σ تبقى جيدة بقدر *الإمكان* . إنها تظهر ، تماما ، ماهو الكبير وماهو الصغير ، وإن التيسير السهل لرؤية هذه المعلومات هو السبب الثاني لشعبية هذا التحليل . سنعود إلى ذلك في التطبيق الثاني .

١ – *عملية التصوير* : لنفرض أن قمرا صناعيا أخذ صورة ويريد إرسالها إلى الأرض . يمكن لهذه الصورة أن تحوى *1000 X 1000* من المربعات الصغيرة لكل منها لون محدد . يمكننا أن ننظم الألوان في صف من الأسود إلى الأبيض ونعيد مليون عدد . من المفضل

وضع المعلومات الأساسية في مصفوفة من النوع *1000 X 1000* وإرسال ذلك، فقط.

لنفرض أننا نعرف التحليل *SVD*. المفتاح هو في القيم الشاذة (في Σ). بصورة نموذجية، بعضها ذو شأن والبعض الآخر صغير جدا. إذا احتفظنا بـ 60 وأهملنا 940، فإننا نرسل فقط ما يقابل 60 عمودا لـ Q_1 و Q_2. الأعمدة الأخرى الـ940 تضرب في $Q_1 \Sigma Q_2^T$ بالأعداد الصغيرة σ التي هي مجهولة. بالفعل *يمكننا صنع هذا الضرب المصفوفي كجداء عمود بسطر :*

$$Q_1 \Sigma Q_2^{\mathrm{T}} = u_1 \sigma_1 v_1^{\mathrm{T}} + u_2 \sigma_2 v_2^{\mathrm{T}} + \ldots + u_r \sigma_r v_r^{\mathrm{T}}. \qquad (٢)$$

المتجهات u هنا أعمدة في Q_1 والمتجهات v أعمدة في Q_2 (v_1^T هو السطر الأول في Q_2^T). كل مصفوفة هي مجموع r من المصفوفات ذوات الرتبة (١). إذا احتفظنا بستين عنصراً فإننا نرسل *60 X 2000* عوضا عن مليون.

إن الصورة أخاذة فعلا كلما حوت أكثر فأكثر من القيم الشاذة. في البدء، لا ترى شيئا ثم فجأة ترى كل شيء.

٢ - *الرتبة الفعلية* : لم نتردد في الفصل الثاني في تعريف رتبة مصفوفة. إنها عدد الأسطر المستقلة أو بصورة مكافئة عدد الأعمدة المستقلة. يصعب تقرير ذلك في الحساب. طريقتنا الأصلية هي تعداد المحاور وذلك عمل صحيح في حساب صحيح. في حساب حقيقي، يمكن أن يكون هناك خداع - لكن نبذ محور صغير لا يعطي الجواب. لننظر في :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon & 1 \\ \varepsilon & 1+\varepsilon \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{bmatrix} \varepsilon & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{bmatrix} \varepsilon & 2\varepsilon \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

رتبة الأولى واحد رغم أن تدوير الخطأ من المحتمل أن يؤدي إلى محور

آخر. يمكن أن يكون المحوران صغيرين، كم يمكننا أن نتجاهل منها؟ للثانية محور صغير ولكننا لا يمكننا أن ندعي أن أسطرها غير ذات شأن. للثالثة محوران ورتبتها تساوي ٢ ولكن رتبتها الحقيقية يجب أن تكون (١).

ننتقل إلى قياس أكثر استقراراً للرتبة. الخطوة الأولى هي استخدام A^TA أو AA^T المتناظرتين ولكنهما مشتركتان بالرتبة ذاتها مع A. قيمهما الذاتية - مربعات القيم الشاذة - ليست مضللة. بناء على دقة المعطيات، نقرر، مع تسامح مثل 10^{-6} ونعد القيم الشاذة الواقعة فوق ذلك - أن تلك الرتبة هي الحقيقية. في الأمثلة الواردة أعلاه، إنها تساوي، دوماً، الواحد إذا كان ε صغيرا. من المقبول أن تكون غير متصلة عندما تجتاز القيمة الشاذة العدد 10^{-6}، لكن ازعاج ذلك أقل بكثير من التعريف الجبري المعتاد - الذي هو غير متصل عند $\sigma = 0$ ولا يسمح بالمراقبة.

٣ - ***التحليل القطبي*** : يساوي كل عدد مركب جداء عدد غير سالب r بعدد $e^{i\theta}$ واقع على دائرة الوحدة : $z = r\,e^{i\theta}$. إن ذلك هو التعبير عن z «بالاحداثيات القطبية». إذا اعتبرنا هذين العددين مصفوفتين من النوع 1×1، فإن r يقابل مصفوفة شبه معرفة ايجابيا ويقابل $e^{i\theta}$ مصفوفة قائمة. بدقة أكثر، لما كان $e^{i\theta}$ مركباً ويحقق $e^{-i\theta}e^{i\theta} = 1$ فإنه يكون مصفوفة *واحدية* من النوع 1×1 : $U^HU = I$. نعتبر المرافق المركب مثل المنقول من أجل U^H.

يمتد التحليل *SVD* إلى أي مصفوفة مهما كان حجمها.

يمكن تحليل أي مصفوفة حقيقية مربعة إلى $A = QS$، حيث Q ***قائمة*** و S ***متناظره وشبه معرفة إيجابيا***. إذا كانت A قابلة للعكس فإن S معرفة إيجابيا.

للبرهان، ما علينا إلا أن ندخل $Q_2^TQ_2 = I$ في وسط التحليل *SVD* :

$$A = Q_1 \Sigma Q_2^{\mathrm{T}} = (Q_1 Q_2^{\mathrm{T}})(Q_2 \Sigma Q_2^{\mathrm{T}}). \quad (٣)$$

العامل $S = Q_2 \Sigma Q_2^T$ متناظر وشبه معرف (لأن Σ كذلك) العامل $Q = Q_1 Q_2^T$ مصفوفة قائمة (لأن $Q^{\mathrm{T}}Q = Q_2 Q_1^{\mathrm{T}} Q_1 Q_2^{\mathrm{T}} = I$). في الحالة المركبة، تصبح S هرميتية بدلا من متناظرة وتصبح Q واحدية بدلا من قائمة. في الحالة القابلة للعكس، تكون Σ معرفة وكذلك S.

مثال تحليل قطبي : $A = QS$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

مثال تحليل قطبي عكسي : $A = S'Q$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

في الترتيب العكسي، تبين التمارين لماذا تتحول S لكن Q تبقى كما هي. كل من S و S' متناظرتان ومعرفتان إيجابيا لأن A هذه قابلة للعكس.

ملاحظة: يمكننا أن ننطلق من $A = QS$ والتراجع لإيجاد التحليل SVD. لما كانت S متناظرة لأنها تساوي $Q_2 \Sigma Q_2^T$، إن ذلك تحليل القيم الذاتية – المتجهات الذاتية المعتاد $Q \Lambda Q^{\mathrm{T}}$ بتغيير بالرموز فقط. إن :

$$A = QS = Q\, Q_2 \Sigma Q_2^T = Q_1 \Sigma Q_2^T$$

هو التحليل SVD. تاريخيا، استخدم التحليل القطبي لأنه أكثر شهرة – لكنني اعتقد أن تحليل القيمة الشاذة أساسي أكثر.

تطبيق $A = QS$: أهم استخدام للتحليل القطبي هو في الميكانيك المتصل (وأكثر حداثة في المكننة). في كل تشوه، من المهم فصل التمدد عن الدوران، ويقع ذلك، تماما، عندما تنتهي QS. المصفوفة القائمة Q دوران ومن الممكن أن تكون انعكاسا. للمصفوفة المتناظرة S القيم الذاتية $\sigma_r ,..., \sigma_1$ التي هي معاملات التمدد (أو معاملات الانضغاط). التقطير الذي يظهر هذه القيم الذاتية هو الاختيار الطبيعي للمحاور - المسماة ***محاور رئيسية***، كما في القطع الناقص في البند (٦-٢). إنها المصفوفة S التي تتطلب عملا في المادة، وتختزن قدرة مرونة.

نلاحظ أن S^2 هي A^TA التي هي متناظرة ومعرفة ايجابيا عندما تكون A قابلة للعكس. S هي الجذر التربيعي لـ A^TA وهي مصفوفة متناظرة معرفة ايجابيا، و Q هي AS^{-1}. بالفعل، **يمكن** لـ A *أن تكون مستطيلة ما دامت* A^TA *معرفة ايجابيا*. (ذلك هو الشرط الذي احتفظنا به وهو أنه من الواجب أن تكون أعمدة A مستقلة). وفي الترتيب المعاكس $A = S'Q$، تكون المصفوفة S' الجذر التربيعي لـ AA^T وهي متناظرة ومعرفة ايجابيا.

٤ - *أصغر المربعات* : لقد وجدنا في الفصل الثالث حل المربعات الأصغرية لنظام مستطيل $Ax = b$. إنه يأتي من المعادلة النظامية $A^TA\bar{x} = A^Tb$، إلا أنه كان هناك متطلب ثابت على A. يجب أن تكون أعمدتها مستقلة، والرتبة كانت n. إذا لم يكن ذلك، فإن A^TA غير قابلة للعكس ولا يمكن تعيين $\bar{x}$ - يمكن إضافة أي متجه من الفضاء الصفري إلى $\bar{x}$. يمكننا الآن تكملة ما قدمه الفصل الثالث باختيار $\bar{x}$ «مفضل» لكل نظام خطي $Ax = b$.

توجد أمامنا صعوبتان ممكنتان مع $Ax = b$:

(١) يمكن أن تكون الأسطر في A مرتبطة.

(٢) يمكن أن تكون الأعمدة في A مرتبطة.

في الحالة الأولى، يمكن أن لا يكون للنظام حل. يحدث ذلك عندما يكون b خارج

فضاء أعمدة A، وقد أعطى الفصل الثالث العلاج : إسقاط b على فضاء الأعمدة. عوضا عن $Ax = b$ نحل $A\bar{x} = p$. يمكن تنفيذ ذلك لأن p واقع في فضاء أعمدة A. إلا أن الحالة (٢) تظهر عقبة أخرى. إذا كانت أعمدة A مرتبطة، فإن الحل $\bar{x}$ لن يكون فريدا. علينا أن نختار حلا خاصا لـ $A\bar{x} = p$، وبجعل هذا الاختيار متلائما مع القاعدة التالية :

الحل الأمثل للنظام $A\bar{x} = p$ هو ذو الطول الأصغري.

يمكن تسمية هذا الحل الأمثل x^+. إنه اختيارنا المفضل كأفضل حل للنظام $Ax = b$ (الذي لم يكن له حل)، وأيضا للنظام $A\bar{x} = p$ (الذي كان له العديد من الحلول). الهدف هو تعيين x^+، وننطلق من أجل ذلك بمثال.

مثال ١ A مصفوفة قطرية، ذات أسطر مرتبطة وأعمدة مرتبطة أيضا :

$$A = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

تنتهي جميع الأعمدة بصفر. في فضاء الأعمدة، يكون أقرب متجة لـ $b = (b_1, b_2, b_3)$ هو $p = (b_1, b_2, 0)$. إن ذلك هو المسقط، والخطأ $(0, 0, b_3)$ متعامد مع كل واحد من الأعمدة. الأفضل أن نحل المعادلتين الأوليين، لأن المعادلة الأخيرة هي $0 = b_3$. لا يمكن اختصار خطأ هذه المعادلة، إلا أن الخطأ في المعادلتين الأوليين يمكن أن يكون صفرا :

$$A\bar{x} = p \quad \text{هو} \quad \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

نواجه الآن الصعوبة الثانية. الأعمدة مرتبطة و $\overline{x}$ ليس وحيدا. المركبتان الأوليان هما $b_1/\sigma_1 \;,\; b_2/\sigma_2$، إلا أن المركبتين الأخريين $\overline{x}_3 \;,\; \overline{x}_4$ اختياريتان تماما. لجعل $\overline{x}$ أقصر ما يمكن، نختار هاتين المركبتين صفرا. ***الحل ذو الطول الأصغري*** لـ $A\overline{x} = p$ هو x^+:

$$x^+ = \begin{bmatrix} b_1/\sigma_1 \\ b_2/\sigma_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}. \qquad (٤)$$

هذه المعادلة مهمة. إنها توجد x^+، وإنها تظهر، ***أيضا المصفوفة التي تنتج*** x^+ من b. تدعى هذه المصفوفة ***المعكوس الكاذب*** لـ A. تمثل بالرمز A^+، لذا، يكون $x^+ = A^+ b$.

استنادا إلى هذا المثال، يمكننا أن نجد أفضل حل x^+ والمعكوس الكاذب A^+ لأي مصفوفة قطرية.

إذا كان $A = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \cdot & \\ & & \sigma_r \end{bmatrix}$ فإن $A^+ = \begin{bmatrix} 1/\sigma_1 & & \\ & \cdot & \\ & & 1/\sigma_r \end{bmatrix}$ و $x^+ = A^+ b = \begin{bmatrix} b_1/\sigma_1 \\ \vdots \\ b_r/\sigma_r \end{bmatrix}$

المصفوفة A من النوع $m \times n$، بـ r من العناصر غير الصفرية σ_i. معكوسها الكاذب A^+ من النوع $n \times m$ بـ r من العناصر غير الصفرية $1/\sigma_i$. المنطقة الفارغة أصفار.

لنلاحظ أن $(A^+)^+$ هو A أيضا. إن ذلك يشبه $(A^{-1})^{-1} = A$ إلا أن A هنا غير قابلة للعكس. إذا كان لـ b المركبات $(b_1, ..., b_m)$ فإن لمسقطه p المركبات $(b_1, ..., b_r, 0...0)$. الحل الأكثر قصراً لـ $A\overline{x} = p$ هو x^+ الذي وجدناه أعلاه.

وأخيرا، يمكننا أن نمثل المصفوفة القطرية بالرمز Σ ومعكوسها الكاذب بالرمز Σ^+.

للذهاب إلى أبعد من المصفوفات القطرية، ننطلق بالحالة السهلة - حيث A قابلة للعكس. للمعادلة $Ax = b$ حل واحد وواحد فقط : $x = A^{-1} b$. *في هذه الحالة* x^+ هو x و A^{-1} هي A^+. *المعكوس الكاذب هو المعكوس ذاته عندما تكون* A *قابلة للعكس*. لنتحقق من الشرطين معا : Ax أقرب ما يمكن من b (إنه يساوي b) و x هو أقصر حل لـ $A\overline{x} = b$ (إنه الحل الوحيد عندما تكون A قابلة للعكس).

لقد وجدنا الآن x^+ في الحالة العامة. إنه أقصر حل لـ $A\overline{x} = p$، وندعي أن x^+ ***واقع دوما في فراغ أسطر*** A. لنذكر أن أي متجه $\overline{x}$، يمكن توزيعه إلى مركبة في فضاء الأسطر ومركبه في الفضاء الصفري : $\overline{x} = \overline{x}_r + \overline{x}_n$. هناك ثلاث نقاط مهمة لهذا التوزيع :

١ - مركبة فضاء الأسطر تحل $A\overline{x_r} = p$ أيضا لأن $A\overline{x_n} = 0$.

٢ - المركبتان متعامدتان وتخضعان لقانون فيثاغورس :

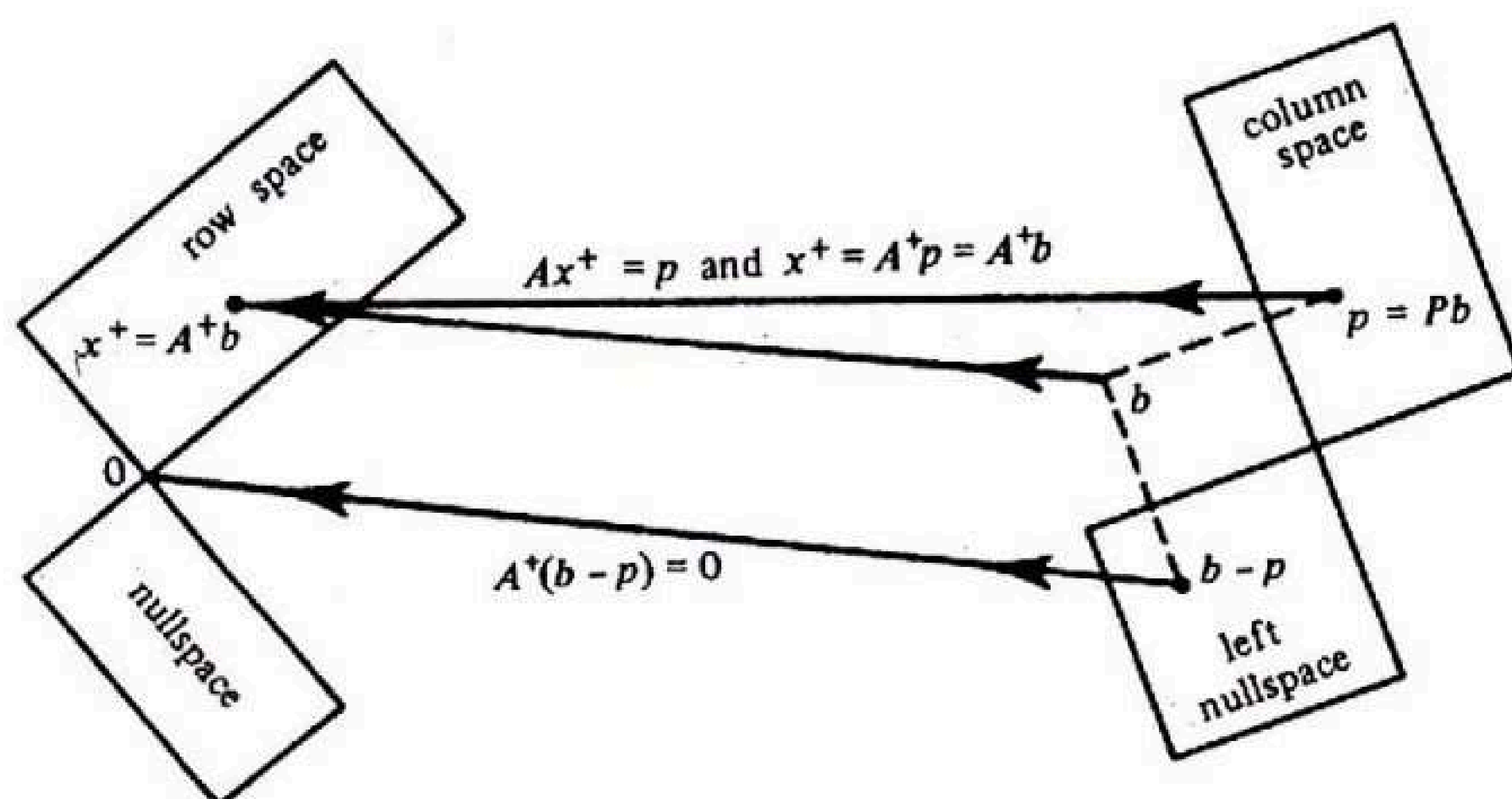
$\|\overline{x}\|^2 = \|\overline{x_r}\|^2 + \|\overline{x_n}\|^2$ لذا يكون $\overline{x}$ أقصر ما يمكن عندما $\overline{x_n} = 0$

٣ - لجميع الحلول $A\overline{x} = p$ مركبة فضاء الأسطر نفسها $\overline{x_r}$. ***هذا المتجه هو*** x^+.

الصورة المقدمة للذكرى هي الشكل (٣-٤). إنها تظهر النظرية الأساسية للجبر الخطي - ببيان كيف تأخذ A أي متجه x إلى فضائها الصفري. إنها توضح أيضا أن أي p من فضاء الأعمدة ناتج عن متجه واحد وواحد فقط من فضاء الأسطر. (إذا كان $A\overline{x_r} = p$ وكذلك $A\overline{x'_r} = p$، فإن $A(\overline{x'_r} - \overline{x'_r}) = 0$. يقع الفرق في الفضاء الصفري وكذلك في فضاء الأسطر - لذا، فإن $\overline{x_r} - \overline{x'_r}$ متعامد مع نفسه لذا يجب أن يكون صفراً). *كل ما عملناه هو اختيار المتجه* $x^+ = \overline{x_r}$ *كأفضل حل لـ* $Ax = b$ إنه أقصر حل للمعادلة الأشد قرباً من $A\overline{x} = p$.

المعكوس الكاذب مصفوفة تقلب اتجاه الشكل. إنها تنطلق بـ b وتعود الى x^+. *إنها تعكس* A *حيثما تكون* A *قابلة للعكس* - بين فضاء الأسطر وفضاء الأعمدة. يتغلب

المعكوس الكاذب على الفضاء الصفري الأيسر بأن يقذفه الى الصفر، ويهزم الفضاء الصفري باختيار $\overline{x}$ لـ x^+.



شكل (أ – ١). عمل المعكوس الكاذب A^+.

لم نبرهن، بعد، على وجود المصفوفة A^+ التي تعطى دوما x^+ – لكنها موجودة. ستكون من النوع $n \times m$، لأنها تنقل b من $\mathbf{R}^m$ إلى x^+ من $\mathbf{R}^n$. سننظر في مثال إضافي قبل إيجاد A^+ بصورة عامة.

مثال ٢ $Ax = b$ هو $-x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 18$

حل المعادلة مكون من مستو كامل. وفقا لنظريتنا، فإن على أقصر الحلول أن يقع في فضاء اسطر المصفوفة $A = [-1 \ 2 \ 2]$. مضاعف هذا السطر الذي يحقق المعادلة هو $x^+ = (-2 \ 4 \ 4)$. هناك حلول أخرى مثل $(-2, 5, 3)$ أو $(-2, 7, 1)$ أو $(-6, 3, 3)$، لكنها كلها أكثر طولا من x^+. (لكل منها مركبة غير صفرية من الفضاء الصفري). المصفوفة التي تنتج x^+ من الطرف الأيمن b، الذي هو المتجه الأقصر فعلا $[18]$، هي المعكوس الكاذب A^+. عندما تكون A من النوع 1×3 فإن المصفوفة A^+ من النوع 3×1.

$$A^+ = [-1 \quad 2 \quad 2]^+ = \begin{bmatrix} -\frac{1}{9} \\ \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A^+ [18] = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

فضاء أعمدة A^+ هو فضاء اسطر A. نقدم الآن قانونا لـ A^+ :

نفرض أن تحليل القيمة الشاذة لـ A هو $A = Q_1 \Sigma Q_2^T$، لذا، يكون المعكـوس الكـاذب لـ A هو :

$$A^+ = Q_2 \Sigma^+ Q_1^T. \qquad (٦)$$

القـيـم الـشـاذة $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ تـقـع عـلـى قـطـر Σ $(m \times n)$ وتـقـع مـعـكـوسـاتـهـا $1/\sigma_1, \ldots, 1/\sigma_r$ على قطر Σ^+ $(n \times m)$. المعكوس الكاذب لـ A^+ هو $A^{++} = A$.

لقد حوى المثال (١) الحالة القطرية، عندما كـانـت A المصفوفة Σ وكان $Q_1 = I$ $(m \times m)$ و $Q_2 = I$ $(n \times n)$. في المثال (٢) كان $Q_1 = [1]$ والقيمة الشاذة — 3 الجذر التربيعي للقيمة الذاتية لـ AA^T. يرجى ملاحظة Σ و Σ^+ في التحليلين التاليين SVD.

$$[-1 \quad 2 \quad 2] = [1][3 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$[-1 \quad 2 \quad 2]^+ = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [1] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{9} \\ \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} \end{bmatrix}.$$

يمكننا أن نتحقق مباشرة أن هذه المصفوفة A^+ تودي إلى الحل الأمثل لـ $Ax = b$.

الطول الأصغري لحل أصغر المربعات لـ $Ax = b$ هو $x^+ = A^+b = Q_2 \Sigma^+ Q_1^T b$.

البرهان : الضرب بالمصفوفة القائمة Q_1^T لا يغير الطول :

$$\|Ax - b\| = \|Q_1 \Sigma Q_2^T x - b\| = \|\Sigma Q_2^T x - Q_1^T b\|.$$

لندخل المتغير الجديد $y = Q_2^T x = Q_2^{-1} x$، الذي له طول x نفسه . لذا، فإن جعل $\|Ax-b\|$ في نهايته الصغرى مطابق لجعل $\|\sum y - Q_1^T\|$ في نهايته الصغرى . إن تلك مصفوفة قطرية ومن المعلوم أن y^+ هو المفضل . إن $y^+ = \Sigma^+ Q_1^T b$، لذا، فإن x^+ المفضل هو :

$$x^+ = Q_2 y^+ = Q_2 \Sigma^+ Q_1^T b.\blacksquare$$

لقد كان بإمكاننا أن نتحقق مباشرة من أن x^+ هذا واقع في فضاء الأسطر ويحقق $Ax^+ = p$.

انشاء التحليل SDV : لقد انتهينا من التطبيقات، لنعد الى تحليل القيمة الشاذة الذي استندت هذه التطبيقات اليه . علينا أن نبرهن أنه يمكن تحليل أي مصفوفة بالصورة $A = Q_1 \Sigma Q_2^T$، حيث Σ قطرية والمصفوفتان Q قائمتان .

لمصفوفة متناظرة مثل $A^T A$ مجموعة كاملة من المتجهات الذاتية المتعامدة النظامية x_j التي توضع في أعمدة Q_2 :

$$A^T A x_j = \lambda_j x_j \quad \text{حيث} \quad x_j^T x_j = 1 \quad \text{و} \quad x_i^T x_j = 0 \text{ for } i \neq j \qquad (٧)$$

(في الحالة المركبة تتغير A^T إلى A^H و x^T إلى x^H) لنجري الضرب الداخلي بـ x_j، فنكتشف أن $\lambda_j \geq 0$:

$$x_j^T A^T A x_j = \lambda_j x_j^T x_j \quad \text{أو} \quad \|Ax_j\|^2 = \lambda_j \qquad (٨)$$

لنفرض أن القيم الذاتية λ_r ,...., λ_1 موجبة والـ $n-r$ الباقية من Ax_j و λ_j أصفار. من أجل الموجبة، نفرض $\sigma_j = \sqrt{\lambda_j}$, $q_j = Ax_j/\sigma_j$. (تصبح الأعداد σ_r ,...., σ_1 القيم الشاذة في قطر Σ. لنلاحظ أن q_j متجهات وحدة من $\mathbf{R}^m$ استنادا إلى (٨) وإنها متعامدة فيما بينها وفق (٧):

$$q_i^T q_j = \frac{x_i^T A^T A x_j}{\sigma_i \sigma_j} = \frac{\lambda_j x_i^T x_j}{\sigma_i \sigma_j} = 0 \quad \text{لكل} \quad i \neq j. \qquad (٩)$$

يمكن توسيع المتجهات الـ q المتعامدة النظامية التي عددها r ، بطريقة غرام - شميدت، لتكوين أساس كامل متعامد - نظامي q_m ,...., q_1. إنها أعمدة Q_1. العنصر i, j في الجداء $Q_1^T AQ_2$ هو $q_i^T Ax_j$ (جداء سطر في مصفوفة في عمود)، وتعرف هذه العناصر كما يلي :

$$q_i^T Ax_j = \begin{cases} 0 & \text{اذا كان } j > r \text{ (لأن } Ax_j = 0) \\ q_i^T \sigma_j q_j & j \le r \text{ (لأن } Ax_j = \sigma_j q_j) \end{cases} \qquad (١٠)$$

لكن $q_i^T q_j = 0$ إلا عندما يكون $i = j$. إنها الوحيدة غير الصفرية في الجداء $Q_1^T AQ_2 = \Sigma$ وإنها العناصر الأولى الـ r من عناصر القطر، وهي σ_r ,...., σ_1. بما أن $Q^T = Q^{-1}$، يكون لدينا $A = Q_1 \Sigma Q_2^T$ كما هو المطلوب.

نذكر من جديد كيف تلائم المتجهات q و x هذه الفضاءات الجزئية الأساسية الأربعة لـ A. الـ r الأوائل من x قاعدة متعامدة نظامية لفضاء الأسطر والمتجهات الـ $n-r$ الباقية أساس متعامد نظامي للفضاء الصفري (عندما يكون $Ax_j = 0$). المتجهات الـ r الأوئل من q أساس متعامد نظامي لفضاء الأعمدة، والـ $m-r$ الباقية أساس

متعامد نظامي للفضاء الصفري الأيسر . طبعا ، ليس مستغربا أن تكون هذه الأسس موجودة . نحن نعلم ذلك ! ما هو خاص من أجل x و q هو أن $Ax_j = \sigma_j q_j$. تأخذ المصفوفة متجهات أساس الى متجهان اساس آخر عندما تكون الأسس صحيحة . استنادا الى قواعد تكوين المصفوفات ، عندما تطبق A على أساس في $\mathbf{R}^n$ وتعبر عن النتيجة باستخدام أساس في $\mathbf{R}^m$ ، فإن المصفوفة بالنسبة لهذين الأساسين قطرية . إنها Σ .

تمارين

أ-١ أوجد تحليل القيمة الشاذة والمعكوس الكاذب 0^+ للمصفوفة الصفرية من النوع $m \times n$.

أ-٢ أوجد تحليل القيمة الشاذة والمعكوس الكاذب لكل مما يلي :

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

أ-٣ إذا كان لمصفوفة Q ، ذات النوع $m \times n$ ، أعمدة متعامدة نظامية ، فما هو معكوسها الكاذب Q^+؟

أ-٤ (أ) احسب A^TA وقيمها الذاتية ومتجهاتها الذاتية والجذر التربيعي Sالمعرف ايجابياً إذا كانت :

$$A = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

(ب) احسب التحليل القطبي $A = QS$. إذا عرفت Q ، فاحسب الشكل العكسي $A = S'Q$.

أ-٥ ما هو حل المربعات الأصغرية ذو الطول الأصغري $x^+ = A^+b$ للنظام :

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

يمكنك أن تحسب A^+ أو تجد الحل العام لـ $A^TA\bar{x} = A^Tb$ وتختار الحل الواقع في فضاء أسطر A. تلائم هذه المسألة المستوي المفضل $C + Dt + Ez$ مع $b = 0$ عند النقطة $t = z = 0$، مع $b = 2$ عند النقطة السابقة ذاتها، مع $b = 2$ عند $t = z = 1$.

أ-٦ (أ) إذا كان لـ A أعمدة مستقلة، فإن معكوسها اليساري $(A^TA)^{-1}A^T$ $(A$ هو المعكوس الكاذب.

(ب) إذا كان لـ A اسطر مستقلة فإن معكوسها اليميني $A^T(AA^T)^{-1}$ $(A$ هو المعكوس الكاذب.

في كل من الحالتين، حقق أن $x^+ = A^+b$ واقع في فضاء الأسطر وأن $A^TAx^+ = A^Tb$.

أ-٧ إذا وزعت $A = Q_1\Sigma Q_2^{-1}$ إلى QS' (معكوس تحليل قطبي) فما هما Q و S'؟

أ-٨ هل العلاقة $(AB)^+ = B^+A^+$ صحيحة دوما من أجل المعكوسات الكاذبة؟ أعتقد لا.

أ-٩ أي تحليل مصفوفة بالصورة $A = \underline{L}\,\underline{U}$، حيث أعمدة $\underline{L}$ الـ r تولد فضاء أعمدة A وأعمدة $\underline{U}$ الـ r تولد فضاء الأسطر (البند ٣-٦) حقق القانون الصريح :

$$A^+ = \underline{U}^T(\underline{U}\,\underline{U}^T)^{-1}(\underline{L}^T\underline{L})^{-1}\underline{L}^T.$$

ارشاد : لماذا A^+b واقع، دوما، في فضاء الأسطر، بسبب وقوع $\underline{U}^T$ في المقدمة، ولماذا $A^TAA^{+T}b = A^Tb$. أي أن A^+b يحقق المعادلة النظامية؟

أ-١٠ فسر لماذا AA^+ و A^+A مصفوفتا إسقاط (لذا فهما متناظرتان). ما هو الفضاء الجزئي الأساسي الذي يجري الإسقاط عليه؟

ملحق (ب)

شكل جوردان

إذا اعطينا مصفوفة مربعة A وأردنا اختيار مصفوفة M ، بحيث تكون المصفوفة $M^{-1}AM$ تقريبا قطرية . في الحالة الأكثر بساطة ، للمصفوفة A مجموعة كاملة من المتجهات الذاتية التي تحتل أعمدة M - وهي التي تعرف بـ S شكل جوردان في هذه الحالة هو $J = M^{-1}AM = \Lambda$ ، إنه مكون كليا من كتل من النوع 1 X 1 حيث $J_i = \lambda_i$ ويكون هدفنا تكوين مصفوفة قطرية قد انجز تماما . في الحالة الأكثر عمومية والأكثر صعوبة ، تكون بعض المتجهات الذاتية مفقودة والشكل القطري غير ممكن . ستكون هذه الحالة هي التي سنهتم بها حالياً .

نعيد ذكر النظرية التي تحتاج إلى برهان :

٥ق إذا كان لمصفوفة s من المتجهات الذاتية المستقلة خطيا ، فإنها تشابه مصفوفة يمكن كتابتها على **شكل جوردان** بـ s من الكتل المربعة الواقعة على القطر :

$$J = M^{-1}AM = \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & \cdot & \\ & & J_s \end{bmatrix}.$$

لكل كتلة قيمة ذاتية واحدة ومتجه ذاتي واحد ووحدان فوق القطر :

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}.$$

اليك مثالا لمصفوفة جوردان :

$$J = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} & & \\ & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \\ & & [0] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & J_3 \end{bmatrix}.$$

للقيمة الذاتية المزدوجة $\lambda = 8$ متجه ذاتي وحيد، فقط، يقع على اتجاه الإحداثي الأول $e_1 = (1,0,0,0,0)$: نتيجة لذلك، تظهر $\lambda = 8$ ، فقط في كتلة واحدة J_1 . للقيمة الذاتية الثلاثية $\lambda = 0$ متجهان ذاتيان e_3 و e_5 وهما يقابلان كتلتي جوردان J_2 ، J_3 . إذا كان لـ A خمسة متجهات ذاتية، فإن جميع الكتل ستكون من النوع 1 x 1 وستكون J قطرية .

السؤال الرئيسي هو ما يلي : إذا كانت A مصفوفة أخرى من النوع 5 x 5 تحت أي شروط سيكون شكل جوردان المتعلق بها هو المصفوفة J نفسها؟ متى يمكن وجود مصفوفة M بحيث يكون $M^{-1}AM = J$ كأول مطلب ، أي مصفوفة مشابهة لـ A يجب أن تشترك معها بالقيم الذاتية نفسها 8,8,0,0,0 . لكن ذلك بعيد من أن يكون كافيا– المصفوفة القطرية التي عناصر قطرها القيم الذاتية هذه ليست مشابهة لـ J - وإن مسألتنا تتعلق حقا بالمتجهات الذاتية .

للإجابة عن ذلك ، نعيد كتابة العلاقة $M^{-1} A M = J$ بصورة أكثر بساطة $AM = MJ$:

$$A\begin{bmatrix} & & & & \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ & & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & & \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ & & & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 & 1 & & & \\ 0 & 8 & & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & 0 & 0 & \\ & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

لننفذ الضرب بعمود في كل مرة :

(١) $Ax_2 = 8x_2 + x_1$ و $Ax_1 = 8x_1$

(٢) $Ax_5 = 0x_5$ و $Ax_4 = 0x_4 + x_3$ و $A x_3 = 0x_3$

يمكننا الآن التعرف على الشروط التي تفرض على A . يجب أن يكون لها ثلاثة متجهات ذاتية حقيقية ، مثل ما للمصفوفة J . أحدها، وهو الموافق للقيمة الذاتية $\lambda = 8$ ، يوضع في العمود الأول من M تماما كما كان يوضع في العمود الأول من S : $Ax_1 = 8x_1$. يوضع المتجهان الآخران اللذان يسميان x_3 , x_5 ، في العمودين الثالث والخامس من M : $Ax_3 = Ax_5 = 0$. يبقى أخيرا متجهان خاصان استقرائيان هما x_2 , x_4 . نلاحظ أن x_2 ينتسب إلى **صنف متجهات** يرأسه x_1 معرف بالمعادلتين (١) . في الحقيقة x_2 هو المتجه الآخر الوحيد في هذا الصنف ، والكتلة الموافقة J_1 من المرتبة الثانية . تصف المعادلتان (٢) صنفين آخرين مختلفين، في أحدهما x_4 يتبع x_3 ويقع في الآخر x_5 وحده . الكتلتان J_2 , J_3 من النوعين 2 x 2 و 1 x 1 .

البحث عن شكل جوردان المتعلق بـ A يصبح بحثا في أصناف المتجهات هذه ، كل واحد منها يرأسه متجه ذاتي : لكل i

(٣) إما $Ax_i = \lambda_i x_i$ أو $Ax_i = \lambda_i x_i + x_{i-1}$

توضع المتجهات x_i في أعمدة المصفوفة M ويعطى كل صنف كتلة واحدة في J . الأمر الأساسي هو أن نبين كيف يمكن تكوين هذه الأصناف لأي مصفوفة A . عندئذ، إذا

لاء مت الأصناف المعادلات الخاصة (١) و (٢) فإن j هذه ستكون شكل جوردان المتعلق بـ A

اعتقد أن فكرة فيليبوف *Felippov* التي نشرت في المجلد (٢٦) من *Moscow University Vestnik* تعطي هذا التكوين بأحسن ما يمكن من البساطة والوضوح . لقد عولج الموضوع بطريقة التراجع (الاستقراء الرياضي)، انطلاقا من كون كل مصفوفة من النوع 1×1 واقعة مسبقا في شكل جوردان المتعلق بها . يمكننا أن نفرض أن البناء قد انهي لكل مصفوفة من مرتبة أدنى من n – هذه هي فرضية التراجع – عندئذ تفسر المراحل من أجل مصفوفة من المرتبة n . هناك ثلاث مراحل وبعد أن نقدم وصفا عاما لها نطبق ذلك على مثال محدد .

المرحلة الأولى : إذا فرضنا أن A شاذة ، لذا، سيكون عدد أبعاد فضاء أعمدتها $r < n$. بدراسة هذا الفضاء الصغير ، تتكفل فرضية التراجع بكون شكل جوردان ممكنا- يجب أن يكون r من المتجهات المستقلة W_i في فضاء الأعمدة بحيث يكون :

$$\text{إما} \quad Aw_i = \lambda_i w_i \quad \text{أو} \quad Aw_i = \lambda_i w_i + w_{i-1} \qquad (٤)$$

المرحلة الثانية : نفرض أن للفضاء الصفري وفضاء الأعمدة المتعلقين بالمصفوفة A ، تقاطعا عدد أبعاده p . طبعا ، كل متجه من الفضاء الصفري هو متجه ذاتي يقابل $\lambda = 1$. لذا، سيكون هناك p صنفا في المرحلة الأولى تنطلق من هذه القيمة الذاتية ، وإننا نهتم بتلك المتجهات W_i التي تأتي في نهاية هذه الأصناف . كل واحد من هذه الـp متجها واقع في فضاء الأعمدة ، لذا، كل منها تركيب لأعمدة A : $w_i = Ay_i$ من أجل متجه موافق y_i .

المرحلة الثالثة : للفضاء الصفري دوما $n - r$ بعدا . لذا بصورة مستقلة عن تقاطعه مع فضاء الأعمدة الذي عدد أبعاده p ، فإن عليه أن يحوي $n - r - p$ متجها إضافيا أساسيا z_i واقعة خارج هذا التقاطع .

لنصوغ الآن هذه المراحل معا لتقديم نظرية جوردان :

المتجهات W_i التي عددها r والمتجهات y_i التي عددها p والمتجهات z_i التي عددها $n - r - p$ تكون أصناف جوردان للمصفوفة A ، وهذه المتجهات مستقلة خطيا . إنها تكون أعمدة M ويكون $J = M^{-1} A M$ هو شكل جوردان .

إذا أردنا إعادة ترقيم هذه المتجهات باعتبارها $x_1, \ldots, x_n$ وموافقتها مع شروط المعادلتين (٣) فإن على كل y_i أن يدرج مباشرة بعد w_i الذي ينتج عنه ، إنه يتمم صنفا يكون فيه $\lambda_i = 0$. تأتي المتجهات z في النهاية القصوى ، كل واحد منها منفرد في صنفه الخاص ، وكذلك القيمة الذاتية هنا صفر لأن المتجهات z تقع في الفضاء الصفري . الكتل المتعلقة بالقيم الذاتية الصفرية أنهيت في المرحلة الأولى والكتل المتعلقة بالقيم الذاتية غير الصفرية زادت سطرا واحدا وعمودا واحدا في المرحلة الثانية وتشارك المرحلة الثالثة بكل كتلة $J_i = [0]$ من النوع 1 x 1 .

نختار الآن مثالا ، ولكي نبقى قريبين من الصفحات السابقة نختاره بالقيم الذاتية : 8,8,0,0,0

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

المرحلة الأولى: عدد أبعاد فضاء الأعمدة $r = 3$ وهو مولد بالمتجهات الاحداثية e_1, e_2, e_5 . للنظر في هذا الفضاء، نهمل الثالث والرابع من أسطر وأعمدة المصفوفة A . للمصفوفة التي بقيت القيم الذاتية 8,8,0 وينتج شكل جوردان المتعلق بها عن المتجهات :

$$w_1 = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad w_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad w_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

تقع المتجهات W_i في فضاء الأعمدة وهي تتم الصنف المقابل لـ $\lambda = 8$ وتنتقل إلى الصنف المقابل لـ$\lambda = 0$:

$$Aw_1 = 8w_1, \quad Aw_2 = 8w_2 + w_1, \quad Aw_3 = 0w_3. \qquad (٥)$$

المرحلة الثانية : يحوي فضاء A الصفري e_2, e_3 ، لذا، فإن تقاطعه مع فضاء الأعمدة مولد بالمتجه e_2 . وهكذا تكون $p = 1$. وكما هو متوقع ، يوجد صنف واحد في المعادله (٥) يوافق $\lambda = 0$. يأتي المتجه w_3 في آخر الصنف (كما كان في البدء) وإن $w_3 = A\ (e_4 - e_1)$. لذا يكون $y = e_4 - e_1$.

المرحلة الثالثة : في هذا المثال $n - r - p = 5 - 3 - 1 = 1$ والمتجه الصفري $z = e_3$ يقع خارج فضاء الأعمدة وسيولد هذا المتجه z كتلة من النوع 1×1 في J . إذا جمعنا المتجهات الخمسة ، تكون الأصناف كاملة هي :

$$Aw_1 = 8w_1, \quad Aw_2 = 8w_2 + w_1, \quad Aw_3 = 0w_3, \quad Ay = 0y + w_3, \quad Az = 0z$$

بالمقارنة مع المعادلات (١) و (٢) ، نحصل على تطابق تام - شكل جوردان المتعلق بمثالنا سيكون، تماما، المصفوفة J التي كتبناها منذ قليل . بوضع هذه المتجهات الخمسة في مواقع أعمدة M نحصل على $AM = MJ$ أو $M^{-1} A M = J$:

$$M = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

نحن واثقون، بقدر كاف، بالرياضيات (أوكسالى بقدر كاف). لذا، نهمل إنجاز الضرب $M^{-1}AM$.

في بناء فليبوف ، النقطة التقنية الوحيدة هي التحقق من استقلال كامل الفئة w_i, y_i, z_i . من أجل ذلك ، نفرض تركيبا لها يساوي الصفر :

(٦) $$\sum c_i w_i + \sum d_i y_i + \sum q_i z_i = 0.$$

لنضرب بالمصفوفة A ولنستخدم المعادلات (٤) من أجل المتجهات w_i بالإضافة إلى $Az_i = 0$ ،

(٧) $$\sum c_i \begin{bmatrix} \lambda_i w_i \\ \text{أو} \\ \lambda_i w_i + w_{i-1} \end{bmatrix} + \sum d_i A y_i = 0.$$

المتجهات Ay_i حالات خاصة من W_i واقعة في نهاية الصنف الموافق لـ$\lambda_i = 0$ ، لذا، فهي لا تظهر في المجموع الأول (لقد ضربت بالصفر في $\lambda_i w_i$). لما كان (٧) أحد تراكيب W_i ، التي كانت مستقلة وفق فرضية التراجع - إنها تزود شكل جوردان من داخل فضاء الأعمدة - فإننا نستنتج أن $d_i = 0$. لنعد إلى (٦) التي تأخذ ، عندئذ ، الصورة $\Sigma c_i w_i = -\Sigma g_i z_i$ و الطرف الأيسر واقع في فضاء الأعمدة . لما كانت المتجهات z مستقلة من هذاالفضاء ، فإن على كل g_i أن يساوي الصفر . أخيرا، نجد أن $\Sigma c_i w_i = 0$ ويؤدي استقلال W_i إلى كون $c_i = 0$.

إذا لم تكن المصفوفة الأصلية شاذة ، يمكن تطبيق المراحل الثلاث عوضا عن ذلك على $A' = A - cI$ (نختار الثابت c بحيث يجعل A' شاذه ويمكنه أن يكون أي واحدة من القيم الذاتية للمصفوفة A). تضع الطريقة المصفوفة A' بشكل جوردان $M^{-1}A'M = J'$ ، وذلك بتكوين الأصناف x_i من W_i, y_i, z_i . لذا، فإن شكل جوردان للمصفوفة A يستخدم الأصناف نفسها والمصفوفة M ذاتها :

$$M^{-1}AM = M^{-1}A'M + M^{-1}cM = J' + cI = J.$$

وهذا ينهي برهان أن كل مصفوفة A تشابه واحدة من مصفوفات جوردان J . باهمال إعادة ترتيب الكتل ، ***انها تشابه واحدة فقط مثل J*** : يوجد شكل جوردان واحد للمصفوفة A . وهكذا، فإن مجموعة المصفوفات توزع إلى عدد من الجماعات وفق الخاصة التالية : لجميع المصفوفات الواقعة في جماعة معينة، شكل جوردان واحد *وكل واحدة منها مرتبطة بالأخرى* (بما في ذلك J) *بتحويل تشابه* ، *إلا أنه* لن

تكون *مصفوفتان من جماعتين مختلفتين* ، *متشابهتين* . تكون J في كل صنف هي الأروع -إذا رغبت أن تكون المصفوفات قريبة من القطرية . بهذا التصنيف ضمن جماعات، نتوقف .

مثال

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad \text{بـ} \quad \lambda = 0,0,0,$$

مرتبة هذه المصفوفة $r = 2$ ولها متجه ذاتي واحد . ضمن فضاء الأعمدة، يوجد صنف فريد w_1, w_2 ، من المتوقع انطباقه على العمودين الأخيرين :

$$A \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{و} \quad A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0.$$

$$Aw_2 = 0w_2 + w_1 \quad \text{و} \quad Aw_1 = 0.$$

يقع الفضاء الصفري بكامله في فضاء الأعمدة وهو مولد بـ w_1 . لذا، فإن $p = 1$ في المرحلة الثانية ، والمتجه y ينتج عن المعادلة :

$$y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{التي حلها} \quad Ay = w_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

أخيرا، بوضع الصنف w_1, w_2, y في المصفوفة M :

$$M^{-1}AM = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = J, \quad \text{و} \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

تطبيق على المعادلة $du/dt = Au$. كما يجري دائما، تبسط المسألة ، بتفريق المجاهيل . يكتمل هذا التفريق عندما توجد مجموعة المتجهات الذاتية كاملة ونصل إلى $u = Sv$. أفضل تغيير متغيرات في الحالة الحاضرة هو $u = Mv$. ينتج ذلك معادلة جديدة

$Mdv/dt = AMv$ أو $dv/dt = Jv$ وهي سهلة بقدر الأحوال الواردة أدناه . إنها مرتبطة ، فقط ، بالوحدان الواقعة خارج القطر ، في كل كتلة من كتل جوردان . في المثال الوارد أعلاه مباشرة الذي له كتلة واحدة ، تأخذ المعادلة $du/dt = Au$ الصورة :

$$\begin{aligned} a &= a_0 + b_0 t + c_0 t^2/2 \\ b &= \quad\;\; b_0 + c_0 t \\ c &= \quad\quad\quad\; c_0 \end{aligned} \quad \text{أو} \quad \begin{aligned} da/d &= b \\ db/dt &= c \\ dc/d &= 0 \end{aligned} \quad \text{أو} \quad \frac{dv}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} v.$$

يحل هذا النظام ، بالعمل باتجاه الأعلى ، انطلاقا من المعادلة الأخيرة ، وستدخل قوة جديدة للمتغير t في كل خطوة . (كتلة من النوع $l X l$ لها قوة عليا مثل t^{l-1}) . الدوال الأسية للمصفوفة J ، في هذه الحالة وفي الأمثلة المقاربة من النوع $5 X 5$ هي :

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{8t} & te^{8t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{8t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad e^{Jt} = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

يمكنك أن ترى لماذا تظهر المعاملات a,b,c في الدالة الأسية الأولى . في المثال الثاني ، يمكنك تبين خمسة حلول خاصة كاملة لـ $du/dt = Au$. ثلاثة منها دوال أسية صرفة $u_1 = e^{8t} x_1 , u_3 = e^{\alpha} x_3 , u_5 = e^{\alpha} x_5$ ، كونت كما سبق من المتجهات الذاتية الثلاثة للمصفوفة A . يضم الحلان الباقيان المتجهين الذاتيين المعممين :

$$u_4 = e^{\alpha}(tx_3 + x_4) \quad \text{و} \quad u_2 = e^{8t}(tx_1 + x_2). \qquad (٨)$$

الحل الأكثر عمومية للمعادلة $du/dt = Au$ هو تركيب من الشكل $c_1 u_1 + ... + c_5 u_5$ ويطابق هذا التركيب u_0 في اللحظة $t = 0$ ، وهو من جديد :

$$c = M^{-1} u_0 \quad \text{أو} \quad u_0 = Mc \quad \text{أو} \quad u_0 = c_1 x_1 + \ldots + c_5 x_5 .$$

هذا يعني ، فقط أن $u = M \epsilon^{Jt} M^{-1} u_0$ وأن S و Λ الواقعتين في القانون القديم $Se^{\Lambda t} S^{-1} u_0$ قد استعيض عنهما بـ M و J .

تمارين

ب - ١ أوجد أشكال جوردان (بثلاث مراحل) لـ

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

ب - ٢ بين أن الحل الخاص u_2 في المعادلة (٨) يحقق $du/dt = Au$ تماما بسبب الصنفين $Ax_1 = 8x_1, Ax_2 = 8x_2 + x_1$.

ب - ٣ من أجل المصفوفة السابقة B ، استخدم $Me^{Jt}M^{-1}$ لحساب الدالة الأسية e^{Bt} . وقارن ذلك بمتسلسلة القوى $I + Bt + (Bt)^2/2! + ...$.

ب - ٤ برهن أن كل كتلة من كتل جوردان J_i مشابهة لمنقولها $J_i^T = P^{-1} J_i P$، وذلك باستخدام مصفوفة المبادلة P بوحدان واقعة على القطر الثانوي (من اليسار الأدنى الى اليمين الأعلى) . برهن أن كل مصفوفة مشابهة لمنقولها .

ب - ٥ أوجد، بالمعاينة، شكلي جوردان للمصفوفتين :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

ب - ٦ أوجد شكل جوردان J والمصفوفة M لـ A و B (لـ B القيم الذاتية $1,1,1,-1$) :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

ما حل $du/dt = Au$ وما هو e^{At} ؟

ب - ٧ افرض أن $A^2 = A$. برهن أن على شكل جوردان لهذه المصفوفة $J = M^{-1}AM$ أن يحقق $J^2 = J$. لما كانت كتل القطر تبقى متفرقة، فإن ذلك يؤدي إلى $J_i^2 = J_i$ لكل كتلة ، بين، بالحساب المباشر، أن J_i يمكن أن تكون فقط كتلة من النوع 1 x 1 ‏[0] أو $J_i = [1]$. ينتج عن ذلك أن A تشابه مصفوفة قطرية مكونة من أصفار ووحدان .

ملاحظة : إن ذلك حالة نموذجية من آخر نظرية لنا في هذا الكتاب : *تكون المصفوفة قابلة للتقطير إذا وإذا، فقط، كان الجداء* $(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) \ldots (A - \lambda_p I)$ *غير الحاوي لأي تكرار للأعداد* λ *، مساوياً الصفر*. إحدى الحالات القصوى هي مصفوفة بقيم ذاتية مختلفة؛ تقول نظرية كايلي - هاملتون الواردة في التمرين (٥-٦-٢٣) إنه بـ n من العوامل $A - \lambda I$ نصل دوماً إلى الصفر . الحالة القصوى الأخرى هي مصفوفة الوحدة ، إنها قابلة للتقطير أيضاً ($p = 1$ و $A - I = 0$) . المصفوفة غير القابلة للتقطير $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ لا تحقق $A = 0$ بل $A^2 = 0$ معادلة بجذور مكررة .

ملحق (ج)

أنظمة حاسوب للجبر الخطي

لقد كان هدفنا جعل هذا الكتاب مفيدا للقارىء ونريد أن نقوم بخطوتين إضافيتين. في الأولى، نحدد مصادر برامج للجبر الخطي العددي. الشيء الجميل في هذا الجزء من الرياضيات، هو كونه، بالوقت ذاته، عمليا وبديعا - وتمكن دراسته بالطريقة الرياضية ذاتها. جزء من وجهته العملية هو تجربة الجبر الخطي في العمل. لقد ترجم الجانب النظري الى برامج للحساب العلمي، وسنشير الى مجموعة من الإمكانات - من مكتبة البرامج الكبيرة لأنظمة يمكن الحصول عليها مجاناً بالبريد الإلكتروني وللبرامج المعدة بصورة خاصة بحيث يمكن جعلها جزءً من مقرر الجبر الخطي التطبيقي.

الخطوة الثانية هي اقتراح بعض التجارب الأساسية التي تتماشى مع هذه الأنظمة. نفضل ذلك على ابتكار أمثلة قياسية لمعادلات خطية أو مسائل المربعات الأصغرية أو مصفوفات ماركوف، وقد حاولنا عرض مسائل جديدة - سيكون الطالب أول من يجيب عليها. ليكن من المعلوم أنه لم يعط أي حل أو لا يمكن اعطاؤه. إذا كتبت لي عن تجارب شيقة سأكون شاكرا جدا.

أحد الأنظمة الأساسية هو ***LINPACK***. لقد حل محل آلاف الأنظمة الجزئية، بعضها جيد وبعضها غير ذلك، وهي التي وجدت في بيئات حسابية متعددة. لقد

خصص هذا النظام ليكون مستقلا عن الجهاز، فعالا وبسيطا صمم من قبل *Dongarra, Bunch, Moler and Stewart* وكان دليل استخدامه ممتازا. الأمر الذي حث على تطور هذه الأنظمة هو نجاح النظام ***EISPACK*** في حل مسائل القيم الذاتية؟ بفضل النظام *EISPACK*، أصبحنا نعرف قيمة كتابة البرمجة الرياضية الجيدة.

في ***LINPACK***، تخزن جميع المصفوفات مباشرة في ذاكرة الحاسوب. في كثير من الأجهزة، يمكن تخزين مصفوفات كاملة من مرتبة تقدر بعدة مئات ومصفوفات حزامية من مرتبة تقدر بعدة آلاف. تستخدم جميع المسائل تقريبا، نظامين جزئيين، واحداً لتحليل مصفوفة المعاملات، والآخر للعمل على طرف أيمن خاص. كما ذكرنا في البند (٥-١)، سيوفر ذلك من وقت الحاسوب، عندما يكون هناك متتالية من الأطراف اليمنى المرتبطة بمصفوفة المعاملات ذاتها. يخبرنا الدليل أن هذه الحالة منتشرة بشكل كبير وأن التوفير فيها مهم أي أنه لم يصنع لحل نظام فريد بنظام جزئي واحد معين.

سنعطي قائمة مختصرة للأنظمة الجزئية. يمكن للمستخدم أن يختار بين أحادي الدقة أو ثنائي الدقة وبين الحساب الحقيقي أو المركب. هذه الاختيارات الأربعة تجعل مجموعة الرزمة كبيرة جدا نسبيا (ما يعادل ٨٠٠٠٠ بطاقة) ولكن البنية واضحة ومباشرة. تحلل الأنظمة المصفوفة A أو تحلل النظام $Ax = b$، أو تحسب المحددة أو المعكوس للأصناف التسعة التالية من المصفوفات :

GE عامة

GB عامة حزامية

PO معرّفة ايجابيا

PBحزامية معرّفة إيجابيا

SI متناظرة غير معرّفة

HI هرميتية غير معرّفة

TR مثلثية

GT ثلاثية الأقطار عامة

PT ثلاثية الأقطار معرّفة ايجابيا

يوجد علاوة على ذلك ثلاثة أنظمة تحسب تحليل شولسكي $A = R^{T}R$ وتحليل غرام - شميدت المثلثي - القائم $A = QR$ وتحليل القيمة الشاذة $A = Q_1 \Sigma Q_2^{T}$. من أجل شولسكي، فالمصفوفة مربعة ومعرفة ايجابيا، و R^{T} ما هي إلا $L\sqrt{D}$. من أجل المربعات الأصغرية، نذكر من جديد الخيار بين QR المستقرة حسابيا و SVD للمتأني جدا وبين استعمال $A^{T}A$ والمعادلة النظامية التي هي أسرع الثلاثة. $A^{T}A$ هي الاختيار المعتاد. من أجل المصفوفات المتناظرة والهرميتية، تتفق إشارات القيم الذاتية واشارات المحاور وفق قانون العطالة (البند ٦-٣)، وهذا هو جزء من ناتج النظامين الجزئيين SI و HI. نذكر أن تكاليف الحسابات تنزل إلى النصف تقريبا بسبب التناظر. هناك أيضا توفير في تحديث معامل شولسكي وإرجاعه عندما تكون A قد حورت باضافة أو حذف سطر.

النظام الجزئي الأساسي *SGEFA* يحلل مصفوفة عامة بدقة أحادية. تستعمل محورة جزئية، على نحو الخطوة k من الحذف حيث يختار - العنصر الأكبر، سواء كان على القطر أو تحته، ليكون محورا. يسجل العدد الصحيح *IPVT(K)* سطر المحور. إن وجود صفر في موقع المحور لا يعني أن التحليل فاشل (لقد رأينا في الفصل الثاني أن $PA = LU$ ممكن دائما وأن *LINPACK* يمزج P مع L)؛ يعني هذا أن U شاذة وأنه سيكون هناك قسمة على الصفر في التعويض - التراجعي. عمليا، القسمة على الصفر ناتجة بصورة عامة عن خطأ البرنامج وأن المصفوفة U قريبة من الشاذة تظهر عدم استقرار عددي.

يعطي الدليل مختصراً لطرائق التحليل :

```
for  k = 1, ..., n - 1  do        find l such that |a_lk| = max_{k ≤ i} |a_ik|;
save l in ipvt(k);
if a_lk = 0 then skip to end of k loop;
interchange a_kk and a_lk ;
for i = k + 1, ..., n do
m_ik = - a_ik /a_kk  (save in a_ik ):
for j = k + 1, ..., n do
interchange a_kj and a_lj;
for i = k + 1, ..., n do
a_ij ← a_ij + m_ik * a_kj ;
end j
end k.
```

الطريقة بصورة عامة معتادة ولكن نظرة مدققة قد تكشف عن مفاجأة. الطريقة لاتطرح مباشرة مضاعفات سطر محوري من الأسطر التي تقع تحته. بقول آخر إنها لا تقوم بعمليات سطرية. عوضا عن ذلك، يحسب النظام عمود المضروبات m_{ik} كاملا ثم ينتقل من عمود الى آخر نحو اليمين مستخدما هذه المضروبات. السبب هو كون ***لغة فورتران تخزن المصفوفات عمودا فعمودا***، يعطي النزول في العمود نحو الأسفل وصولا مرتبا إلى الذاكرة، من أجل المصفوفات الكبيرة المخزنة بطريقة التصفيح، سيكون هناك وفر كبير. لذلك، صممت الحلقات الداخلية (من أجل $i = k+1, ..., n$ *do*) بحيث تعمل عملية عمود لا عملية سطر. (قارن التمرين ١-٤-٩ بضرب Ax بطريقة الأسطر أو بطريقة الأعمدة). بصورة مشابهة، تنفذ الأنظمة *SGESL, SGBSL, SPOSL* التعويض التراجعي عمودا في كل مرة؛ المجهول الأخير في النظام المثلثي $Ux = c$ هو $x_n = c_n/u_{nn}$، ثم يطرح جداء x_n بالعمود الأخير في U من c. ما يبقى هو نظام من المرتبة $n - 1$ جاهز للخطوة التالية من التعويض التراجعي.

هذا التغيير إلى الأعمدة عائد إلى *Moler* ولقد نقح البرنامج بالتدريج لكي يقدر، أيضا، *العدد الشرطي* (المعرف في البند ٧-٢). في الحقيقة الاختيار النظامي في *LINPACK* ليس *SGEFA* بل هو *SGECO* وهو الذي يحوي هذا التقدير ويسمح

للمستخدم أن يقرر ما إذا كان من الأمان العمل مع نظام *SGELL* للتعويض التراجعي. يعتمد هذا النظام على مجموعة الأنظمة الثانوية للجبر الخطي *(BLAS)* بعمليات مثل العملية الأخيرة في المخطط، جمع مضاعف عمود إلى آخر. النتيجة الأخيرة هي مجموعة من الأنظمة التي تقوم بتطبيق نظرية الجبر الخطي بصورة جميلة. يمكن الحصول على دليل العمل من:

Sciety for Industrial and Applied Mathematics (SIAM)

117 South 17th Stret

Philadlphia PA 19103; (215) 564-2929

نؤكد أيضاً على أهمية البرنامج *EISPACK* لمسألة القيم الذاتية.

هذه الأنظمة معروضة للاستخدام العام. إنها تكون جزءاً من كثير من مكتبات الأنظمة الجزئية، ولنبدأ بتقديم مصدرين لبرامج الحسابات العلمية:

1. International Mathematical and Statistical Libraries (IMSL)

7500 Bellaire Boulevard

Houston TX 77036; (800) 222-4675

2. Numerical Algorithms Group (NAG)

1101 31st Stret

Downers Grove IL 60515; (312) 971-2337.

بعدما تقدم، نريد أن نلفت النظر إلى المصدر المسمى *"netlib"* وهو جديد ومجاني. إنه ليس مكتبة بل هو مؤسسة تقدم خدمات سريعة للحصول على أنظمة علمية. إنه يعمل بالبريد الإليكتروني بصورة كاملة، يرسل عن طريق *ARPANET* *CSNET, Telent, or Phone Net*. بما أنه لا يوجد شخص ينظر في الطلب، فمن الممكن (ومن المحتمل أن يكون أسرع) الحصول على البرامج في منتصف الليل. توقظ الرسالة الموظف وترسل قائمة بالبريد الالكتروني العائد. ليس هناك استشارة ولا ضمانات

ولكن الجواب فعال والكلفة طفيفة والنسخة الأخيرة، دائما موجودة. لا يمكن معرفة العناوين عن طريق مركز البريد :

3. *netlib@anl-mcs* (ARPANT/CSNET) or *research!ntlib* (UNIX network)

EISPACK, ITPACK, LINPACK, MINPACK, QUADPACK,

TOEPLITZ, TOMS, FFTPACK, BLAS, FISHPACK, ...

يمكن أن يكون المصدر التالي هو الأفضل. إنه برنامج فعال يدعى *MATLAB*، كتب خصيصا لحساب المصفوفات. يستفاد منه من أجل *IBM PC, Macintosh, SUN, APOLLO and VAX*. أصبح هذا البرنامج أداة فعلية عامة والبرنامج الأساسي للبحث في الجبر الخطي العددي. نؤكد على السرعة ورسم الأشكال وتحويل فورية السريع، «وأفلام» تقدم عمليات المصفوفات. العنوان هو :

4. Math Works

20 North Main Street

Sherborn MA 01770; (617) 653-1415.

فيما يلي نقدم ستة أنظمة لأجهزة *PC*. إن ذلك قائمة جزئية فقط وهناك برامج جديدة يتتابع ظهورها، ولكننا قد اطلعنا على تقارير جيدة من أجل هذه :

5. *Matrix Algebra Calculator* (Herman and Jepson), diskette and booklet with good applications: Brooks-Cole, 555 A brego Street, Monterey CA 93940.

6. MATRIXPAD (Orzech), convenient matrix entry and rational arithmetic; to be published by D.C. Heath, 125 Spring Street, Lexington MA 02173; information from Mathematics Department, Queen's University, Kingston

K7L3N6 Canada.

7. *Lintek* (Fraleigh), associated with text: 0-201-15456-0, Addison-Wesley, Reading MA 01867.

8. *Linear-Kit* (Anton), associated with text; 0-471-83086-0, John Wiley, 605

Third Avenue, New York NY 10158.

9. *Matrix Calculator* (Hogben and Hentzel), basic applications in exact rational arithmetic; Conduit, University of Iowa, Iowa City IA 52242.

10. MINITAB, statistics and basic linear algebra; 3081 Enterprise Drive, State College PA 16801.

لقد ظهَّر *Apple* و *Macintosh* نظاماً بصورتين مختلفتين وببطء كبير. تعاد كتابة بعض البرامج، ولكن، يظهر أن مجموعة كاملة من برامج الجبر الخطي ستكون جاهزة حتما للمستقبل أكثر من الوقت الحالي.

أذكر، اخيرا، محبتي الشخصية لتعليم طريقة الإفراد في البرمجة الخطية. وهي الطريقة التي تعطي قرارا في كل خطوة، يحل عنصر داخل محل عنصر مغادر. ليس للعمليات السطرية التي تنتج عن القرار أهمية (هذه هي المشكلة الكبرى في برهنة قضايا الجبر الخطي). بالقفز إلى قرنة جديدة قد تكون أفضل أو أسوأ أو أسرع أو أمثل - يسمح النظام ***"Mac Simplex"*** للمستخدم أن يقوم بأخطاء ويعود إلى الوراء. لقد كتب من قبل *Dr. Andrew Philpott (Enginering School, University of Aukland, New Zealand)* لحساب *Macintosh 512 k and Macintosh plus*.

تجارب حاسوب مقترحة

هدفي في هذه المقاطع أن أقترح توجيها لتجارب في الحاسوب وقد تجنبت منها كثيرة الشيوع وذوات الصعوبة الجدية. ما يحدث عادة هو أن الطالب يدخل مصفوفة، يضغط زرا ويقرأ الجواب. ليس هناك مكان لكثير من التعلم، إنه مجرد تمرين أكثر منه تجربة. الشيء البهيج في الرياضيات هو إيجاد شيء جديد، وانني اعتقد أن الحاسوب يجعل ذلك ممكنا.

أحد الأفكار الأساسية هي استخدام مولد الأرقام العشوائية لتكوين مصفوفات عشوائية. هنا، لا تزال النظرية في طفولتها، تتطور بسرعة (مدفوعة بصورة جزئية بمسائل خاصة في العلم). القيم الذاتية وقدر المحاور والمضاريب، أو المحددات أو كذلك الشذوذ وقابلية العكس في الحالة 1-0، كل ذلك يؤدي الى مسائل مهمة. سنشير لبعض ما يمكن أن يسأل عنه. يمكنك أن تفكر بغيرها. نوقشت الأعداد العشوائية في ص ٧٠٢.

الفكرة الثانية هي بناء مصفوفات في نموذج معين يسمح لحجمها بالنمو بينما يبقى ادخالها سهلا. ينتج نموذج رئيسي من فروق محدودة، كتقريبات لمعادلات تفاضلية. بتصغير طول الخطوة h، تزداد مرتبة المصفوفة – لكن المصفوفة تبقى متناثرة وسهلة الانقياد. يدور كثير من حسابات المسائل العلمية حول هذه المصفوفات: خواصها، سلوكها عند تصاغر h والأفكار المتعلقة بالحساب الفعال.

تحوي بعض أفراد هذه المجموعة التي ذكرت من قريب، مصفوفات خاصة يمكن تذكرها مباشرة. يتجنب ذلك مسألة الداخل، لكن جزء من الرياضيات يشترك في تقنين المسألة. تكمل التجارب الواردة أدناه تلك التمارين.

المصفوفات العشوائية $0-1$ $(n \times n)$:

١-١ أي جزء منها شاذ؟ ما تواتر مختلف المحددات؟ ماأكبر محددة ممكنة؟ ماأكبر محور (مع محورة جزئية) ولماذا تزداد معدلاتها مع n؟

١-٢ ايجاد القيم الذاتية (قصر A على الحالة المتناظرة إذا كان النظام يتطلب ذلك، ثم تجزئتها إذا كان النظام يسمح بذلك). ماأكبر قيمة ذاتية في هذا النموذج ومامعدل القيم الذاتية الضخمة؟.

١-٣ لماذا تتغير الأجوبة عندما يتحرك احتمال الوحدان مبتعدا من النصف؟.

المصفوفات والمتجهات العشوائية $(n \times 1, m \times n, n \times n)$:

نختار عناصر n و b بواسطة مولد الأعداد العشوائية من مجال للقيم وليس فقط 0-1. تعدل إذا كان ذلك ضروريا بحيث يصبح المتوسط (أو القيمة المتوقعة أو المعدل) صفرا. يوجد في كل تجربة امكانان:

(١) العمل مباشرة مع A و B

(٢) الانطلاق من A_0 و b_0 الثابتين، واعتبار A و B تشويشاً - تراقب ثابت تغيير المقياس c وتعمل مع $A_0 + cA$, $b_0 + cb$.

هناك أسئلة مثيرة لم يجب بعد عنها تتعلق باحصائيات الحذف الغاوسي (عندما ينتج A و B من تدوير أخطاء).

٢-١ ماهو توزيع $det\,A$؟ باستخدام حذف بدون محوره، يمكنك، أيضا، أن تجد محددات المصفوفات الجزئية اليسارية العليا والمحاور والمضاريب. لكل ذلك فائدة كبيرة.

٢-٢ ما هو طول معدل $x = A^{-1}b$؟. بالمقارنة بـ $x_0 = A_0^{-1}b_0$، ماطول معدل $x = (A_0 + cA)^{-1}(b_0 + cb)$ والخطأ $x - x_0$؟

٢-٣ افرض تناظراً على A بحيث يكون لها $\frac{1}{2}(n^2 + n)$ من العناصر العشوائية

المستقلة، وأوجد *قيمها الذاتية*. احسب أيضاً $F(t)$ التي تساوي جزءاً من مجموعة القيم الذاتية التي تقع تحت t. ماتوزيع λ_{max}؟ لماذا تتغير مع n؟ سينزل بيان F نحو الأسفل بعد العديد من التجارب. (هناك قانون «شبه دوري» قليل من سمع به. تظهر F مشابهة تكامل $(1 - t^2)^{1/2}$، بعد تغيير المقياس، وتقوم كثافة القيم الذاتية، بنصف دورة). مامعدل وتوزيع $(A_0 + cA)$ λ_{min}؟

٢-٤ انشيء مصفوفات عشوائيةمن النوع $n X n$ وانظر في المحاور والمحددات والقيم الذاتية لـ A^TA – وهي المضمون كونها متناظرة وشبه معرفة ايجابيا.

الشبكات ومصفوفات الورود العشوائية $n X n$:

إذا اعطينا n عقدة و $\frac{1}{2}(n^2 - n)$ من الأضلاع التي يمكنها الربط بينها، أدخل كل ضلع باحتمال p (ابدأ بياناً كاملاً بـ p=1، ثم بـ $p = \frac{1}{2}$). A هي *مصفوفة ورود* يقابل كل سطر فيها واحدا من الأضلاع الـ m (البند ٢-٥). تحوي 1- و 1+ في العمود المقابل للعقدتين المرتبطتين بهذا الضلع. B هي *مصفوفة الورود المختزلة*، مشابهة لـ A إلا أن عمودها الـ n قد حذف. C *مصفوفة التجاور* من النوع $n X n$، حيث $c_{ij} = 1$ إذا كان بين العقدتين i ,j ضلع و $c_{ij} = 0$ إذا كان خلاف ذلك.

٣-١ مااحتمال وجود شبكة *مترابطة*؟ يكون لـ A، في هذه الحالة، رتبة تساوي $n - 1$. كيف يتغير الاحتمال مع p؟

٣-٢ ما القوة الأولى C^k التي تكون موجبة كليا، بدون أصفار وما معنى k بدلالة الطرق الواصلة بين العقد؟ كيف تزداد k مع n؟

٣-٣ تقدر محددة B^TB عدد *الأشجار المتدة*. كيف يتحول ذلك مع n و p؟ اطبع من أجل بيان صغير (n = 3, 4, 5) :

(أ) أساساً للفضاء الصفري لـ A

(ب) أساساً للفضاء الصفري لـ A^T

(ج) m, n والرتبة r

(د) B^TB ومحددتها (عدد الأشجار الممتدة)

قارن النتائج بالبيان، بصورة خاصة، قارن الجزء (ب) بالعرى.

٣-٤ أوجد القيم الذاتية لـ B^TB و C - بصورة خاصة توزيع λ_{max} وتوزيع العدد الشرطي $C = \lambda_{max}/\lambda_{min}$.

٣-٥ من أجل البيان الكامل ذي الـ$(n$ $\frac{1}{2}(n^2 - n)$ ضلعاً، ما هي B^TB وما هي قيمها الذاتية؟ اطبع مصفوفتين من النوعين 3×3 و 4×4 بـ $n = 5$ و $n = 4$ على القطر - ووحدان سالبة في بقية المواضع. أوجد LU ثم التحليل LDL^T - هل ترى نمط المضاريب في L؟.

الفروق المحدودة : $-u'' + cu' = f$ لكل $0 \leq x \leq 1$

٤-١ بفرض أن $c = 0$، انشىء مصفوفة *الفرق - الثاني* القطرية A_n، حيث يقع على الأقطار $1,2,-1$. حقق أن $\det A_n = n + 1$ واحسب A_n^{-1}. يجب أن تكون عناصرها الواقعة فوق القطر من الشكل $ai(1 - aj)$، أوجد العدد a وابحث عن نمط ما تحت القطر.

٤-٢ حقق أن القيم الذاتية لـ A_n هي $\lambda_j = 4 \sin^2 j\pi h/2$ وأن المتجهات الذاتية تظهر كجيوب - كما في التمرين ٧-٤-٣.

٤-٣ انشىء ثلاث مصفوفات فرق - أول ممكنة : F_+ تحوي وحدانا سالبة على القطر الرئيسي ووحدانا موجبة فوقه مباشرة، F_- تحوي وحدانا على القطر الرئيسي ووحدانا سالبة تحته مباشرة، وتحوي $F_0 = \frac{1}{2}(F_+ + F_-)$ أنصافا فوق القطر وانصافا سالبه تحته. إن ذلك مسألة مهمة من مسائل

الهندسة المعمارية. لاحظ أن cu ´´+ u - . مقربة بـ $M = h^{-2}A + h^{-1}cF$
حيث h هو طول الخطوة.

حل $-u'' + cu' = 1$ بفرض أن $u = 0$ عند الطرفين $x = 1, x = 0$.
(جرب e^{cx} و $ax + b$). إذا كان الأمر ممكنا، ارسم الحل الحقيقي من أجل $c = 0,1,10$ وقيم أخرى. ثم حل $M_+ u = e$ و $M_- u = e$ و $M_0 u = e$، عندما يكون $e = (1,1,...,1)$، تنتج المصفوفات M عن المصفوفات الثلاث F. بفرض أن c كبير، يكون حد المشتقة الأولى cu' مهما: أي اختيار لـ F ترجح؟ إذا كان c صغيراً فما الأفضل؟ قارن دائما بالحل الصحيح u؟

٤-٤ هل يوجد نمط في M أو M^{-1} لكل من المصفوفات M_0 , M_- , M_+؟

معادلة لابلاس $-u_{xx} - u_{yy} = 0$ على وحدة مربعة.

يوجد n^2 من المجاهيل داخل المربع، عندما يكون طول الخطوة $h = 1/(n+1)$ في اتجاهي y, x. رقّمها أولا على طول اخفض سطر، ثم السطر الذي يليه، وأخيرا السطر العلوي. أرقام المجاهيل الواقعة في القرنات السفلى اليسرى و السفلى اليمنى والعليا اليمنى هي على الترتيب $n^2, n, 1$.
أنشيء مصفوفتي الفرق - الثاني $(-1, 2, -1)$ H و V (أفقية ورأسية) وهما من المرتبة n^2. H تأخذ فروقاً في اتجاه x، على طول الأسطر، وستكون ثلاثية الأقطار - لكن الوحدان السالبة الواقعة فوق وتحت القطر ترتفع أو تنخفض عندما تنتهي الأسطر. V تأخذ فروقا في اتجاه y إلا أن الوحدان السالبة تقع خارج الأقطار (كذلك بانخفاض أو ارتفاع).

٥-١ أوجد المحددة والمعكوس *لمصفوفة الفرق ذات النقاط - الخمس* $L = V +$

Hهل يمكنك أن تلاحظ أنماطا عندما تزداد n؟

٥-٢ أوجد القيم الذاتية لـ L وقابلها مع $\lambda_1 + \lambda_2$ ، مجموع قيمتين ذاتيتين لمصفوفة الفرق - الثاني العادية A ذات النوع $n \times n$. (إن لها n من القيم الذاتية قد اعطيت من قبل، لذا، فإن هناك n^2 مجموعاً). هل يمكنك أن تربط الأعمدة الذاتية لـ A بالأعمدة الذاتية لـ L .

٥-٣ حل $Lx = e$ حيث $e = (1,1,...,1)$ ذو طول يساوي n^2 . أولا، استخدم الحذف، لكي تحصل على الجواب الحقيقي. (يزداد عدد العمليات الحسابية مثل n^4 من أجل هذه المصفوفة الحزامية، كما كان متوقعا في البند ١-٧؟) ثم استخدم طريقة التكرار الواردة في الفصل السابع - جاكوب، غاوس - سايدل و SOR - وقارن تراجع الخطأ $\|x - x_k\|$ بعد k من التكرارات. تجريبيا، أي ω هو الأفضل في SOR؟

ارغب في تركيب مصفوفات عشوائية مع مصفوفات فروق $A + cF$، حيث c مصفوفة قطرية بعناصر عشوائية. إلا أن تلك منطقة جديدة، تماما، لم أتعرف بعد على أسئلتها الصحيحة.

أنظمة من أجل $A = LU$ والتعويض التراجعي

من أجل استخدام القارىء، نقدم جدولة فورتران *Fortran* معراة من تحسيناتها ولكنها ستسمح بالتسلية بتجربة $Ax = b$. الترجمة إلى لغة البيسيك *BASIC* أو *PL/I* سهلة. يحتوي الداخل N، مرتبة المصفرفة، وكذلك *NDIM*، موجه البعد بين الأسطر، الذي هي حد أعلى لـ N . يخصص الحاسوب فرجات متفقا مع *NDIM*، بينما يمكن لـ N أن تتغير كأنظمة مختلفة جرت معالجتها. يكتب النظام فوق المصفوفة A، خطوة فخطوة، بواسطة U، في الجزء المثلثي الأعلى وبواسطة $I - L$ في الجزء المثلثي الأدنى

الخالص. ذلك عوضا عن تخزين الأصفار التي تظهر عند الحذف، تخزن المضاريب (أو بالأحرى *سالب المضاريب*، بسبب كونها $I - L$). يلاحظ أن الحذف لا يتطلب مكاناً إضافياً للمناورة. إذا وجدت مبادلات سطرية فإن أعمدة $I - L$ تخضع إلى مبادلات لا يحلها إلا قارىء كثير الصبر. مهما كان الأمر، فإنها قد فسرت بصورة صحيحة بنظام التعويض - التراجعي. (لقد وصفت L كمصفوفة مثلثية دنياسيكولوجية. في الحالة التي يكون فيها قطر A مهيمنا بصورة كافية فلن يكون هناك محورة ويكون $A = LU$). المركبة الأخيرة لـ IPVT تحوي ± 1 تبعا لكون عدد المبادلات زوجيا أو فرديا، ونجد المحددة من (A(N, N *...* (1, 1) A * (IPVT(N إذا كانت مساوية الصفر فإننا نتوقف.

سنقدم الآن البرنامجين الفرعيين DECOMP و SOLVE، وذلك لتحليل A وإيجاد x، ونموذجا من برنامج رئيسي يقرأ المعطيات، ويستدعي البرنامج الفرعي النتائج ويطبعها.

```
C
C     SAMPLE PROGRAM FOR N EQUATIONS IN N UNKNOWNS
C
      INTEGER IPVT(10)
      REAL A(10,10),B(10)
      NDIM = 10
C
C     NDIM IS UPPER BOUND ON THE ORDER N
C
      N = 3
      A(1,1) = 2.0
      A(2,1) = 4.0
      A(3,1) = -2.0
      A(1,2) = 1.0
      A(2,2) = 1.0
      A(3,2) = 2.0
      A(1,3) = 1.0
      A(2,3) = 0.0
      A(3,3) = 1.0
```

```
C
      WRITE (6,5) NDIM,N
    5 FORMAT (X,'NDIM = ',I2,' N = ',I2,' --- A:')
      DO 10 I = 1,N
   10 WRITE (6,20) (A(I,J),J=1,N)
   20 FORMAT (X,10F7.3)
      WRITE (6,30)
   30 FORMAT (X)
C
      CALL DECOMP (NDIM,N,A,IPVT,DET)
C
      WRITE (6,35)
   35 FORMAT (X,'AFTER DECOMP:   FACTORS OF A:')
      DO 40 I = 1,N
   40 WRITE (6,20) (A(I,J),J=1,N)
      WRITE (6,45) DET
   45 FORMAT (X,'DET = ',E11.5)
      WRITE (6,30)
      IF (DET.EQ.0.0) STOP
C
      B(1) = 1.0
      B(2) = -2.0
      B(3) = 7.0
      DO 50 I = 1,N
   50 WRITE (6,60) I,B(I)
   60 FORMAT (X,'B(',I2,') =',F7.3)
      CALL SOLVE (NDIM,N,A,IPVT,B)
      DO 70 I = 1,N
   70 WRITE (6,80) I,B(I)
   80 FORMAT (X,'X(',I2,') =',F7.3)
C
      STOP
      END
C
      SUBROUTINE DECOMP (NDIM,N,A,IPVT,DET)
      INTEGER NDIM,N,IPVT(N)
      REAL A(NDIM,N),DET
      REAL P,T
      INTEGER NM1,I,J,K,KP1,M
C
C     INPUT A = COEFFICIENT MATRIX TO BE TRIANGULARIZED
C     OUTPUT A CONTAINS UPPER TRIANGULAR U AND
C       PERMUTED VERSION OF STRICTLY LOWER TRIANGULAR I-L.
C       IN ABSENCE OF ROW EXCHANGES A = LU
C
C     IPVT(K) = INDEX OF KTH PIVOT ROW, EXCEPT
C     IPVT(N) = (-1)**(NUMBER OF INTERCHANGES)
C     DET = IPVT(N)* A(1,1)*...*A(N,N)
C
      DET = 1.0
      IPVT(N) = 1
      IF (N.EQ.1) GO TO 70
      NM1 = N-1
C
      DO 60 K = 1,NM1
      KP1 = K+1
C
C     FIND PIVOT P
```

```
C
      M = K
      DO 10 I = KP1,N
   10 IF (ABS(A(I,K)).GT.ABS(A(M,K))) M = I
      IPVT(K) = M
      IF (M.NE.K) IPVT(N) = -IPVT(N)
      P = A(M,K)
      A(M,K) = A(K,K)
      A(K,K) = P
      DET = DET*P
      IF (P.EQ.0.0) GO TO 60
C
C     COMPUTE MULTIPLIERS
C
   20 DO 30 I = KP1,N
   30 A(I,K) = -A(I,K)/P
C
C     INTERCHANGE AND ELIMINATE BY COLUMNS
C
      DO 50 J = KP1,N
      T = A(M,J)
      A(M,J) = A(K,J)
      A(K,J) = T
      IF (T.EQ.0.0) GO TO 50
      DO 40 I = KP1,N
      A(I,J) = A(I,J)+A(I,K)*T
   40 CONTINUE
   50 CONTINUE
   60 CONTINUE
C
   70 DET = DET*A(N,N)*FLOAT(IPVT(N))
C
      RETURN
      END
C
      SUBROUTINE SOLVE (NDIM,N,A,IPVT,B)
      INTEGER NDIM,N,IPVT(N)
      REAL A(NDIM,N),B(N)
C
C     NDIM IS UPPER BOUND ON THE ORDER N
C     A CONTAINS FACTORS OBTAINED BY DECOMP
C     B IS RIGHT HAND SIDE VECTOR
C     IPVT IS PIVOT VECTOR OBTAINED BY DECOMP
C     ON OUTPUT B CONTAINS SOLUTION X
C
      INTEGER NM1,K,KB,KP1,KM1,M,I
      REAL S
C
C     FORWARD ELIMINATION
C
      IF (N.EQ.1) GO TO 30
      NM1 = N-1
      DO 10 K = 1,NM1
      KP1 = K+1
      M = IPVT(K)
      S = B(M)
      B(M) = B(K)
      B(K) = S
      DO 10 I = KP1,N
   10 B(I) = B(I)+A(I,K)*S
```

```
C
C      BACK SUBSTITUTION
C
       DO 20 KB = 1,NM1
       KM1 = N-KB
       K = KM1+1
       B(K) = B(K)/A(K,K)
       S = -B(K)
       DO 20 I = 1,KM1
    20 B(I) = B(I)+A(I,K)*S
C
    30 B(1) = B(1)/A(1,1)
C
       RETURN
       END
```

مولد الأعداد العشوائية

لما كانت التجارب المقدمة أعلاه تحتاج إلى أعداد عشوائية، فإننا سنضيف بعض الأسطر حول توليدها. كثير من الحواسب يحصل عليها مباشرة (على الأقل إذا أردنا توزيعا *منتظما* على الفترة من الصفر الى الواحد). حاليا، يمكن تكوين أعداد *زائفة* تأتي من طريقة حتمية ولكنها، من أجل موضوع عملي، تظهر عشوائية. سطر واحد يكفي لكتابة طريقة مرضية من أجل دقة حسابية واحدية :

$$m_0 = 0,\quad m_j = (25733 m_{j-1} + 13849)(\mathrm{mod}\ 65536),\quad x_j = m_j/65536.$$

العدد 65536 هو 2^{16} وستكون جميع الخطوات محسوبة بدقة (ستوجد، آلياً، بالجهاز 32-bit). التعبير "*mod* 65536" يعني أن m_j هو الباقي بعد قسمة $(25733\, m_{j-1} + 13849)$ على ذلك العدد. لذا، فإن x_j كسر يقع بين الصفر والواحد، عندما قسم x_j على 2^{16} – لقد تحركت النقطة الثنائية *16* موضعاً.

توجد أيضا طريقة سهلة للانتقال من زوج من هذه الأعداد العشوائية الموزعة بانتظام (مثل x و y) إلى زوج من الأعداد العشوائية u الموزعة بصورة قياسية (يتحكم بها منحني غاوس الناقوسي – الشكل). الخطوة الأولى تغيير التوزيع المنتظم الى الفترة من 1- إلى 1+ : افرض أن $w = 2x - 1$ و $z = 2y - 1$. الشكل التالي هو $s = w^2 + z^2$. لذا، فإن u , v قد توزعا بمتوسط صفري وتباين يساوي الواحد إذا كان :

$$v = z \left(\frac{-2 \log s}{s} \right)^{\frac{1}{2}} \quad و \quad u = w \left(\frac{-2 \log s}{s} \right)^{\frac{1}{2}}$$

هناك مرجع ممتاز هو الجزء الثاني من Donald Knuth's series The Art of Computer Programing.

للاختيار عشوائيا بين الصفر والواحد باحتمالين p و $1 - p$، احسب التوزيع المنتظم للمتغير x كما ورد أعلاه واختر الصفر إذا كان x تحت p.

المراجع

جبر خطي مجرد

F. R. Gantmacher, "Theory of Matrices." Chelsea, 1959.
P. R. Halmos, "Finite-Dimensional Vector Spaces." Van Nostrand-Reinhold, 1958.
K. Hoffman and R. Kunze, "Linear Algebra." Prentice-Hall, 1971.
T. Muir, "Determinants." Dover, 1960.

جبر خطي تطبيقي

D. Arganbright, "Mathematical Applications of Electronic Spreadsheets." McGraw-Hill, 1985.
R. Bellman, "Introduction to Matrix Analysis." McGraw-Hill, 1960.
A. Ben-Israel and T. N. E. Greville, "Generalized Inverses: Theory and Applications." Wiley, 1974.
A. Berman and R. J. Plemmons, "Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences." Academic Press, 1979.
V. Chvátal, "Linear Programming." Freeman, 1983.
D. Gale, "The Theory of Linear Economic Models." McGraw-Hill, 1960.
D. G. Luenberger, "Introduction to Linear and Nonlinear Programming." Addison-Wesley, 1973.
B. Noble and J. Daniel, "Applied Linear Algebra." Prentice-Hall, 1977.
G. Strang, "Introduction to Applied Mathematics," Welleslev-Cambridge Press, 1986.

جبر خطي عددي N

G. Forsythe and C. Moler, "Computer Solution of Linear Algebraic Systems." Prentice-Hall, 1967.
A. George and J. Liu, "Computer Solution of Large Sparse Positive Definite Systems." Prentice-Hall, 1981
G. Golub and C. Van Loan, "Matrix Computations." Johns Hopkins Press, 1983.
C. L. Lawson and R. J. Hanson, "Solving Least Squares Problems." Prentice-Hall, 1974.
B. N. Parlett, "The Symmetric Eigenvalue Problem." Prentice-Hall, 1981.
G. W. Stewart, "Introduction to Matrix Computations." Academic Press, 1973.
R. S. Varga, "Matrix Iterative Analysis." Prentice-Hall, 1962.
J. M. Wilkinson, "Rounding Errors in Algebraic Processes." Prentice-Hall, 1963.
J. M. Wilkinson, "The Algebraic Eigenvalue Problem." Oxford University Press, 1965.
J. M. Wilkinson and C. Reinsch, Eds., "Handbook for Automatic Computation II, Linear Algebra." Springer, 1971.
D. M. Young, "Iterative Solution of Large Linear Systems." Academic Press, 1971.

حلول بعض التمارين المختارة

الباب الأول

١-٢-٢ $u = b_1 - b_2,\ v = b_2 - b_3,\ w = b_3$.

١-٢-٤ لا ؛ 3 مستقيمات من نقطة الأصل ; 3,0,1 .   ١-٢-٦ (3 , 1, 2-)

١-٢-٨ واحد من الحلول : (3,-1,0 ; -1;1=0 1= (3) eq × 1+(2) eq × 2 -(1) eq ×1

١-٢-١٠ $y_1 - y_2 = 1,\ y_1 - y_3 = 2$

١-٢-١٢ (1 ,1 , 1)

١-٣-٢
$$\begin{cases} u + v + w = 2 \\ 2v + 2w = -2, \\ 2w = 2 \end{cases} \quad u = 3, v = -2, w = 1.$$

١-٣-٤ المعامل 1 يجعل النظام شاذاً .

١-٣-٦ $a = 0$ يتطلب مبادلة سطرية ، لكنه غير شاذ؛ $a = 2$ شاذ (محور واحد ، مالا نهاية من الحلول) ؛ $a = -2$ شاذ (محور واحد لا توجد حلول) .

١-٣-٨ $n^3/3 = 72$ مليون عملية ؛ 9000 ثانية في P C . 900ثا نية في VAX ،6 ثواني في CRAY .

١-٣-١٠ الحد الثاني $bc + ad$ هو $(a + b)(c + d) - ac - bd$ (ضرب واحد إضافي) .

١-٣-١٢ $9u + 2v = 200{,}000{,}000\ ;1u + 8v=30{,}000{,}000$ ١-٤-٢ $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$

١-٤-٤ mnp و mn ضرباً . ١-٤-٦ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

١-٤-٩ يو جد البرنامج كل مركبة من Ax بصورة منفصلة ، مستخدماً سطراًمن Aفي كل مرة . يوجد الثاني Ax كتركيب لأعمدة A ، حاسباًعموداً في كل مرة .

١-٤-١٤ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, D = A, E = F = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

١-٤-١٨ لـ x هذه ، يكون Bx هو العمود الاول من B و $(AB)x$ العمودالأول من AB

١-٤-٢٠ $(AB)_{ij}=n\ , (ABC)_{ij} = 2n^2$

١-٥-٤

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{8}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

١-٥-٦ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 12 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 48 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}$

١-٥-٨ (أ) لأنه قد استخدم سطر محور ، أخذ من U ولم يؤخذ من α (ب) القاعدة ٣.

١-٥-١٠ نحصل على المجهول c_1 ، في $Lc=b$، بعملية واحدة ، يحتاج c_2 إلى عمليتين وهكذا . المجموع الكلي هو $1+2+ \ldots + n = n(n+1)/2 \approx n^2/2$

١-٥-١٢ ينطلق الحذف الغاوسي من السطر الأسفل(أومن العمودالأول) ؛ لا .

١-٥-١٥ $\begin{bmatrix} 0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0&1&1\\1&0&1\\2&3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\2&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1&0&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix};$

$$\begin{bmatrix} 1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1&2&1\\2&4&2\\1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1&0&0\\1&1&0\\2&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1&2&1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

١-٥-١٧ $\begin{bmatrix} 1&0&0\\1&1&0\\2&0&1\end{bmatrix}$

١-٥-١٩ $a=4$ يؤدي إلى مبادلة سطرية ؛ $3b+10a=40$ يؤدي الى مصفوفة شاذة

؛ $c=0$ يؤدي الى مبادلة سطرية ؛ $c=3$ يؤدي إلى مصفوفة شاذة .

١-٦-١ $A_1^{-1}=\begin{bmatrix} 0&\frac{1}{3}\\ \frac{1}{2}&0\end{bmatrix}; A_2^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}&0\\-1&\frac{1}{2}\end{bmatrix}; A_3^{-1}=\begin{bmatrix} \cos\Theta&\sin\Theta\\-\sin\Theta&\cos\Theta\end{bmatrix}$

١-٦-٦ $A_1^{-1}=\begin{bmatrix} 1&0&0\\-1&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}; A_2^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{3}{4}&\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\\ \frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{4}&\frac{1}{2}&\frac{3}{4}\end{bmatrix}; A_3^{-1}=\begin{bmatrix} 0&-1&1\\-1&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$

١-٦-٧ $\begin{bmatrix} \sqrt{3}/2&1/2\\1/2&-\sqrt{3}/2\end{bmatrix};\begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2&1/2\\1/2&\sqrt{3}/2\end{bmatrix};\begin{bmatrix} 0&1\\1&0\end{bmatrix}$

١-٦-٩ أفرض أن السطر الثالث من A^{-1} هو (a,b,c,d) ، لايوجد حل .

$A^{-1}A=I\Rightarrow 2a=0, a+3b=0, 4a+8b=1$

١-٦-١٠ $A_1^{-1}=\begin{bmatrix} 0&0&0&\frac{1}{4}\\0&0&\frac{1}{3}&0\\0&\frac{1}{2}&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}; A_2^{-1}=\begin{bmatrix} 1&0&0&0\\ \frac{1}{2}&1&0&0\\ \frac{1}{3}&\frac{2}{3}&1&0\\ \frac{1}{4}&\frac{2}{4}&\frac{3}{4}&1\end{bmatrix}; A_3^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d&-b&0&0\\-c&a&0&0\\0&0&d&-b\\0&0&-c&a\end{bmatrix}$

١٢-٦ (1) , (2) , (5)

١-٦-١٤

$(AA^T)^T A^T = (A^T)^T = AA^T;\ (A^TA)^T = A^T(A^T)^T = A^TA;$ خذ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},$

$AA^2 = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 10 \end{bmatrix},\ A^TA = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}.$

١-٦-١٦ (a) n(n+1)/2 (b) (n-1)/2

١-٦-١٨ (أ) معكوس مصفوفة مثلثية دنيا (عليا) تبقى مثلثية دنيا (عليا). ضرب مثلثيتين دنياوين (علياوين) يعطي مصفوفة مثلثية دني(عليا).

(ب) القطران الرئيسيان لـ $L_1^{-1} L_2 D_2$ و $D_1 U_1 U_2^{-1}$ مطابقان لما يتعلق بـ D_2 و D_1 علي الترتيب. $L_1^{-1} L_2 D_2 = D_1 U_1 U_2$ لذا يكون $D_1 = D_2$.

بمقارنة العناصر غير القطرية في $L_1^{-1} L_2 D_2 = D_1 U_1 U_2^{-1}$ نستنتج أنهما قطريتان، D_1 قابلة للعكس $\Leftarrow L_1 L_2 = I,\ U_1 U_2^{-1} \Rightarrow I \Rightarrow L_2,\ U_1 = U_2$

١-٦-٢١ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b/a & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a-(b^2/a) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & b/a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

١-٧-٢ $\begin{bmatrix} 33 & -16 & 0 \\ -16 & 33 & -16 \\ 0 & -16 & 33 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix}$

١-٧-٤ $U_1, U_2, U_3 = (\ n^2/8,\ 0,\ n^2/6\ )$ عوضاً عن القيم الحقيقية(1,0,-1) .

الباب الثاني

٢-١-٢ (a), (d), (e), (f)

٢-١-٤ فضاء المصفقات من النوع 3×3، لأنه يمكن كتابة كل مصفوف كمجموع مصفوفة متنا ظرة مع مصفوفة مثلثية دنيا ؛ فضاء المصفوفات القطرية .

٢-١-٦ $x + 2y + z = 0$ ؛ P_0 فضاء جزئي من $\mathbf{R}^3$ ، P ليست كذلك .

٢-٢-١ سبع نماذج تحوي المصفوفة التي جميع عناصرها أصفار .

٢-٢-٣ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix};$ u,v متغيران أساسيان y ، w متغيران حران .

الحل العام هو: $r=2$;

$$x = \begin{bmatrix} 2w-y \\ -w \\ w \\ y \end{bmatrix} = w\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

٢-٢-٤ $U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$ ؛ u,w,y أساس متغيرو v حر ؛ الحل العام لـ $Ax=0$ هو

$x=(u-4w,w,y)$ ؛ $Ax=b$ متسق إذاكان $b_2-2b_1=0$ ؛ الحل العام لـ $Ax=b$

هو: $r=1$;

$$x = \begin{bmatrix} u \\ b_1-4w \\ w \\ y \end{bmatrix} = u\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + w\begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

٢-٢-٦

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2v-3 \\ v \\ 2 \end{bmatrix} = v\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

٢-٢-١٠ (أ)

$$x = \begin{bmatrix} -2x_2+2x_4 \\ x_2 \\ -2x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_2\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

حيث يمكن أن يكون x_2, x_4 أي عددين

(ب)

$$x = \begin{bmatrix} a-3b \\ 0 \\ b \\ 0 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

حيث يمكن أن يكون x_2, x_4 أي عددين .

٢-٢-١٢ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

٢-٣-٢ (أ) مستقلة (ب) مرتبطة (ج) مرتبطة .

٢-٣-٤ نعم ؛

$c_1(v_1 + v_2) + c_2(v_1 + v_3) + c_3(v_2 + v_3) = 0 \Rightarrow (c_1 + c_2)\, v_1 +$

$(c_1 + c_3)\, v_2 + (c_2 + c_3)\, v_3 = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0, c_1 + c_3 = 0, c_2 + c_3$

$= 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0 \Longrightarrow$ يعني أن w_1, w_2, w_3 مستقلة .

٢-٣-٦ (أ) محور y يقع في $\mathbf{R}^3$ ؛ (ب) المستوي y z واقع في $\mathbf{R}^3$ ؛ (ج) المستوي y z واقع في $\mathbf{R}^3$ ؛ (د) $\mathbf{R}^3$.

٢-٣-٧ (أ) ليس لـ $Ax = b$ حل ، لذا فإن b ليست في الفضاء الجزئي (ب) المتجهات w (بـ w_4 أو بدونه) تولد $\mathbf{R}^3$.

٢-٣-١٠ قاعدة واحدة هي $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ؛ المصفوفة المدرجة تولدالمصفوفات المثلثية العليا .

٢-٣-١٢ أفرض $v_1 = (1, 0, 0, 0), \ldots, v_4 = (0, 0, 0, 1$ متجهات إحداثية . إذا كان W المستقيم الذي يحمل (1,2,3,4) ، فإنه لا يقع أي واحد من v في W .

٢-٣-١٥ (١) إذا لم يكن هناك أساس ، يمكننا إضافة متجهات مستقلة أخرى تزيد عن عدد الأبعاد k المفروض . (٢) إذالم يكن هناك أساس ، يمكننا حذف بعضها ويصبح الباقي أقل من عدد الأبعاد k المفروض .

٢-٣-١٧ إذا كان v_1, v_2, v_3 أساساً لـ V و w_1, w_2, w_3 أساساً لـ W فإنه لا يمكن لهذه المتجهات الستة أن تكون مستقلة ويوجد تركيب لها يساوي الصفر :

$\sum c_i v_i + \sum d_i w_i = 0,$ أو $\sum c_i v_i = -\sum d_i w_i$

متجه واقع في كل من الفضاء ين الجزئين .

٢-٣-٢٠ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

٢-٣-٢٢ (١) صحيح (٢) خاطئ .

٢-٤-٢

$\mathscr{R}(A)$: $r = 1$, (1,2); $\mathscr{N}(A)$: $n - r = 3$, (1, 0, 0, 0), (0, - 4, 1, 0), (0,0,0,1); $\mathscr{R}(A^T)$: $r = 1$ (0, 1,4,0); $\mathscr{N}(A^T)$: $m - v = 1$, (-2,1); $\mathscr{R}$ (U:(1,0));
$\mathscr{N}$ (U): (1,0,0,0), (0,-4,1,0), (0,0,0,1); $\mathscr{R}$ (U^T): (0,1,4,0);
$\mathscr{N}$ (U^T): (0,1)

٢-٤-٥ $AB = 0 \Rightarrow A\ (b_1, \ldots, b_n) = 0 \Rightarrow Ab_1 = 0, \ldots, Ab_n = 0 \Rightarrow b_1 \in \mathscr{N}(A),$ $\ldots, b_n \in \mathscr{N}(A) \Rightarrow \mathscr{R}(B)$ واقع في $\mathscr{N}(A)$.

٢-٤-٦ $Ax = b$ قابل للحل $\Leftrightarrow b \in \mathscr{R}(A) \Leftrightarrow \mathscr{R}(A) = \mathscr{R}(A') \Leftrightarrow \text{rank } A = \text{rank } A'$

٢-٤-٧ (أ) $m = n = r$ (ب) $n > m = r$ ٢-٤-١٠ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 12 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

٢-٤-١٢ لـ $Ax = 0$ حل غير صفري $\Leftrightarrow r < n \Rightarrow \mathscr{R}(A^T)$ $\Rightarrow n > r \Leftrightarrow$ أصغر من $\mathbf{R}^n \Rightarrow A^T y = f$ غير قابل للحل لقيمة ما لـ f .

٢-٤-١٥ لـ A معكوس يميني $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ ؛ لـM معكوس يساري $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

إذا كان $a \neq 0$ ، فإن لـ T معكوس من الطرفين $\begin{bmatrix} 1/a & -b/a^2 \\ 0 & 1/a \end{bmatrix}$.

٢-٤-١٧ A^TA ليست بالضرورة قابلة للعكس .

٢-٤-٢٠ (أ) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ (ب) ليس مثل هذه المصفوفه : $r+(n-r) = 1+1 \neq 3$. (ج) ليس

مثل هذه المصفوفة : لفضاء الأعمدة وفضاء الأسطر عدد الأبعاد ذاته .

٢-٥-٢ في كل عمود، مجموع العنصرين الأولين يساوي الثالث. لذا فإن كل تركيب يحق $b_1 + b_2 - b_3 = 0; Ax = b \Rightarrow x_1 - x_2 = b_1, x_2 - x_3 = b_2$ $x_1 - x_3 = b_3 \Rightarrow b_1 + b_2 - b_3 = 0$. هذا يعني أن مجموع فروق الطاقات حول عروة يساوي الصفر .

٣-٥-٢ مجموع عناصر كل سطر يساوي الصفر. لذا لكل تركيب الخاصة هذه نفسها؛ $f_1 + f_2 + f_3 = 0; A^T y = f \Rightarrow y_1 + y_3 = f_1, -y_1 + y_2$ $= f_2, -y_2 - y_3 = f_3 \Rightarrow f_1 + f_2 + f_3 = 0$. يعني ذلك أن مجموع التيارات الداخلة من الخارج يساوي الصفر .

٥-٥-٢ $\begin{bmatrix} c_1 + c_3 & -c_1 & -c_3 \\ -c_1 & c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_3 & -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix}$ ؛ لـ $\begin{bmatrix} c_1 + c_3 & -c_1 \\ -c_1 & c_1 + c_2 \end{bmatrix}$

المحوران : $c_1 + c_3$ و $(c_1c_3 + c_1c_2 + c_2c_3)/(c_1 + c_3)$

٦-٥-٢ $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$; $(1,0,0,1,-1,0),(0,0,1,-1,0,1),(0,1,0,0,-1,1)$

٧-٥-٢ $b_1 + b_4 - b_5 = 0, b_3 - b_4 + b_6 = 0, b_2 - b_5 + b_6 = 0$

١٠-٥-٢ لا؛ بعد حذف السطر الأخير، تصبح الأسطر الثلاثة الباقية مستقلة وهي أساس لفضاءالأسطر .

٢-٥-١١

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}; x = \begin{bmatrix} -4 \\ -\frac{5}{3} \\ -\frac{14}{3} \\ 0 \end{bmatrix}; y = \begin{bmatrix} -\frac{7}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{10}{3} \\ \frac{14}{3} \end{bmatrix}$$

٢-٥-١٢ 6; 1; 6; 6

٢-٥-١٦ (أ) $-y_1 - y_4 - y_3 = 0, y_1 - y_2 = 0, y_2 + y_3 - y_5 = 0$ (ب) بجمع المعادلات الثلاث (ج) ٣ (د) إنها تقابل العروتين المستقلتين $y_1 y_2 y_3$ و $y_3 y_5 y_4$

٢-٦-٤ قطع ناقص

٢-٦-١٠ e^t, e^{-t}

٢-٦-١١ $\frac{x+y}{2} e^t + \frac{x-y}{2} e^{-t}$; $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

٢-٦-١٣ أفرض $u = A^{-1}$ و $v = A^{-1}y$. لما كان A خطيافإن $A(cu + dv) = cAu + dAv = cx + dy$. لذا $A^{-1}(cx + dy) = cu + dv$ و A^{-1} و A خطيتان . بما أن التحوبلان يحققان $A^{-1}A = I$، فإن قاعدة الضرب تعني أن المصفوفتين المقابلتين تحققان $M^{-1}M = I$.

٢-٦-١٦ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ؛ النقل المزدوج لمصفوفة يعطي المصفوفة ذاتها .

٢-٦-١٩ $p(x), q(x) \in S \Rightarrow \int_0^1 (cp(x) + dq(x))\, dx = c\int_0^1 p(x)\, dx + d\int_0^1 q(x)\, dx$
$= 0 \Rightarrow cp(x) + dq(x) \in S \Rightarrow S$ فضاء جزئي و ؛
$-\frac{1}{2} + x, -\frac{1}{3} + x^2, -\frac{1}{4} + x^3$ أساس لـ S .

الباب الثالث

٣-١-٢ $(0, 0)$ و $(1, 1)$;$(1, 2)$ و $(1, 1)$

٣-١-٣ $(x_2/x_1)(y_2/y_1) = -1 \Rightarrow x_1y_1 + x_2y_2 = 0 \Rightarrow x^Ty = 0$

٣-١-٦ $(1, 1, -2)$; $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$, جميع مضاعفات
$(1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6})$.

٣-١-٨ $x \in V, x \in W \Rightarrow x^Tx = 0 \Rightarrow x = 0$

٣-١-١٠ $x_1 + x_2 - x_3 = 0$

٣-١-١١ $A^Ty = 0 \Rightarrow y^Tb = y^TAx = (y^TA)x = 0$ الأمر الذي يناقض $y^Tb \neq 0$

٣-١-١٤ $(x-y)^T(x+y) = 0 \Leftrightarrow x^Tx + x^Ty - y^Tx - y^Ty = 0 \Leftrightarrow x^Tx = y^Ty \Leftrightarrow \|x\| = \|y\|$

٣-١-١٨ $\mathbf{R}^4$ ؛ المتمم المتعامد مولد بـ $(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)$.

٣-١-٢٠ إنه يعني أن أي متجه متعامدمع كل متجه متعامد مع S ، واقع في S .

٣-١-٢٢ أساس واحد هو $(1,1,1,1)$.

٣-٢-١ (أ) $(x + y)/2 \geq \sqrt{xy}$ (ب) $\|x + y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2 \Rightarrow (x + y)^T$
$(x + y) \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 \Rightarrow x^Ty \leq \|x\|\,\|y\|$.

٣-٢-٣ $(10/3, 10/3, 10/3)$; $(5/9, 10/9, 10/9)$

٣-٢-٥ $(1/\sqrt{n}):\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/n \ldots & 1/n \end{bmatrix}$

٣-٢-٧ $b = (1, \ldots, 1); a_1 = \ldots = a_n$

٣-٢-٩ $p^2 = \frac{aa^Taa^T}{a^Taa^Ta} = \frac{a(a^Ta)a^T}{a^Taa^Ta} = \frac{aa^T}{a^Ta} = P$

٣-٢-١١ (أ) $\begin{bmatrix} \frac{9}{10} & -\frac{3}{10} \\ -\frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{9}{10} \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ مجموع مسقطين على مستقيمين متعامدين يعطي المتجه ذاته . المسقط على مستقيم ثم على آخر (متعامد مع الأول) يعطي دوماً صفراً .

٣-٢-١٣ $\frac{a_1 a_1}{a^T a} + \dots + \frac{a_n a_n}{a^T a} = 1$

٣-٢-١٤ $\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$

٣-٢-١٦ (أ) $P^T = P \Rightarrow (Px)^T y = x^T P^T y = x^T (Py)$ (ب) لا ؛ $1/3\sqrt{3}$, $1/\sqrt{15}$
(ج) $P^2 = P \Rightarrow (Px)^T Py = x^T P^T Py = x^T P^2 y = x^T (Py)$, 0° أو 180° (على المستقيم ذاته)

٣-٣-١ $(10 - 3x)^2 + (5 - 4x)^2; (4, -3)(3, 4)^T = 0$

٣-٣-٣ $\bar{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}; p = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}; b - p = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$

٣-٣-٥ $6 + (5/2)t; (7/2, 6, 17/2)$.

٣-٣-٨ فضاء أعمدة S ؛ رتبة k .

٣-٣-١٠ $A^T A = I, A^T b = 0; 0$

٣-٣-١٢ (أ) $(-1, 1, 0, 0), (-1, 0, 0, 1)$ (ب) $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$
(ج) $(0, 0, 0, 0)$

٣-٣-١٣ $61/35 - (36/35)t; (133/35, 95/35, 61/35, -11/35)$.

١٥-٣-٣ $H^2 = (I - 2P)^2 = I - 4P + 4P^2 = I - 4P + 4P = I$.

١٨-٣-٣ (١) $C + D + E = 3, C + 3E = 6, C + 2D + E = 5, C = 0$ (لا يوجد مثل هذا المستوي (c) $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 3 \\ 5 & 3 & 11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C \\ D \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 13 \\ 26 \end{bmatrix}$

١٩-٣-٣ $A^T(AA^T)^{-1}A$

٢١-٣-٣ $\begin{bmatrix} a_1^Ta_1 & -a_1^Ta_2 \\ -a_1^Ta_2 & a_2^Ta_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^Tb \\ -a_2^Tb \end{bmatrix}; x = (2, 1$

٢٤-٣-٣ $-3/10 - (12/5)t$.

٢٥-٣-٣ $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} C \\ D \\ E \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix}$

١-٤-٣ (أ) $-4 = C - 2D, -3 = C - D, -1 = C + D, 0 = C + 2D$ (ب) $-2 + t; 0$ (ج) b في فضاد الأعمدة ؛ bنفسه .

٣-٤-٣ $(-2/3, 1/3, -2/3)$ ؛ المجموع هو b نفسه؛ لاحظ أن $a_1a_1^T, a_2a_2^T, a_3a_3^T$ هي مساقط على ثلاثة إتجاهات متعامدة . مجموعها هو المسقط على الفضاء الكلي ويجب أن يكون الوحدة .

٥-٤-٣ $(I - 2uu^T)^T(I - 2uu^T) = I - 4uu^T + 4uu^Tuu^T = I; Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

٧-٤-٣ $\|b\|^2 = (x_1q_1 + \ldots + x_nq_n)^T(x_1q_1 + \ldots + x_nq_n) = x_1^2 + \ldots + x_n^2 \Rightarrow$ $b^Tb = x_1^2 + \ldots + x_n^2$.

٩-٤-٣ $0q_1 + 0q_2$. ١٢-٤-٣ $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 0 & 2\sqrt{2} \end{bmatrix}; 2$.

٣-٤-١٣ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

٣-٤-١٦ $A_{m\times n} = Q_{m\times n} R_{n\times n}$; $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 2/3 & 1/\sqrt{2} \\ 2/3 & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$.

٣-٤-١٧ $R\bar{x} = Q^T b \Rightarrow \bar{x} = R^{-1}Q^T b = (5/9, 0$.

٣-٤-١٨ لـ Q فراغ أعمدة A ذاته ، لذا $P = Q\,(Q^TQ)^{-1}Q^T = QQ^T$

٣-٤-٢٠ $1; \sqrt{(e^2 - 1)/2}$

٣-٤-٢٢ $0; \dfrac{\int_0^{2\pi} y\,(x)\,\sin x\,dx}{\int_0^{2\pi} \sin^2 x\,dx}$

٣-٤-٢٤ x^3 متعامدة مسبقاً مع الدالتين الزوجيتين 1و $\frac{1}{3}$ - x^2. لطرح مركبتها في إتجاه الدالة الفردية x ، نحسب $\frac{2}{5} = (x^3, x) = \int_{-1}^{1} x^3 x\,dx$ و $(x, x) = \int_{-1}^{1} x^3\,dx = \frac{2}{3}$ ؛ كثيرة حدود لوجاندر التالية هي :

$x^3 - (x^3, x)/(x, x)\,x = x^3 - \frac{3}{5}x$.

٣-٤-٢٧ $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0, 0), (1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, 0), (-1/2\sqrt{3}, -1/2\sqrt{3}, 1/2\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$

٣-٥-١ $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$

٣-٥-٢ $1, -1/2 + (\sqrt{3}/2)i, -1/2 - (\sqrt{3}/2)i$.

٣-٥-٥ $x = (2k+1)\pi,\ \theta = 2k\pi + \pi/2,$ ، k عدد صحيح .

٣-٥-٧ $(1, 0, 1, 0$.

٣-٥-٨ . (0, 1, 0, 1)

٣-٥-١٠

$y_0 = y'_0 + y''_0,\ y_1 = y'_0 - y''_0;\ y_0 = y'_0 + y''_0,\ y_1 = y'_1 + iy''_1,\ y_2 = y'_0 - y''_0,\ y_3 = y'_1 - iy''_0$

٣-٥-١١ $\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}2\\0\\0\\0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}2\\0\\2\\0\end{bmatrix}$

٣-٥-١٣ $c_0 = (f_0 + f_1 + f_2 + f_3)/4,\ c_1 = (f_0 - if_1 - f_2 + if_3)/4,$

$c_2 = (f_0 - f_1 + f_2 - f_3)/4,\ c_3 = (f_0 + if_1 - f_2 - if_3)/4;\ f_0 = 0, f_2$

$= 0, f_3 = -f_1 \Rightarrow c_0 = 0, c_2 = 0, c_3 = -c_1 \Rightarrow c$ زوجي أيضاً .

٣-٦-١ (أ) 7 ؛ (ب) 2 ؛ (ج) 13 .

٣-٦-٣ $V+W$ يحوي مصفوفات 4×4 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$ ،
سعة $(V+W)=13$

$V \cap W$ يحوي المصفوفات $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$ ، سعة $W \cap V = 7$

. $\dim(V + W) + \dim(V \cap W) = 20 = \dim V + \dim W$

٣-٦-٦ المستقيم المار من (1,0,0) (ليس بحاجة أن يكون متعامداً مع V) .

٣-٦-٧ $x = v_1 + w_1 = v_2 + w_2,\ v_1, v_2 \in V,\ w_1, w_2 \in W \Rightarrow v_1 - v_2 =$

$w_2 - w_1 \in V \cap W = \{0\} \Rightarrow v_1 = v_2,\ w_1 = w_2$

٣-٦-٩ $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، الفضاء الصفري لـ $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ لايحوي

$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ فضاء أعمدة AB غير محتوى في الفضاء الصفري لـ B .

٣-٦-١١ $\text{rank}\,(AB) \le \text{rank}\,(A),\ \text{rank}\,(A) \le n,\ n < m \Rightarrow \text{rank}\,(AB) < m \Rightarrow AB$
شاذة .

٣-٦-١٢

$\text{ranrank}\,(A + B) = \dim(\mathscr{R}(A) + \mathscr{R}(B)) \le \dim \mathscr{R}(A) + \dim \mathscr{R}(B) = \text{rank}\,(A) + \text{rank}\,(B))$

٣-٦-١٣ $\mathscr{N}(B) = \mathscr{N}(A^{-1}AB) \supseteq \mathscr{N}(AB) \supseteq \mathscr{N}(B) \Rightarrow \mathscr{N}(AB) = \mathscr{N}(B);$
فضاء الأسطر هو المتمم المتعامد، والرتبة هي عدد أبعاده – لذا سيكون ذلك ذاته من أجل B, AB .

٣-٦-١٥ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

٣-٦-١٦ $\dim(U \cap V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V) \Rightarrow \dim(U \cap V) \ge 6$
$+ 6 - 8 = 4 > 0,\ \dim(U \cap V \cap W) = \dim(U \cap V) + \dim(W) - \dim$
$(U \cap V) \cup W) \Rightarrow \dim(U \cap V \cap W) \ge 4 + 6 - 8 = 2 > 0$

٣-٦-١٨ $y \in V \cap W \Leftrightarrow y = x_1 v_1 + \ldots + x_k v_k$ وكذلك $y = -x_{k+1} w_1 - \ldots -$
$x_{k+1} w_l\ (*) \Leftrightarrow x_1 v_1 + \ldots + x_{k+1} w_l = 0 \Leftrightarrow x = (x_1, \ldots, x_{k+1}) \in \mathscr{N}(D)$
بسبب وحدانية التركيب (*) ، y يعطي x واحدة فقط في $\mathscr{N}(D)$.

٣-٦-٢٠ $\bar{x}\,w = \dfrac{w_1^2 b_1 + \ldots + w_m^2 b_m}{w_1^2 + \ldots + w_m^2}$

٣-٦-٢١ 5;11 ; المتسقيم المار من (1,-4) .

٣-٦-٢٢ $\bar{x}_w = \left(\frac{1}{21}, \frac{4}{7}\right);\ A\overline{x_w} = \left(\frac{1}{21}, \frac{13}{21}, \frac{25}{21}\right),\ b - A\overline{x_w} = \left(-\frac{1}{21}, \frac{8}{21}, -\frac{4}{21}\right)$

$(A\overline{x_w})W^TW(b - A\overline{x_w}) = ($.

٣-٦-٢٣ (أ) $E(e) = \frac{1}{2}(-2) + \frac{1}{4}(-1) + \frac{1}{4}(5) = 0, E(e^2) = \frac{1}{2}(-2)^2 + \frac{1}{4}(-1)^2$

$+ \frac{1}{4}(5^2) = \frac{17}{2}$ (ب) $w_1 = \sqrt{\frac{2}{17}}, w_2 = 2$

٣-٦-٢٤ $A = B + C$ حيث B تحوي تلك الأسطر الـ p وأصفاراً في بقية المواضع ،

$C = A - B$ ، $\text{rank}(A) \le \text{rank}(B) + \text{rank}(C) \le \mathcal{N} + 9$; ، 5×5 .

الباب الرابع

٤-٢-١ $2^n \det(A); (-1)^n \det(A); (\det(A))^2$

٤-٢-٣ 20; 5

٤-٢-٦ (أ) 0 (ب) 16 (ج) 16 (د) 1/16 (هـ) 16

٤-٢-٧ اضرب السطر الصفري بـ 2 . فيضرب ذلك $\det A$ بـ 2, لكن A لم تتغير يؤدي ذلك إلى $\det A = 0$.

٤-٢-٨ $(1 - ml)(ac - bc)$

٤-٢-١٠

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & 0 & (c-a)(c-b) \end{vmatrix} =$$

$(b-a)(c-a)(c-b)$.

٤-٢-١٢ (أ) خطأ ؛ $\det\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \ne 2\det\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (ب) خطأ ؛ $\det\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = -1$ ، محوراها 1،1 ، إلا أنه يوجد تبديل سطري . (ج) صح ؛ $\det(AB) = \det(A)\det(B) = 0$

٤-٢-١٣ جمع كل عمود من A إلى العمود الأول يعطي عموداً صفرياً لذا:

$\det A = 0$.إذا كان مجموع كل سطر يساوي الو احد ، فإن مجموع كل سطر من $A - I$ يساوي الصفر أي :

$\det(A - I) = 0$, $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ ، $\det A = 0$ ، لكن $\det A = 0 \neq 1$.

٤-٢-١٤ $.0;\ (1 - t^2)^3$

٤-٢-١٥ $\det(A) = 10,\ \det(A^{-1}) = \frac{1}{10},\ \lambda = 5,\ \lambda = 2$

٤-٢-١٧ أخذ المحددات يعطي $(\det C)(\det D) = (-\ )^n (\det D)(\det C)$.

٤-٣-١ $a_{12}\, a_{21}\, a_{34}\, a_{43}$ ؛ إنها زوجية ، $\det A = 1$.

٤-٣-٢ $\det A = (-1)^{1+2} \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = (-1) \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = (-1)(-1)^{1+2} \det \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} = 1$

٤-٣-٣ (١) صح (٢) خطأ (٣) خطأ .

٤-٣-٦ (ب) 6 ؛ $D_{1000} = D_{6 \times 166 + 4} = D_4 = -1$.

٤-٣-٨ من القانون (٦) ، من المؤكد أن $a_{1\alpha} \cdots a_{5v}$ صفر من أجل أي قيمة ممكنة $\alpha, \ldots, v$. أو استناداً إلى (٣-٦-٢٤) ، $\operatorname{rank} A \leq 2 + 2 = 4$

٤-٣-٩ بعملية سطرية على المصفوفا ت 4×4 نجعل A, D في مصفوفات مثلثية علوية : $\det \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix} = a_{11} a_{22} d_{11} d_{22} = \det(A)\ \det(D)$

٤-٣-١٠ $\det A_4 = -3;\ \det A_3 = 2;\ \det A_2 = -1;\ \det A_n = (-1)^{n-1}(n-1)$

٤-٣-١١ (أ) $n!(n-1)!$ (ب) $n!(1 + 1/2! + \ldots + 1/(n-1)!)$ (ج) $(n^3 + 2n - 3)/3$

٤-٣-١٣ $\begin{bmatrix} 0 & A \\ -B & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ B & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AB & A \\ 0 & I \end{bmatrix},\ \det \begin{bmatrix} I & 0 \\ B & I \end{bmatrix} = 1 \Rightarrow \det \begin{bmatrix} 0 & A \\ -B & I \end{bmatrix} =$

$\det \begin{bmatrix} AB & A \\ 0 & I \end{bmatrix} = \det(IB);$ أي $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},\ \det \begin{bmatrix} 0 & A \\ -B & I \end{bmatrix} = 5 = \det(AB);$

$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix},\ \det \begin{bmatrix} 0 & A \\ -B & I \end{bmatrix} = 0 = \det(AB);$ ؛ لأن AB مصفوفة تحقق $\operatorname{rank}(AB) \leq \operatorname{rank}(A) < m$.

٤-٤-٢ العنصر (i, j) من A_{cof}، الذي هو العامل المرافق A_{ji}، يساوي الصفر إذا كان $j < i$ و A مثلثية عليا .

٤-٤-٣ $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}; B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

٤-٤-٤ كون A متناظرة ⇐ الصغيرة i,j هي منقول الصغيرة j,i ⇐ $A_{ij} = A_{ji}$.

٤-٤-٦ (أ) $\det M = x_j$ (ب) انظر في العمود j من AM، إنه $Ax = b$. بقية أعمدة AM هي أعمدة A ، لذا $AM = B_j$

(ج) $\det A \ \det M = \det B_j \Rightarrow x_j = \det B_j / \det A$

٤-٤-٨ (أ) مساحة متوازي الأضلاع هذا هي $\det \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$. (ب) للمثلث $A'B'C'$ المساحة ذاتها ؛ لقد أزيح فقط عن نقطة الأصل .

٤-٤-١٠ $AC = CA \Rightarrow ACA^{-1} = C \Rightarrow \det A \ \det(D - CA^{-1}B) = \det(A(D - CA^{-1}B)) = \det(AD - CB)$

٤-٤-١١ (أ) أعمدة $AB = A$ مضروبة بأعمدة B. (ب) AB هو مجموع الأعمدة مضروبة بالأسطر (مصفوفات من الرتبة الأولى) .

٤-٤-١٥ عندما تضرب متبادلة بمتبادلة فردية فإنها تغير نوعها . لذا فإن $\sigma\sigma = \sigma^2$ زوجي . إذا كان σ^{-1} زوجياً فإن على $\sigma\sigma^{-1}$ أن يكون فردياً . لكن $\sigma\sigma^{-1} = 1$ زوجي .

٤-٤-١٦ قوى P هي جميع مصفوفات المبادلة لذا ستكون أخيراً واحدة منها مكررة . إذا كان $P^r = P^s$ فإن $P^{r-s} = I$.

٤-٤-١٧ إستناداً إلى القانون(٦)، $\det A \le 5! = 120$. أو إستناداً إلى $\det A = \text{volume}$، نجد $\det A \le (\sqrt{5})^5$. أو إستناداً إلى المحاور، نجد $\det A \le 1 \times 2 \times 4 \times 8 \times 16$.

الباب الخامس

٥-١-٢ $u = c_1\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{3t} = 6\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{2t} - 6\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{3t}$

٥-١-٤ $u = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{t}$

٥-١-٧

$Ax = \lambda x \Rightarrow (A - 7I)x = (\lambda - 7)x; Ax = \lambda x \Rightarrow x = \lambda A^{-1}x \Rightarrow A^{-1}x = (\pm/\lambda)x$

٥-١-٨ اختر $\lambda = 0$

٥-١-٩ المعامل هو $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n$. في $\det(\lambda - \lambda I)$، الحد الذي يحوي عنصراً غير قطري a_{ij} يستبعد كلاً من $\lambda - a_{jj}$ و $\lambda - a_{ii}$. لذا لايحوي مثل هذاالحد $(-\lambda)^{n-1}$. يجب أن يأتي معامل $(-\lambda)^{n-1}$ من القطر الرئيسي وهو: $a_{11} + \ldots + a_{nn} = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$.

٥-١-١٢ $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = -5, x_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}; \lambda_1 = a + b, \lambda_2 = a - b, x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

٥-١-١٤ rank $(A) = 1; \lambda = 0, 0, 0, 4; x_4 = (1, 1, 1, 1)$; rank $(B) = 2; \lambda = 0, 0, 2, -2; x_3 = (1, 1, 1, 1), x_4 = (1, -1, 1, -1)$

٥-١-١٥ rank $(A) = 1, \lambda = 0, \ldots, 0, n$; rank $(C) = 2, \lambda = 0, \ldots, n/2, -n/2$

٥-١-١٨ الفضاء الصفري مولد بـ v_0؛ $x = c_0v_0 + v_1 + \frac{1}{2}v_2$؛ v_0, v_1 مستقلان (القيم الذاتية مختلفة)، $\Leftarrow v_0$ ليست في فضاء الأعمدة المولد بـ v_2 و v_1 .

٥-٢-١ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1}; \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}^{-1}$.

٥-٢-٤ كان لها القيم الذاتية المختلفة 1,2,7؛ $\Lambda = \text{diag}\,(1, 2, 7)$

٥-٢-٥ لا يمكن تقطير المصفوفتين A_3 و A_1

٥-٢-٦ (أ) $a = -1$ أو $\lambda = 1$ (ب) $\text{trace} = 0$; المحددة = −١ (ج) $(8, -3)$.

٥-٢-٨ (أ) $Au = uv^{T}u = (v^{T}u)u \Rightarrow \lambda = v^{T}u$ (ب) بقية القيم الذاتية أصفار لأن $\dim \mathcal{N}(A) = n - 1$.

٥-٢-٩ $\text{trace}\,(AB) = \text{trace}\,(BA) = aq + bs + cr + dt \Rightarrow \text{trace}\,(AB - BA) = 0 \Rightarrow AB - BA = I$ مستحيل .

٥-٢-١٢ .F;T;T

٥-٢-١٣ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1}; \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; 4$

٥-٢-١٤ $\det A = \det\,(S\Lambda S^{-1}) = \det S \det \Lambda \det S^{-1} = \det \Lambda = \lambda_1 \ldots \lambda_n$

٥-٣-١ (أ) $A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, A^3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, A^4 = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, A^{100} = \begin{bmatrix} F_{101} & F_{100} \\ F_{100} & F_{99} \end{bmatrix}$

(ب) $1^{-101} = 1, (-1)^{-101} = -1$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}^{-1}$. لذا $B^{-101} = B$

٥-٣-٣ $\begin{bmatrix} G_{k+2} \\ G_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} G_{k+1} \\ G_k \end{bmatrix}, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -\frac{1}{2}; \begin{bmatrix} G_{k+1} \\ G_k \end{bmatrix} = S\Lambda^k S^{-1}$

$$\begin{bmatrix} G_1 \\ G_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{2})^k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, G_k = \left[1 - (-\tfrac{1}{2})^k\right]/3 \to \tfrac{1}{3}$$

٥-٣-٥ في الحالة الثابتة يموت الجميع: $d_\infty = 1, s_\infty = 0, w_\infty = 0$

٥-٣-٦ $\begin{bmatrix} \frac{7}{12} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$.

٥-٣-٧ $y_\infty = 3, z_\infty = 2, y_k = 3(1 - (0.5)^k), z_k = 2 + 3(0.5)^k$

٥-٣-١٠ (أ) $0 \le a, b \le 1$

(ب) $u_k = \begin{bmatrix} b/(1-a) & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & (a-b)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b/(1-a) & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2b}{b-a+1} - \frac{1-a-b}{b-a+1}(a-b)^k \\ \frac{2(1-a)}{b-a+1} - \frac{1-a-b}{b-a+1}(a-b)^k \end{bmatrix}$$

(جـ) $u_k \to \begin{bmatrix} \frac{2b}{b-a+1} \\ \frac{2(1-a)}{b-a+1} \end{bmatrix}$ إذا كان $|a-b| < 1$؛ لا

٥-٣-١١ (أ) $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ (ب) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{1}{2}, \lambda_3 = 0, x_1 =$ $(2, 1, 1),$ $x_2 = (0, -1, 1), x_3 = (2, -1, -1)$ (جـ) $(2, 1, 1)$

(د) $(2, 1 - (\frac{1}{2})^k, 1 + (\frac{1}{2})^k)$

٥-٣-١٢ مجموع مركبات Ax يساوي $x_1 + x_2 + x_3$ (مجموع كل عمود يساوي ١ ، ولم يضع شيء). مجموع مركبات λx يساوي $\lambda(x_1 + x_2 + x_3)$. إذا كان $\lambda \neq 1$، فإنه يجب أن يكون $x_1 + x_2 + x_3$ صفرا.

٥-٣-١٣ القيمتان الذاتيتان لـ $I + A$ هما $1 \pm i$ لذا $|\lambda| = \sqrt{2}$ غير مستقرة؛ القيمتان الذاتيتان لـ $(I - A)^{-1}$ هما $(1 \pm i)^{-1}$ لذا $|\lambda| = 1/\sqrt{2}$ مستقرة .

القيم الذاتية الثالثة هي $(1 \pm \frac{1}{2}i)^{-1}(1 \pm \frac{1}{2}i)$ لذا $|\lambda| = 1$ ، مستقرة حيادياً ؛ يقع هذا الحل على دائرة .

٥-٣-١٥ $a = 1.8, b = 1, c = 0.6$

٥-٣-١٧ $A^0 = I, A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0.5^2 \end{bmatrix}, A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5^3 \end{bmatrix}, \ldots, A^k = \begin{bmatrix} 0 & 0.5^{k-1} \\ 0 & 0.5^k \end{bmatrix} (k \geq 1)$

٥-٣-١٩ $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$

٥-٤-١ $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 0; x_1 = (1, -1), x_2 = (1, 1); e^{At} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{-2t} + 1 & -e^{-2t} + 1 \\ -e^{-2t} + 1 & e^{-2t} + 1 \end{bmatrix}$

٥-٤-٣ $u(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} + 2 \\ -e^{2t} + 2 \end{bmatrix}$. عندما $t \to \infty$ فإن $e^{2t} \to +\infty$

٥-٤-٤ $P^2 = P \Rightarrow e^P = I + P + P^2/2! + \ldots = I + (1 + 1/2! + \ldots) P = I + (e - 1)P$

$\approx I + 1.718P$

٥-٤-٥ (أ) $e^{A(t+T)} = Se^{\Lambda(t+T)}S^{-1} = S e^{\Lambda t}e^{\Lambda T}S^{-1} = Se^{\Lambda t}S^{-1}Se^{\Lambda T}S^{-1} = e^{At}e^{AT}$

٥-٤-٧ $e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; e^{At}u_0 = \begin{bmatrix} 4t + 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

٥-٤-٨ (أ) $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \lambda_1 = 3, x_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \lambda_2 = 2, x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ؛ غير مستقرة؛ (ب) $u = \begin{bmatrix} r \\ w \end{bmatrix} = 100e^{3t}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 100e^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (ج) تقترب النسبة من ١/٢ .

٥-٤-١١ A_1 مستقرة حيادياً من أجل $t \leq 1$، غير مستقرة من أجل $t > 1$. A_2

غير مستقرة من أجل $t > 4$ ، مستقرة حيادياً عند $t = 4$، مستقرة إذا كانت λ حقيقية من أجل $4 < t \leq 5$، مستقرة إذا كانت λ مركبة من أجل $t > 5$.

A_3 مستقرة إذا كانت λ حقيقية من أجل $t < -1$، مستقرة حيادياً عند $t = -1$، غير مستقرة من أجل $t > -1$.

٥-٤-١٣ (أ) $u'_1 = cu_2 - bu_3,\ u'_2 = -cu_1 + au_3,\ u'_3 = bu_1 - au_2 \Rightarrow u'_1u_1 + u'_2u_2 + u'_3u_3 = 0$

(ب) بما أن e^{At} مصفوفة قائمة فإن $\|u(t)\|^2 = \|e^{At}u_0\|^2 = \|u_0\|^2$ ثابت .

(ج) $\pm(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2})i$ أو $\lambda = 0$

٥-٤-١٤ $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -9, \omega_1 = 1, \omega_2 = 3; u(t) = (a_1) \text{co}\, t + b_1 \sin t) x_1 + (a_2 \cos 3t + b_2 \sin 3t) x_2$

٥-٤-١٧ $(A - \lambda F - \lambda^2 I)x = 0$ أو $Ax = \lambda Fx + \lambda^2 x$

٥-٤-١٩ قيمها الذاتية حقيقية $\Leftrightarrow 0 \leq -4(-a^2 - b^2 + c^2) \geq 0 \Leftrightarrow (\text{trac})^2 - 4\det \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq c^2$

٥-٤-٢٠
$$u = \begin{bmatrix} \frac{8}{3}e^{t} & -6e^{3t} & +\frac{13}{3}e^{4t} \\ & -6e^{3t} & +6e^{4t} \\ & & e^{4t} \end{bmatrix}$$

٥-٥-٢ (١) إنه حقيقي (٢) إنه على دائرة الوحدة (٣) إنه أيضاً على دائرة الوحدة . (٤) إنه على أو خارج الدائرة التي نصف قطرها 2.

٥-٥-٣

$\bar{x} = 2 - i,\ x\bar{x} = 5,\ xy = -1 + 7i,\ 1/x = 2/5 - (1/5)i,\ x/y = 1/2 - (1/2)i$;
$|xy| = \sqrt{50} = |x|\ |y|,\ |1/x| = 1/\sqrt{5} = 1/|x|$

٥-٥-٤ $\sqrt{3}/2 + (1/2)i,\ 1/2 + (\sqrt{3}/2)i,\ i$

٥-٥-٥ (أ) $\bar{x} = re^{-i\Theta}$, $x^{-1} = (1/r)\, e^{-i\Theta}$, $x^2 = r^2 e^{i2\Theta}$ ؛ إنها على دائرة الوحدة .

٥-٥-٨ (١) $U = \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ i & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ؛ $Ax = 0$ إذاكان x مضاعفاً لـ $\begin{bmatrix} i \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ؛ هذا المتجه ليس متعامداً مع أعمده A^T (أسطر A) بل مع أعمدة A^H.

٥-٥-١٠ (أ) $n(n+1)/2, n, (n-1)/2$ (ب) العناصر الثلاثة الواقعة على القطر حقيقية. للعناصر الثلاثة الواقعة فوق القطر ست درجات حرية. العناصر الثلاثة الواقعة تحت القطر متساوية ، لذا فإن مجموع درجات الحرية للمصفوفة الهيرميتية يساوي ٩ . من أجل المصفوفات الواحدية هو أيضاً ٩ ،

$\text{Re}\, u_{11}, \text{Im}\, u_{11}, \text{Re}\, u_{21}, \text{Im}\, u_{21}, \text{Re}\, u_{31}, \text{Re}\, u_{12}, \text{Im}\, u_{12}, \text{Re}\, u_{22}, \text{Re}\, u_{13}$

يظهر كذلك أذاكان لـ $U\Lambda U^H$ ، $9+3=12$ درجة حرية لكن ثلاثاً منها قد استخدمت لضرب الأعمدة (متجهات ذاتية) بمعامل إختياري $e^{i\Theta}$ وتختفي من الجداء الثلاثي .

٥-٥-١١ $P: \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, x_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, x_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}; Q: \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$

$x_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, x_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}; R: \lambda_1 = 5, \lambda_2 = -5, x_1 = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}, x_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$

٥-٥-١٣ (أ) إنها متعامدة مع كل واحد آخر . (ب) الفضاء الصفرى مولد بالمتجه u ؛ الفضاء الصفري اليساري مطابق للفضاء الصفري ؛ فضاء الأسطر مولد بـ v و w ، فضاء الأعمدة هو فضاء الأسطر نفسه . (ج)

(د) . x إلى u لـ u أي مضاعف لـ u إلى x ؛ لا ، يمكننا أن نضيف أي مضاعف لـ u إلى x . $x = v + \frac{1}{2}w$
$b^{T}u = 0$. (هـ) $S^{-1} = S^{T}; S^{-1}AS = \text{diag}(0, 1, 2)$

٥-٥-١٤ A قائمة ، قابلة للعكس ، مبادلة ، قابلة للتقطير ، ماركوف . إسقاط ، هيرميتية ، من الرتبة واحد ، قابلة للتقطير . القيم الذاتية لـA هي $\pm i$ و ± 1 . القيم الذاتية لـ B هي 0,0,0,4 .

٥-٥-١٥ عددأبعاد Sهو $n(n+1)/2$ ليسn . كل مصفوفة متناظرة A تساوي تركيبn إسقاطاً ، لكن هذه الإسقاطات تتغير إذا تغيرتA . لا يوجد أساس لـ n من مصفوفات الإسقاط الثابتة .

٥-٥-١٨ المحددة هي الجداء $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ بالقيمة المطلقة $|\lambda_1| \ldots |\lambda_n| = 1$ (أو $|\det U|^2 = \det U^{H}U = \det I = 1$) . للمصفوفة $U = [i]$ ذات النوع 1×1 $\det U = i$ ؛ بصورة عامة $U = \begin{bmatrix} a\cos\Theta & b\sin\Theta \\ c\sin\Theta & a\cos\Theta \end{bmatrix}$ ، حيث $|a| = |b| = |c| = |d| = 1$ و $\bar{a}b + \bar{c}d = 0$.

٥-٥-١٩ يمكن أن يكون العمود الثالث $(1, -2, i)/\sqrt{6}$ ، مضروباً بأي عدد (حقيقي أو مركب) ذي قيمة مطلقة تساوي الواحد .

٥-٥-٢٠ $\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & \\ & 2i \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, e^{kt} = Se^{\Lambda t}S^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+e^{2it} & -1+e^{2it} \\ -1+e^{2it} & 1+e^{2it} \end{bmatrix}$

$t = 0$ عند , $\frac{de^{kt}}{dt} = \begin{bmatrix} i & i \\ i & i \end{bmatrix} = K$

٥-٥-٢٤ $\begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ c_3 & c_0 & c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 & c_0 & c_1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_0 \end{bmatrix}; Cx = \begin{bmatrix} c_0x_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \\ c_3x_0 + c_0x_1 + c_1x_2 + c_2x_3 \\ c_2x_0 + c_3x_1 + c_0x_2 + c_1x_3 \\ c_1x_0 + c_2x_1 + c_3x_2 + c_0x_3 \end{bmatrix}$

٥-٦-١ $C = N^{-1}BN = N^{-1}M^{-1}AMN = (MN)^{-1}A(MN)$ ؛ مصفوقة الوحدة .

٥-٦-٢ لهذه المصفوفات القيمتان الذاتيتان ١ و -١ با ثريساوي الصفر ومحددة تساوي -١ ، مثلا : $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

٥-٦-٤ $M = \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}, A = MBM^{-1}$

٥-٦-٦ (أ) $CD = -DC \Rightarrow C = D(-C)D^{-1}$ (ب) إذا كانت $\lambda_1, ..., \lambda_n$ القيم الذاتية لـ C ، فإن $-\lambda_1, ..., -\lambda_n$ هي القيم الذاتية لـ $-C$. إستنادا إلى (أ) ، سيكون لـ C و $-C$ القيم الذاتية ذاتها ، لذا على $\lambda_1, ..., \lambda_n$ أن تظهر أزواجاً بإشارة زائد - ناقص . (ج)

$Cx = \lambda x \Rightarrow DCx = \lambda Dx \Rightarrow -C(Dx) = \lambda(Dx) \Rightarrow C(Dx) = -\lambda(Dx)$

٥-٦-٧ العنصر (3,1) هو $g \cos \Theta + h \sin \Theta$ ، و يساوي الصفر عندما $\tan \Theta = -g / h$

٥-٦-٨ $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

٥-٦-١٠

$c_1 V_1 + c_2 V_2 = (m_{11} c_1 + m_{12} c_2) v_1 + (m_{21} c_1 + m_{22} c_2) v_2 = d_1 v_1 + d_2 v_2$

٥-٦-١١ مصفوفته بالنسبة لـ v_1 و v_2 هي $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ مصفوفة بالنسبة لـ V_1 و V_2 . هي $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. أفرض $A = MBM^{-1}$, $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

٥-٦-١٣ (أ) $D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ؛ (ب) $D^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; D^3 هي المصفوفة المشتقة الثالثة . المشتقة الثالثة لكل من x^2 و $1, x$ هي الصفر ، لذا $D^3 = 0$ (ج) $\lambda = 0$ (ثلاثية) ؛ متجه ذاتي واحد فقط $(1, 0, 0)$.

٥-٦-١٤ $f = e^{\lambda x}$ متجه ذاتي لـ α / dx يقابل القيمة الذاتية λ. إذا كان $\int_0^x f(t)\, dt = \lambda f(x)$ فإن إشتقاق الطرقين يعطي $f(x) = \lambda f'(x)$ و $f(x) = ce^{x/\lambda}$، إلا أن التكامل من 0 إلى x يعطي $c\lambda(e^{x/\lambda} - 1) \neq \lambda f(x)$.

٥-٦-١٥ القيم الذاتية هي 1(ثلاثية) و1- . المصفوفات الذاتية هي

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

٥-٦-١٧ (١) $TT^{H} = U^{-1}AUU^{H}(U^{-1})^{H} = I$ (٢) إذاكانت T مثلثية وواحدية، فإن عنا صرها القطرية (القيم الذاتية) ستكون ذوات قيم مطلقة تساوي الواحد. إذن جميع العناصرغير القطرية أ صفا ر لأن الأعمدة ليست متجهات وحده .

٥-٦-٢٠ $\|Nx\|^2 = x^{H}N^{H}Nx = x^{H}NN^{H}x = \|N^{H}x\|^2$؛ بفرض $x = e_i$ نجد $\|\text{column } i\| = \|\text{row } i\|$.

٥-٦-٢٢ $U = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

٥-٦-٢٣ القيم الذاتية لـ $A(A - I)(A - 2I)$ هي $0, 0, 0$.

٥-٦-٢٤ من أصفار القطر في $T - \lambda_1 I, T - \lambda_2 I, T - \lambda_3 I$، نستنتج أن $P(T)$، جداء هذه المصفوفات يساوي الصفر. إذن $A - \lambda I = U(T - \lambda I)U^{-1}$ لذا

$(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I)(A - \lambda_3 I) = U(T - \lambda_1 I)(T - \lambda_2 I)(T - \lambda_3 I)U^{-1} = UOU^{-1} = 0$

٥-٦-٢٧ للمصفوفة متجه ذاتي واحد فقط، لذا فإن شكل جوردان المتعلق به ذو كتلة واحدة : $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$

٥-٦-٢٨ $M^{-1}J_3M = 0$ ، لذافإن المتباينتين الأخيرتين سهلتان ؛ $MJ_1 = J_2M$ يقتضي أن العمود الأول من M يساوي الصفر ، لذا لن تكون قابلة للعكس .

٥-٦-٣٠

$$J^{10} = \begin{bmatrix} 2^{10} & 10.2^9 \\ 0 & 2^{10} \end{bmatrix}; A^{10} = 2^{10}\begin{bmatrix} 61 & 45 \\ -80 & -59 \end{bmatrix}; e^{A} = e^2\begin{bmatrix} 13 & 9 \\ -16 & -11 \end{bmatrix}$$

٥-٦-٣١ J_1 كتلة من النوع 4×4 ؛ J_2 كتلتان من النوع 3×3 و1×1 ؛ كتلتان من النوع2×2 ؛ J_4 ثلاث كتل من النوع 2×2 ، 1×1 ؛ J_5 أربع كتل من النوع1×1 تساوي الصفر . لكل من J_2 و J_3 متجهان ذاتيان

الباب السادس

٦-١-١ $ac - b^2 = 2 - 4 = -2 < 0; f = (x + 2y)^2 - 2y^2$

٦-١-٢ (أ) لا (ب) لا (ج) نعم(د) لا . في (ب)f تساوي الصفر على المستقيم$x=y$.

٦-١-٣ $\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - (a + c)\lambda + ac - b^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = (a + c) +$
$\lambda_1 > 0$ $\sqrt{(a-c)^2 + b^2)/2}$ ، $\lambda_2 = ((a + c) - \sqrt{(a - c)^2 + 4b^2})/2;$ واضحة ،
لأن $\lambda_\chi > 0$ لآن $(\alpha+c)^2 > (\alpha-c)^2 + 4b^2$ مكافئة لـ $\alpha c > b$

٦-١-٤ مصفوفات المشتقة الثانية $\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -5 & 12 \end{bmatrix}$ (نهاية صغرى ٩ ، $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ (نهاية عظمى) .

٦-١-٥ (أ) $-3 < b < 3$ (ب) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9-b^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (ج) $-\frac{1}{2(9-b^2)}$
(د) لا توجد نهاية صغرى .

٦-١-٦ لا؛ $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

٦-١-٧ (أ) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(ب) $f_1 = (x_1 - x_2 - x_3)^2 = 0$ عندما $x_1 - x_2 - x_3 = 0$

(جـ) $f_2 = (x_1 - x_2 - x_3)^2 + (x_2 - 3x_3)^2 - 7x_3^2$

(د) $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}, D = \text{diag}(1, 1, -7)$

٦-١-٨ معرفة إيجابياً $\Leftrightarrow \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0 \Leftrightarrow 1/\lambda_1 > 0, 1/\lambda_2 > 0 \Leftrightarrow$
A^{-1} معرفة إيجابياً. آختبار مباشر: $A^{-1}_{11} = c/(ac - b^2) > 0$ و
$\det A^{-1} = 1/\det A > 0$.

٦-١-٩ $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$؛ معاملات المربعات هي المحاور في D،
بينما المعاملات الواقعة داخل المربعات هي أعمدة L.

٦-١-١٠ $R^2 = \begin{bmatrix} p^2 + s^2 & s(p+t) \\ s(p+t) & s^2 + t^2 \end{bmatrix}$ معرفة إيجابياً
$\Leftrightarrow (p^2 + s^2)(s^2 + t^2) > s^2 (p+t)^2 \Leftrightarrow (s^2 - pt)^2 > 0 \Leftrightarrow s^2 - pt \neq 0 \Leftrightarrow R$
غير شاذة.

٦-١-١١ (أ) محوراها a و $c - |b|^2/a$ و $\det A = ac - |b|^2$. (ب)
$f = \left|x_1 + (b/a)x_2\right|^2 + \left(c + |b|^2/a\right)\left|x_2\right|^2$.

٦-١-١٢ مصفوفة المشتقة الثانية هي $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$، لذا F ليس لها نهاية صغرى
عند $(1,1)$.

٦-١-١٣ $a > 1$ و $(a-1)(c-1) > b^2$

٦-٢-١ $a > 1$؛ لاتوجد قيمة لـ b تجعل B معرفة إيجابياً .

٦-٢-٢ B و C معرفتان إيجابياً ، A ليست كذلك .

٦-٢-٣ $\det A = -2b^3 - 3b^2 + 1 < 0$ عند $b = 2/3$

٦-٢-٤ إذاكان لـ A قيم ذاتية λ_i موجبة ، فإن القيم الذاتية لـA^2 هي λ_i^2 والقيم الذاتية لـ A^{-1}هي $1/\lambda_i$ وهي كلها موجبة أيضاً ؛ إستناداً إلى الإختبار 2 A^{-1} و A^2معرفتان إيجابياً .

٦-٢-٥ إذاكان $x^{\mathrm{T}}Bx > 0$ و $x^{\mathrm{T}}Ax > 0$ لكل $x \neq 0$، فإن $x^{\mathrm{T}}(A+B)x > 0$؛ الشرط(1) .

٦-٢-٦ $R = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}; R = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

٦-٢-٧ بسبب كون $\Lambda > 0$

فإن $R = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}; R = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+\sqrt{3} & -1+\sqrt{3} \\ -1+\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \end{bmatrix}$

٦-٢-٨ إذا كان $x^{\mathrm{T}}Ax > 0$ لكل $x \neq 0$ ، فإن $x^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}ACx = (Cx)^{\mathrm{T}}A(Cx) > 0$ (C غير شاذة لذا $Cx \neq 0$)

٦-٢-٩ $|x^{\mathrm{T}}Ay|^2 = |x^{\mathrm{T}}R^{\mathrm{T}}Ry|^2 = |(Rx)^{\mathrm{T}}Ry|^2 \leq \|Rx\|^2 \|Ry\|^2 = (x^{\mathrm{T}}R^{\mathrm{T}}Rx)$
$(y^{\mathrm{T}}R^{\mathrm{T}}Ry) = (x^{\mathrm{T}}Ax)(y^{\mathrm{T}}Ay)$

٦-٢-١٠ $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4$ ، شبها محورين يذهبان إلى $(0, \pm\frac{1}{2})$ و $(\pm 1, 0)$.

٦-٢-١١ $A = \begin{bmatrix} 3 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2 \end{bmatrix}$ حيث 4 و $\lambda = 1$ ،

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}u + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}v\right)^2 + \alpha\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}u - \frac{1}{\sqrt{3}}v\right)^2 = 1 .$$

٦-٢-١٢ قيمة ذاتية صفرية واحدة تسحب مجسم القطع الناقص ليصبح اسطوانة

لا نهائية $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 \; y_2^2 = 1$ على طول المحو ر الثالث ؛ قيمتان ذاتيتان صفريتان تبقيان فقط المستويين $y_1 = \pm 1\sqrt{\lambda_i}$؛ ؛ ثلاث قيم ذاتية صفرية تترك $0 = 1$ (لا يوجد بيان) .

٦-٢-١٣ (١) $x^T Ax < 0$ لكل متجه x غير صفري . (٢) جميع القيم الذاتية لـ A تحقق $\lambda_i < 0$. (٣) $\det A_1 < 0, \det A_2 > 0, \det A_3 < 0$ (٤) جميع المحاور (دون تغييرات سطرية) تحقق $d_i < 0$. (٥) توجد مصفوقة R بأعمدة مستقلة تحقق $A = -R^T R$.

٦-٢-١٤ إداكان العنصر القطري i صفراً، نفرض $x = e_i$ ، فيكون $x^T Ax = 0$. أي من المستحيل أن تكون A معرفة سلبياً .

٦-٢-١٥ B معرفة إيجابياً . C معرفة سلبياً . A و D غير معرفتين . يوجد حل حقيقي لأن المربع يأ خذقيماً سالبة ، ويمكن تغيير مقياس x لنحصل على -١ .

٦-٢-١٦ . F; T; T; T

٦-٢-١٧ $\det A = a_{11} A_{11} + \ldots$. إذا كانت A معرفة إيجابياً فإن $A_{11} > 0$. عندما تزداد a_{11} ، فإن $a_{11} A_{11}$ تزداد بينما الأ خرى لا تتغير وهذا يؤدى إلى أن $\det A$ تزداد .

٦-٢-١٨ a_{jj} = (السطر j من R^T)(العمود j من R) = مربع طول العمود j من R ؛ $\det A = (\det R)^2$ = (حجم متوازي سطوح R)^2 ≥ جداء مربعات أطوال أعمدة $R = a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}$.

٦-٢-١٩ $x^H AMx + x^H M^H Ax = -x^H x \Rightarrow \lambda x^H Ax + (\lambda x)^H Ax = -x^H x \Rightarrow$
$(\lambda + \bar{\lambda}) x^H Ax = -x^H x \Rightarrow \lambda + \bar{\lambda} = 2\,\mathrm{Re}\,\lambda < 0$.

٦-٣-١ $2(x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3)^2 + \frac{3}{2}(x_2 - x_3)^2;\ (x_1 + x_2 + x_3)^2$.

٦-٣-٢ A غير معرفة ، B شبه معرفة إيجابياً .

٦-٣-٣ لـ A و $C^{T}AC$

$\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0. C(t) = tQ + (1-t)QR, Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ؛ لـ C قيمة ذاتية واحدة موجبة وأخرى سالبة ، لكن لمصفوفة الوحدة قيمتان ذاتيتان موجبتان .

٦-٣-٤ لا .

٦-٣-٥ محاور $A - \frac{1}{2}I$ هي $2.5, 5.$ لذا فإن إحدى القيم الذاتية سالبة وهذا يؤدي إلى أن لـ A قيمة ذاتية أصغر من $1/2$.

٦-٣-٦ (ب) $p + q \leq n$ لأنه لايمكن وجود أكثر من n متجهاً مستقلة خطياً .

٦-٣-٧ $\text{rank}\,(C^{T}AC) \leq \text{rank}\,A,\ \text{rank}\,(C^{T}AC) \geq \text{rank}\,((C^{T})^{-1}C^{T}ACC^{-1}) =$
$\text{rank}\,A \Rightarrow \text{rank}\,(C^{T}AC) = \text{rank}A$.

٦-٣-٨ لـ A عدد من القيم الذاتية الموجبة يساوي $\frac{1}{2}n$ ومثلها من القيم الذاتية السالبة $\frac{1}{2}n$.

٦-٣-٩ لا .

٦-٣-١٠ $\begin{bmatrix} \sqrt{3} - 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{3} \\ -1 \end{bmatrix} = 0; u_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = -\frac{1}{2}$ ؛ الكتلة الصغرى تصل حتى $\sqrt{3}$ رغم أن الكتلة الكبرى لايمكنها أن تتجاوز إنتقالها الأول وهو ١ .

٦-٣-١١ $\lambda_1 = 54, \lambda_2 = 54/5, x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

٦-٣-١٢ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, |A - \lambda M| = -\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$.

٦-٤-١ $P = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - x_2x_3 + x_3^2 - 4x_1 - 4x_3; \partial P/\partial x_1 = 2x_1 - x_2 - 4$

. $\partial P/\partial x_2 = -x_1 + 2x_2 - x_3,\ \partial P/\partial x_3 = -x_2 + 2x_3 - 4$

٦-٤-٢ ثابت = $-\frac{1}{2}\, b^TA^{-1}b$. لأن A متناظرة ومعرفة إيجابياً .

٦-٤-٣ $\partial P_1/\partial x = x + y = 0, \partial P_1/\partial y = x + 2y - 3 = 0 \Rightarrow x = -3, y = 3$. ليس لـ P_2 نهاية صغري (إجعل $y \to \infty$) . إنها ترافق المصفوفة شبه المعرفة ايجابياً $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

٦-٤-٤ إنهاء Q إلى النهاية الصغرى يؤدي الى المعادلة النظامية $A^TAx = A^Tb$.

٦-٤-٥ ضع $x = (1, \dots, 1)$ في نسبة رايلي (يصبح المقام n) عندئذ $\lambda_1 \le$ مجموع جميع $a_{ij} \le n\,\lambda_n$.

٦-٤-٦ النهاية الصغري هي $R(x) = 1$ حيث $x = (1, 1)$.

٦-٤-٧ لما كان $x^TBx > 0$ كل متجه غير صفري x، فإنه يمكن لـ $x^T(A+B)x$ أن يكون أكبر من x^TAx .

٦-٤-٨ إذا كان $(A+B)x = \Theta_1 x$ فإن $0_1 = \frac{x^TAx}{x^Tx} + \frac{x^TBx}{x^Tx} \ge \lambda_1 + \mu_1$.

٦-٤-٩

$$\lambda_2(A+B) = \text{mn}_{s_2}\left[\max_{x \text{ in } s_2} \frac{x^T(A+B)x}{x^Tx}\right] \ge \min_{s_2}\left[\max_{x \text{ in } s_2} \frac{x^TAx}{x^Tx}\right] = \lambda_2(A)$$

٦-٤-١٠ $\lambda_1 \le \mu \le \lambda_3$.

٦-٤-١١ $\frac{1}{2};\ (3 - \sqrt{3})/4$.

٦-٤-١٢ $\lambda_1\lambda_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 \le \lambda_n(y_1^2 + \dots + y_n^2) \Rightarrow R(x) \le \lambda_n$.

٦-٤-١٣ (أ) $\max_{x \text{ in } s_j} R(x) > 0 \Leftarrow \lambda_j = \min_{s_j}\left[\max_{x \text{ in } s_j} R(x)\right] > 0$ لكل S_j وهذا يؤدي إلى أن S_j تحوي متجها x بحيث يكون $R(x) > 0$ (ب)

$$y = C^{-1}x \Rightarrow x = Cy \Rightarrow \overline{R}(y) = \frac{y^TC^TACy}{y^Ty} = \frac{x^TAx}{x^Tx} = R(x) > 0$$

٦-٤-١٤ $x = e_1,\ \lambda_1 = \min_x \dfrac{x^T Ax}{x^T Mx} \le \dfrac{a_{11}}{m_{11}}$.

٦-٤-١٥ إن ذلك مولد بالمتجهين الذاتيين x_2 و x_1 .

٦-٤-١٦ واحدة موجبة ، واحدة سالبة و $n-2$ صفراً .

٦-٥-١ $A = 4\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ ، $b = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ ، $Ay = b \Rightarrow y = \begin{bmatrix} \frac{3}{16} \\ \frac{1}{16} \\ \frac{3}{16} \end{bmatrix}$ ،

$U = \frac{3}{16}V_1 + \frac{1}{16}V_2 + \frac{3}{16}V_3 \Rightarrow$ عند العقد $x = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ ، $U = u$

٦-٥-٢ $-u'' = x,\ u(0) = u(1) = 0 \Rightarrow u = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}x$ ؛

$A = 3\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} \\ \frac{2}{9} \end{bmatrix},\ Ay = b \Rightarrow y = \begin{bmatrix} \frac{4}{81} \\ \frac{5}{81} \end{bmatrix}$ ،

$U = \frac{4}{81}V_1 + \frac{5}{81}V_2 = \begin{cases} \frac{4}{27}x & 0 \le x \le \frac{1}{3} \\ \frac{1}{27}x + \frac{1}{27} & \frac{1}{3} \le x \le \frac{2}{3} \\ \frac{5}{27} - \frac{5}{27}x & \frac{2}{3} \le x \le 1 \end{cases}$ الخطأ الأكبر عند $x = \dfrac{\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}$

٦-٥-٣ $A_{33} = 3,\ b_3 = \frac{1}{3},\ A = 3\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},\ b = \begin{matrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{matrix},\ Ay = b \Rightarrow y = \begin{matrix} \frac{5}{9} \\ \frac{8}{9} \\ 1 \end{matrix}$

٦-٥-٤

$A = \left[\frac{16}{4}\right],\ b = [2],\ Ay = b \Rightarrow y = \left[\frac{3}{8}\right],\ U = \frac{3}{8}V_1 = \begin{cases} \frac{3}{2}x & 0 \le x \le \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x & \frac{1}{4} \le x \le 1 \end{cases}$

٦-٥-٥ كامل بالتجزئة :

$$A_{ij}$$ تجـــد $$\int_0^1 -V_i''V_j dx = \int_0^1 V'_i V'_j dx - \left[V'_i V_j\right]_{x=0}^{x=1} = \int_0^1 V'_i V'_j dx =$$ نفسها .

٦-٥-٦ ثلث V يعطي أصغر قيمة لـ P .

٦-٥-٧ $A = 4, M = \frac{1}{3}$ ، $\lambda = 12$ هي أكبر من القيمة الذاتية الحقيقية .

٦-٥-٨ $M = \begin{bmatrix} \frac{2}{9} & \frac{1}{18} \\ \frac{1}{18} & \frac{2}{9} \end{bmatrix}$ أنظر ٦-٣-١١ من أجل الباقي .

٦-٥-٩ $h / 6$ تضرب المصفوفة الثلاثية الأقطار $1,4,1$.

الباب السابع

٧-٢-١ إذا كانت Q قائمة فإن $\|Q\| = \max \|Qx\| / \|x\| = 1$ ، لأن Q تحافظ على الأطوال ؛ $\|Qx\| = \|x\|$ من أجل كل x. كذلك Q^{-1} قائمة ونظيمها يساوي 1 $c(Q) = 1$.

٧-٢-٢ متراجحة المثلث للمتجهات تعطي $\|Ax + Bx\| \le \|Ax\| + \|Bx\|$ ، وعندما نقسم على $\|x\|$ ونأخذ النهاية العظمي للنهاية الصغرى لكل حد، ستكون النتيجة هي متراجحة المثلث لنظيم المصفوفات .

٧-٢-٣ $\|ABx\| \le \|A\| \|Bx\|$ استناداً إلى تعريف نظيم A ولذا يكون $\|Bx\| \le \|B\| \|x\|$. نقسم على $\|x\|$ ونأخذ النهاية العظمى للنهاية

الصغري، نجد الأمر ذاته صحيح من أجل العكس ؛ $\|B^{-1}A^{-1}\| \le \|B^{-1}\|\,\|A^{-1}\|$ بضرب هاتين المتراجحتين نجد $c(AB) \le c(A)c(B)$.

٧-٢-٤ $c(A) = 3$ ، $\|A\| = 3$ ، $\|A^{-1}\| = 1$ ؛ خذ $\delta b = x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ، $b = x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

٧-٢-٥ بالتعريف $\|A\| = \max \|Ax\| / \|x\|$ ، اختر x بحيث يكون القيمة الذاتية الخا صة في السؤال ؛ عندئذ $\|Ax\| = |\lambda|\,\|x\|$ وتكون النسبة مساوية $|\lambda|$ وهذا يؤدي إلى أن النهاية العظمى للنسبة تساوي على الأقل $|\lambda|$.

٧-٢-٦ $A^{T}A = \begin{bmatrix} 1 & 100 \\ 100 & 10001 \end{bmatrix}, \ \lambda^2 - 10002\lambda + 1 = 0, \ \lambda_{max} = 5001 + (5001^2 - 1)^{1/2}$

النظيم هو مربع الجذر وهو مطابق لما يتعلق بـ $\|A^{-1}\|$.

٧-٢-٧ لـ AA^{T} و $A^{T}A$ القيم الذاتية نفسها (حتى لو كانت A شاذة، وهي حالة نهائية في التمرين). فعلاً نجد، $A^{T}Ax = \lambda x \Rightarrow AA^{T}(Ax) = A\,(A^{T}Ax) = \lambda(Ax)$ وبمساوات القيم الذاتية العظمى ، نجد $\|A^{T}\| = \|A\|$.

٧-٢-٨ بما أن $A = R^{T}R$ و $A^{-1} = R^{-1}(R^{t})^{-T}$ ، لذا نجد $\|A\| = \|R\|^2$ و $\|A^{-1}\| = \|(R^{T})^{-1}\|^2 = \|R^{-1}\|^2$. (من التمرين السابق ، للمنقول النظيم ذاته). لذا فإن $c(A) = c(R))^2$.

٧-٢-٩ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\lambda_{max}(A+B) > \lambda_{max}(A) + \lambda_{max}(B)$ ، (لأن 1>0+0) وكذلك ، $\lambda_{max}(AB) > \lambda_{max}(A)\lambda_{max}(B)$.

٧-٢-١٠ إذا كان $x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ، فإن $Ax = \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \end{bmatrix}$ و $\|Ax\|_{\infty} / \|x\|_{\infty} = 7$. إن تلك هي الحالة القصوى، و $\|A\|_{\infty} = 7$ هي مجموع عناصر السطر الأكبر بالقيمة المطلقة (لـ x الأقصى المركبتان ± 1).

٧-٢-١١ لـ $B^2 = \begin{bmatrix} A^TA & 0 \\ 0 & AA^T \end{bmatrix}$ القيم الذاتية σ_i^2 (و $m-n$ صفراً). لذا فإن القيم الذاتية لـ B هي $\pm\sigma_i$ و $\|m-n\|$ صفرا.

٧-٢-١٢ (أ) نعم. (ب) $A^{-1}b = x \Rightarrow \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \le c\,\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \Rightarrow \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \ge \frac{1}{c}\,\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$

٧-٣-١ $u_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, u_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}, u_3 = \begin{bmatrix} 14 \\ -13 \end{bmatrix}; u_\infty = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

٧-٣-٢ $u_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, u_1 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 10 \\ 11 \end{bmatrix}, u_2 = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 31 \\ 32 \end{bmatrix}, u_3 = \frac{1}{27}\begin{bmatrix} 94 \\ 95 \end{bmatrix}$ ؛ حيث التغير، $\alpha = \frac{26}{25}$ و $u_1 = \frac{25}{49}\begin{bmatrix} 24 & 25 \\ 25 & 24 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 172 \\ 171 \end{bmatrix}$.

٧-٣-٣ $Hx = x - (x-y)\,\frac{2(x-y)^Tx}{(x-y)^T(x-y)} = x - (x-y) = y$. لذا فإن $H(Hx) = Hy$ هي $x = Hy$.

٧-٣-٤ $\sigma = 5, v = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix}, H = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$.

٧-٣-٥ $U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} = U^{-1},\ U^{-1}AU = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ -5 & \frac{9}{25} & \frac{12}{25} \\ 0 & \frac{12}{25} & \frac{16}{25} \end{bmatrix}$.

٧-٣-٦

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = Q_0R_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, A_1 = R_0Q_0 = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 14 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$$

٧-٣-٧ $\begin{bmatrix} \cos\Theta & \sin\Theta \\ \sin\Theta & 0 \end{bmatrix} = QR = \begin{bmatrix} \cos\Theta & -\sin\Theta \\ \sin\Theta & \cos\Theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \cos\Theta\sin\Theta \\ 0 & -\sin^2\Theta \end{bmatrix}$

$RQ = \begin{bmatrix} c(1+s^2) & -s^3 \\ -s^3 & -s^2c \end{bmatrix}$.

٧-٣-٨ Aقائمة أي $Q = A,\ R = I$ و $RQ = A$ من جديد .

٧-٣-٩ أفرض أن $(Q_0 \dots Q_{k-1})(R_{k-1} \dots R_0)$ هو التحليل QR لـA^k، الذي هو حتماً صحيح إذاكان $k = 1$. بالإنشاء $A_{k+1} = R_k Q_k$ أو $R_k = A_{k+1} Q_k^T = Q_k^T \dots Q_0^T A Q_0 \dots Q_k Q_k^T$ بالضرب من اليمين بـ$(R_{k-1} \dots R_0)$ ، واستخدام الفرض نجد $R_{R'} \dots R_o = Q_R^T \dots Q_o^{TA^{k-1}}$ ؛ بعدحذف Q من الطرف الأيسر، نجد النتيجة المطلوبة من أجل A^{k+1} .

٧-٤-١ $$D^{-1}(-L-U) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}, \mu=0, \pm 1/\sqrt{2}\ ; (D+L)^{-1}(-U) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

القيم الذاتية $0, 0, 1/2$ ؛ ، حيث $\omega_{opt} = 3 - 2\sqrt{2}$ مع $\lambda_{max} = 3 - 2\sqrt{2} \approx 0.2$.

٧-٤-٢ لـ J العناصر $\frac{1}{2}$ على طول القطرين المجاورين للقطر الرئيسي، وأصفار في بقية المواقع ؛ $Jx_1 = \frac{1}{2}(\sin 2\pi h, \sin 3\pi h + \sin \pi h, \dots) = (\cos\pi h)x_1$

٧-٤-٣

$$Ax_k = (2 - 2\cos k\pi h)x_k ;\ Jx_k = \frac{1}{2}(\sin 2k\pi h, \sin 3k\pi h + \sin k\pi h, \dots) = (\cos k\pi h)x_1$$

٧-٤-٤ لايمكن للدائرة حول a_{ii} أن تصل إلي الصفر إذاكان نصف قطرها r_i أصغر من $|a_{ii}|$ ؛ لذا ليس الصفر قيمة ذاتية ولا يمكن لمصفوفة قطرها مهيمن، أن تكون شاذة .

٧-٤-٥ $$J = -\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & 0 \end{bmatrix}$$ ؛ أنصاف الأقطار هي $r_1 = \frac{2}{3}, r_2 = \frac{1}{4}, r_3 = \frac{4}{5}$ ،

مراكز الدوائر عند الصفر، لذا جميع $|\lambda_i| < 1$.

٧-٤-٧ $-D^{-1}(L+U)=\begin{bmatrix} 0 & -b/a \\ -c/d & 0 \end{bmatrix}, \mu=\pm\left(\frac{bc}{ad}\right)^{1/2}; -(D+L)^{-1}U=$

$\begin{bmatrix} 0 & -b/a \\ 0 & bc/ad \end{bmatrix}, \lambda=0, bc/ac; \lambda_{max}=\mu^2_{max}$.

الباب الثامن

٨-١-١ تقع القرنات في $(0,6), (2,2), (6,0)$؛ أنظر الشكل ٨-٤ .

٨-١-٢ يكون $x+y$ أصغرياً عند $(2,2)$ بتكلفة 4؛ $3x+y$ أصغري عند $(6,0)$ بتكلفة 6 ؛ النهاية الصغرى لـ $x-y$ هي $-\infty$، حيث $x=0, y\to\infty$.

٨-١-٣ تعطي القيود $3(2x+5y)+2(-3x+8y)\le 9-10$ ، أو $31y\le -1$ ألأمر الذي يعارض $y\ge 0$.

٨-١-٤ خذ x و y متساويين وكبيرين جداً .

٨-١-٥ $x\ge 0, y\ge 0, x+y\le 0$ تقبل النقطة $(0,0)$ فقط .

٨-١-٦ المجموعة الملائمة مثلث متساوي الأضلاع واقع في المستوي $x+y+z=1$، تقع قرناتها في $(x,y,z)=(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$؛ تعطي القرنة الأخيرة القيمة العظمى 3 .

٨-١-٧ $x=z=20{,}000; y=60{,}000$

٨-٢-١ حالياً $x_4=4$ و $x_5=2$ هما الأساس والتكلفة صفر. سيكون المتغير الداخل x_3، ليختصر التكلفة . المتغير الباقي سيكون x_5 ، لأن $2/1$ أصغر من $4/1$. بسبب وجود x_3 و x_4 في الأساس، تعطي القيود

$x_3 = 2, x_4 = 2$، وتصبح التكلفة عندئذ $x_1 + x_2 - x_3 = -2$.

٨-٢-٢ عزل x_3 في القيد الثاني يعطي $x_3 = 2 - 3x_1 - 5x_2 - x_5$ بتعويض ذلك في دالة التكلفة وفي القيدالأول، تكون المسألة في القرنة الجديدة هي: إيجاد النهاية الصغرى لـ $-2 + 4x_1 + 6x_2 + x_5$. لما كانت المعاملات 4,6,1 موجبة، فإن النهاية الصغرى تظهرعندما يكون $x_1 = x_2 = x_5 = 0$ ؛ إننا من قبل في القرنة المثلى. بقول آخر اختبار التوقف $r = (4, 6, 1) \geq 0$ قد نجح، و-2 هي التكلفة الأصغرية .

٨-٢-٣ $r = [1 \quad 1]$ ، لذا القرنة أمثلية .

٨-٢-٤ $\begin{bmatrix} B & N & b \\ c_B & c_N & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 6 \end{bmatrix}$; ،

$r = [3 \quad -1]$ لذا يدخل العمود الثاني من N في الأساس ؛ هذا العمود هو ، و $u = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ و $B^{-1}u = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$ سالبة، لذا فإن الضلع لانهائي الطول والنهاية الصغرى للتكلفة هي $-\infty$.

٨-٢-٥ عند P $r = [-5, \quad 3]$ وعند Q $r = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ وعند R ، $r \geq 0$.

٨-٢-٦ (أ) الزوج $x = 0, w = b$ غير سالب، إنه يحقق $Ax + w = b$ وإنه أساسي لأن $x = 0$ تشارك بـ n مركبة صفرية . (ب) المسألة الإضافية تنتهي إلى النهاية الصغرى w_1، شرط $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, w_1 \geq 0, x_1 - x_2 + w_1 = 3$. متجه مرحلتها الأولي هو $x_1 = x_2 = 0, w_1 = 3$ ؛ متجهها المثالي هو $x_1^* = 3, x_2^* = w_1^* = 0$. تقع القرنة في $x_1 = 3, x_2 = 0$؛ المجموعة الملائمة مستقيم ينطلق نحو الأعلى من هذه النقطة بميل يساوي الواحد .

٨-٢-٧ يصبح اختبار التوقف $r \le 0$ ؛ إذافشل ذلك وكانت المركبة i هي الكبرى فإن هذا العمود من N يدخل الأساس ؛ القاعدة ٨ جـ التي تتعلق بترك المتجه الأساس ، تبقى نفسها .

٨-٢-٨ في قرنة ، يصبح اثنان من القيود متساويتين وتتحقق الثلاثة الباقية . لذا فإن القرنتين هما $x_1 = 3, x_2 = 3$ و $x_1 = 12, x_2 = 0$. التكلفة 9 و 24 ، لذا فإن القرنة الأولى مثالية .

٨-٢-٩ $BE = B[\dots v \dots] = [\dots u \dots]$ ، لأن $Bv = u$.

٨-٢-١٠ على x_2 أن يزداد حتى $x_2 = 2$ حيث $x_4 = 0$ و $x = (0, 2, 14, 0)$. نصل إلى النهاية الصغرى $\frac{3}{2}x_1 + \frac{1}{6}x_4 - 2 = -2$ بخطوة واحدة .

٨-٢-١١ $Ax = 0 \Rightarrow Px = x - A^T(AA^T)^{-1}Ax = x$.

٨-٢-١٢ $P^2 = P, P^T = P \Rightarrow -sc^TPc = -sc^TP^TPc = -s(Pc)^TPc = -s\|Pc\|^2$

٨-٢-١٣ (أ) عند $P = (3, 0, 0)$ يكون $c^Tx = 15$ ؛ عند $Q = (0, 3, 0)$ يكون $c^Tx = 12$ ؛ عند $R = (0, 0, 3)$ يكون $c^Tx = 24$ ؛ لذا c^Tx تكون في نهايتها الصغري عند $(0, 3, 0)$. (ب) $s = \frac{3}{7}$, $Pc = (-\frac{2}{3}, -\frac{-5}{3}, \frac{7}{3})$.

٨-٢-١٤ عندما $s = \frac{3}{7}(0.98) = 0.42$ ، فإن الخطوة تنتهي عند

$$(1.28, 1.70, 0.02).\ D = \begin{bmatrix} 1.28 & & \\ & 1.70 & \\ & & 0.02 \end{bmatrix}.$$

٨-٢-١٥ $AD^2A^Ty = AD^2c$ تصبح $4.53y = 19.76$ أو $y = 4.36$.

$$PDc = (0.82, -0.61, 0.07) \Rightarrow s = 0.98/0.82 = 1.20 \Rightarrow X^2 = e - sPDc = (0.02, 1.73, 0.92) \Rightarrow x^2 = DX^2 = (0.03, 2.94, 0.02)$$

٨-٣-١ إنهاء $4y_1 + 11y_2$ إلى الصغرى بـ

$$y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ 2y_1 + y_2 \le 1,\ 3y_2 \le 1;\ x_1^* = 2, x_2^* = 3, y_1^* = \tfrac{1}{3}, y_2^* = \tfrac{1}{3}.$$

التكلفة = ٥ .

٨-٣-٢ إنهاء $3x_1$ إلى النهاية الصغرى، ضمن الشروط $x_1 \geq 0, x_1 \geq 1; y_1^* = 0, y_2^* = 3, x_1^* = 1$، التكلفة ٣ .

٨-٣-٣ المرافق ينهي yb إلى نهايتهاالعظمى بـ $yI \leq c$. لذا فإن $x = b$ و $y = c$ ملائمتان وتعطيان القيمة ذاتها للتكلفة في المسألة الأصليةوالمسألة المرافقة؛ إستناداً إلى ٨ و ويجب أن تكونا مثاليتين. إذاكان $b_1 < 0$ فإن x^* المثالي قدتحول إلى $(0, b_2, \ldots, b_n)$ و $(0, c_2, \ldots, c_n)$. y^* .

٨-٣-٤ $A = [-1], b = [1], c = [0]$ ليست ملائمة ؛ المرافقة تجعلy في نهايته العظمى بـ$0 \geq y$ و $-1y \leq 0$، وهي غير محدودة .

٨-٣-٥ $b = [0 \quad 1]^{\mathrm{T}}, c = [-1 \quad 0]$.

٨-٣-٦ إذا كان xكبيراً جداً ، فإن $Ax \geq b$ و $x \geq 0$؛ إذا كان $y = 0$ فإن $yA \leq c$ و $y \geq 0$. لذا فإنهما أمثلان معاً .

٨-٣-٧ لما كان $cx = 3 = yb$، فإن y و x أمثلان إستناداً إلى **٨ و** .

٨-٣-٨ $Ax = [1 \quad 1 \quad 3 \quad 1]^{\mathrm{T}} \geq b = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^{\mathrm{T}}$، بمتراجحة دقيقة في المركبةالثالثة ؛ لذافإن على المركبة الثالثة لـ y أن تكون صفراً بصورة مشابهة $[1 \quad 1 \quad 1 \quad 1] \leq c = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 3]$، وإن المتراجحة االدقيقة تجعل $x_4 = 0$.

٨-٣-٩ $x^* = [1 \quad 0]^{\mathrm{T}}, y^* = [1 \quad 0]$ بـ $y^*b = 1 = cx^*$. المتراجحة الثانية في كل من $Ax^* \geq b$ و $y^*A \leq c$ دقيقة، لذا فإن المركبة الثانيةلكل من y^* و x^*تساوي الصفر .

٨-٣-١٠ $Ax = b$ تعطي $yAx = yb$، سواء أكان $y \geq 0$ أم لا ؛ $yA \leq c$ يعطي $yAx \leq cx$ لأن $x \geq 0$. بالمقارنة $yb \leq cx$.

٨-٣-١١ (أ) $x_1^* = 0, x_2^* = 1, x_3^* = 0, c^{T}x = 3$ (ب) إنه الربع الأول مقطوع برباعي الوجوه في القرنة (جـ) إجعل y_1 في نهايته العظمى، بشرط $y_1 \geq 0, y_1 \leq 5, y_1 \leq 3, y_1 \leq 4$ ؛ $y_1^* = 3$.

٨-٣-١٢ المستويات $cx = \text{const}$ مائلة قليلاً ، لكن أول قرنة تلاقيها من المجموعة الملائمة هي السابقة نفسها .

٨-٣-١٣ كما في البند (٨-١)، المرافقة تنهي p 4إلى نهايتهاالعظمى شرط $p \leq 2, 2p \leq 3, p \geq 0$. الحل هو $p = \$1.50$، سعرالظل للبروتين (ذلك هوسعره في اللحم، في الحمية ا المثالية). السعر المخفض للزبدة هو $\$2 - \$1.50 = 50$ cents ؛ إنه موجب والزبدة ليست من الحمية المثالية .

٨-٣-١٤ تولدالأعمدة مخروطاً واقعاً بين الجزء الموجب من محو ر x والمستقيم $x = y$. في الحالة الأولى $x = (1.2)^{T}: y = (1, -1$ تحقق البديل .

٨-٣-١٥ أعمدة $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ أو $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

٨-٣-١٦ خذ $y = [2 \ \ -1]$ ؛ عند ئذ $yA = 0, yb \neq 0$.

٨-٢-١٧ خذ $y = [1 \ \ -1]$ ؛ عندئذ $yA \geq 0, yb < 0$.

٨-٣-١٨ $yA \geq 0$ تعطي $yAx \geq 0$ ؛ $Ax \geq b$ تعطي $yAx \leq yb < 0$.

٨-٤-١ التدفق الأعظمي١٣ بالمقطع الأصغري الفا صل بين العقدة ٦ عن بقية العقد .

٨-٤-٢ التدفق الأعظمي ٨ بالمقطع الأصغري الذي يفصل العقد ١-٤ عن العقد ٥-٦.

٨-٤-٣ بزيادة السعة في الأنابيب من العقدة ٤ إلى العقدة ٦ أو من العقدة ٤

إلى العقدة ٥ ستحصل أكبر زيادة في التدفق الأعظمي . يزداد التدفق الأعظمي من ٨-٩ .

٨-٤-٤ أكبر تدفق من العقدة ١ إلي العقدة ٤ هو ٣ .

٨-٤-٥ نفرض أن سعة جميع الأضلاع تساوي الواحد . عدد الأضلاع الأعظمي التي تفصل s عن t هو التدفق الأعظمي . عدد الأضلاع الأصغري التي تفصل s عن t هو التكلفة الأصغرية (لأن لكل ضلع سعة تساوي الواحد) . لذا النهاية العظمى للتدفق = النهاية الصغري للمقطع .

٨-٤-٦ مجموعة عظمى للزواج من A هي 4-2 ,2-3 ,1-2 , 3-1 ؛ 1-3 تكافؤ تام من أجل B هو 1-5 , 3-4 , 5-3 , 4-2 , 2-1 .

٨-٤-٧ الأسطر 1,4,5 ؛ للمصفوفة الجزئية الناتجة عن الأسطر 1,4,5 والأعمدة 1, 2, 5 ، تحقق $3+3>5$.

٨-٤-٨ يحتاج إلى أربعة مستقيمات . الزواجات الـ k تحتاج إلى k من الوحدان الواقعة في أسطر و أعمدة مختلفة . يأخذ k من المستقيمات لتغطية هذه الوحدان لذا يحتاج إلى k ، من المستقيمات ، على الأقل ، لتغطية جميع الوحدان .

٨-٤-٩ (أ) للمصفوفة n 2 من الوحدان التي لايمكن تغطيتها بأقل من n مستقيماً لأن كل مستقيم يغطي تماماً واحدين .

(ب) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

٨-٤-١٠ بتطلب ذلك ، على الأقل ، ثلاثة مستقيمات لتغطية الوحدان التي عددها ١٥ .

٨-٤-١١ الأمر واضح .

٨-٤-١٢ أقصر طريق من S إلى tهو 1-2-5-6 أو 1-3-5-6 . إحدى أصغر الأشجار هي 1-2-4-3-5-6 .

٨-٤-١٣ 1 - 3, 3 - 2, 2 - 5, 2 - 4, 4 - 6 و 3 - 1, 2 - 3, 4 - 2, 6 - α, 5 - 2

٨-٤-١٤ (أ) تنطلق الطريقة الجشعة بـ n من الأشجار المختلفة . في كل خطوة تختار شجرة T وتضيف ضلع تكلفة أصغرية e . أفرض، في خطوة ما أن الشجرات ا الموجودة (بما في ذلك T) ما كانت جزءاً من شجرة ممتدة أصغرية S ، لكن الضلع الجديد e (الوارد على T) ليس جزءاً من S . من المؤكد أن على S أن تحوى ضلعاً آخر يصل عقدة من داخل T إلى عقدة خارجة عن T ؛ وإلا فإن S ليست ممتدة . ومن المؤكد أن هذا الضلع e' ليس أقصر من e ، الذي كان الضلع الوارد على T ذا التكلفة الأصغرية . لذا يمكننا حذف e' من S وإبداله بـ e دون زيادة في الطول الكلي . S هي أيضاً شجرة ممتدة أصغرية . (ب) ليس من الضروري أن يحوي الطريق الأكثر قصرا الضلع الأقصر ! أنظر ٨-٤-٢ .

٨-٤-١٥ (أ) الأسطر 1,3,5 (ب) الأعمدة 1,3,5 (ج) المصفوفة الجزئية الناتجة عن الأسطر (1,3,5) والأعمدة (1,3,5) . (د) السطران 2,4 والعمودان 2,4 .

٨-٤-١٦ اجعل x_{16} في نهايته العظمى ضمن

الشرط $\begin{bmatrix} A & 0 \\ I & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ C \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} \geq 0$.

٨-٥-١ $-10x_1 + 70(1 - x_1) = 10x_1 - 10(1 - x_1)$, او $x_1 = \frac{4}{5}, x_2 = \frac{1}{5}$; $-10y_1 + 10(1 - y_1) = 7(y_1 - 10(1 - y_1)$ أو $y_1 = \frac{1}{5}, y_2 = \frac{4}{5}$ ؛ معدل الربح ٦ .

٨-٥-٢ X يضمن ربح ٢ باختيار العمود الثاني دائماً ؛ Y يضمن خسارة لا تزيد

عن ٢ باختيار السطر الأول . لذا $[0 \quad 1]$ = y^* و $x^* = [0 \quad 1]^T$.

٨-٥-٣ يمكن لـX ضمان ربح a_{ij} باختيار العمود J ، لأن ذلك أصغر عنصر في هذا العمود . يمكن لـY أن يخسر ما لا يزيد عن a_{ij} با ختيار السطر i ، لأن ذلك أكبر عنصر في هذا السطر . في التمرين السابق ، كانت $a_{12} = 2$ توازنا من هذا النوع ، لكن إذا بادلنا بين 2 و 4 الواقع تحته ، فلن يوجد عنصر يتمتع بهذه الخا صة وتتطلب خطة مختلطة .

٨-٥-٤ يظهر التقاطع y^* عندما $y + 3(1 - y) = 3y + 2(1 - y)$ ، أي $y^* = \frac{1}{3}$ so. أعلى (أصغر قيمة عظمى) هي $\frac{7}{3}$.

٨-٥-٥ أفضل خطة لـ X هي تركيب المستقيمين لينتج مستقيم أفقي بارتفاع $\frac{7}{3}$ ، ضامناً هذا المبلغ . التركيب هو $\frac{2}{3}(3y + 2(1 - y)) + \frac{1}{3}(y + 3(1 - y)) = \frac{7}{3}$ لذا X يلعب بالأعمدة بالتواترات $\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}$.

٨-٥-٦ $x^* = \left[\frac{1}{2} \quad 0 \quad \frac{1}{2}\right]^T$ ، $y^* = \left[\frac{2}{3} \quad \frac{1}{3}\right]$ ، القيمة صفر .

٨-٥-٨ إذا كان $x = (\frac{6}{11}, \frac{3}{11}, \frac{2}{11})$ ، فإن X سيربح $\frac{6}{11}$ مقابل أي خطة لـ Y ؛ إذا كان $y = (\frac{6}{11}, \frac{3}{11}, \frac{2}{11})$ ، فإن Y سيخسر $\frac{6}{11}$ مقابل أي خطة لـ X ؛ هذا التوازن بحل اللعبة .

٨-٥-٩ النهاية العظمي الداخلية هي الأكبر من y_1 و y_2 ؛ نكثف كل x على هذا الواحد . عندئذ ، إنهاء هذا الشرط الكبير $y_1 + y_2 = 1$ إلى النهاية الصغرى ، يعطي الجواب $\frac{1}{2}$.

٨-٥-١٠ في (5) ، $\min yAx^* \le y^*Ax^*$ ، لأن النهاية الصغري على كل y ليست أكبر من قيمة الحالة الخاصة y^* ؛ بصورة مشابهة من أجل

$y^*Ax^* \le \max y^*Ax$ إذا كانت المساواة صحيحة في (5) ،فإن $yAx^* = y^*Ax^*$، لذا يكون ذلك، من أجل كل y، أصغر أو يساوي yAx^*؛ هذا هو النصف الثاني من (4)، وينتج النصف الأول من $\max y^*Ax = y^*Ax^*$.

٨-٥-١١ $Ax^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^T$ ، $yAx^* = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2$ الذي يساوي 1/2 من أجل كل خطة لـ Y ؛ $y^*A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & -1 \end{bmatrix}$ و $y^*Ax = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x_3 - x_4$، الذي لا يمكن أن يزيد عن $\frac{1}{2}$ ؛ يقع بينهما $y^*Ax^* = \frac{1}{2}$.

٨-٥-١٣ واضح .

٨-٥-١٤ $x^* = (\frac{7}{9}, \frac{2}{9}), y^* = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$؛ معدل الربح $\frac{10}{3}$.

الملحق (أ)

أ-١ $[0]_{m\times n}^+ = [0]_{n\times m}$ ، $[0]_{m\times m} = I_{m\times n}[0]_{m\times n}I_{n\times n}$.

أ-٢

$$A^+ = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B^+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C^+ = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

أ-٣ معكوسها الكاذب $Q^+ = Q^T$.

أ-٤ (أ) $A^TA = \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 10 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$,

$$S = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(ب) $Q = AS^{-1} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, S' = AQ^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 18 & 4 \\ 4 & 12 \end{bmatrix}$

أ-٥ الحل العام $(1, 1-E, E) = \bar{x}$ ؛ الحل ذو الطول الأصغري $x^{+} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

أ-٦ (أ) بأعمدة مستقلة ، فضاء الأسطر هو جميع $A^{T}Ax^{+} = A^{T}b$;R^{n} واضح (ب) $A^{T}(AA^{T})^{-1}b$ واقع في فراغ الأسطر لأن جداء A^{T} بأي متجه يقع في هذا الفضاء؛ $A^{T}Ax^{+} = A^{T}AA^{T}(AA^{T})^{-1}b = A^{T}b$.

أ-٧ $A = Q_1 \Sigma Q_2^{-1} = Q_1 Q_2^{-1} Q_2 \Sigma Q_2^{-1} = QS', \ Q = Q_1 Q_2^{-1}, \ S' = Q_2 \Sigma Q_2^{-1}$

أ-٩ $A^{+}b$ هو U^{T} مضروباً بمتجه ما ، لذا يبقى في فضاء الأسطر $\underline{U}$ = row spac الفضاء الصفري لـ A . كذلك $A^{+}AA^{T}b = \underline{U}^{T}\underline{L}^{T}\underline{L} \ \ \underline{U}^{T} (\underline{U}\,\underline{U}^{T})^{-1}(\underline{L}^{T}\underline{L})^{-1}\underline{L}^{T}b = A^{T}b$

أ-١٠ $A = Q_1 \Sigma Q_2^{T} \Rightarrow A^{+} = Q_2 \Sigma^{+} Q_1^{T} \Rightarrow AA^{+} = Q_1 \Sigma \Sigma^{+} Q_1^{T} \Rightarrow$

$(AA^{+})^{2} = Q_1 \Sigma\Sigma^{+}\Sigma\Sigma^{+} Q_1^{T} = Q_1 \Sigma\Sigma^{+} Q_1^{T} = AA^{+}$ ، السبب ذاته من أجل $A^{+}A; AA^{+}$ و $A^{+}A$ يسقطان على فضاء الأعمدة وفضاء الأسطر بالترتيب .

الملحق ب

ب-١ $J = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

ب-٢ $\frac{du_2}{dt} = 8e^{8t}(tx_1 + x_2) + e^{8t}x_1, Au_2 = e^{8t}(tA x_1 + Ax_2) = e^{8t}(8tx_1 + 8x_2 + x_1)$

ب-٣ $B^2 = 0$ لأن $e^{Bt} = \begin{bmatrix} 1 & t & 2t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = I + Bt$

ب-٤ كل مصفوفة A مشابهة لمصفوفة جوردان $J = M^{-1}AM$، واستناداً إلى الجزء (أ). $J = PJ^{T}P^{-1}$ (هنا P مكونة كتلة فكتلة من تباديل القطر الثانوي مستخدماً ذلك على كل كتلة J_i). لذا A مشابه لـ A^T:

$M^{-1}AM = J = PJ^{T}P^{-1} = PM^{T}A^{T}(M^{T})^{-1}P^{-1}A^{T}$ أو

$$A = (MPM^{T})A^{T}(MPM^{T})^{-1}$$

ب-٥ $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$.

ثبت المصطلحات

عربي ـ إنكليزي

أ

إتمام إلى مربع	Complete square
أثر	Trace
إحداثي	Coordinate
قطبي	Polar
إحصاء	Statistics
اختبار التوقف	Stopping test
أساس	Basis
قائم	Orthogonal
معتاد	Standard
استقلال	Independence
خطي	Linear
أساسي	Primal
أسي	Exponential
خالص	Pure

أسعار الظل	Shadow price
إسقاط (مسقط)	Projection
إشارة قيمة ذاتية	Sign of eigenvalue
اشتقاق	Differentiation
أصغر قيمة عظمى	Minimax
إضافي	Complement
أعداد تخيلية	Imaginary number
أعظمي	Maximal
اقتصاد	Economic
أمثل	Optimal
أمثلية	Optimality
انتشار	Diffusion
انعكاس	Reflection

ب

بديل	Alternative
برمجة فعاله	Diynamic programming
خطية	Linear
بيان	Graph

ت

تافه	Trivial
تباين	Variance
تبديل	Permutation
تبديلي	Commutative
تجميع	Summation

Asociative	تجميعي
law	قانون
Factorization	تحليل
Triangular	مثلثي
Reduced	مختزل
Singular value	القيمة الشاذة
Shift	تحوير
Transformation	تحويل
Linear	خطي
Discrete	منقطع
Superposition	تداخل
Conjugate gradient	تدرج مشتق
Oscillation	تذبذب
Regression	تراجع
Quadratic	تربيعي
Degenaracy	تردي
Combination	تركيب
of columns	أعمدة
of rows	أسطر
Tansor notation	تمثيل تانسوري
Isomorphism	تشاكل (توافقي)
perturbation	تشويش
Back subistitution	تعويض تراجعي
Change of basis	تغيير الأساس
variables	المتغيرات
Intersections	تقاطع

Diagonalization	تقطير
Diagonalizable	قابل للتقطير
Coast	تكلفة
Reduced	مخفضة
function	دالة تكلفة
Cosine	جيب التمام
Frequency	تو تر
Equilibrum	توازن
Congruence	توافق
Distributive	توزيعي

ث

Dual	ثنوي (مرافق)
Duality	ثنوية

ج

product	جداء
Inner	داخلي
Column time row	عمود بسطر
of pivots	محاور
Table	جدول
Square root	جذر تربيعي
Root of unity	جذور الوحدة
Direct sum	جمع مباشر
Addition of vectors	متجهات
Potential	جهد

جوردان	Jordan

ح

حذف	Elimination

د

داخل - خارج	Input-output
دالة ذاتية	Eigen function
دالة سقف	roof
درجة إختيار	Degree of freedom
دوارة	Circulant
دوران	Rotation
مستوي	Plane
دوري تقريبا	Almost periodic
دائرة وحدة	Unit circle
ديكارت	Decartes

ر

رايلي	Rayleigh
نسبة	quotiant
ريتز	Ritz
رباعي	Quadratic
ربح	Interest
مركب	Compound
رتبة	Rank

فعلية	Effective
واحد	one
رمز	Notation
رونسكيان	Wronskian

ز

زمرة	Group
زمن كثيرة حدود	Polynomial time
زيادة استرخاء	Overrelaxation

س

سطرفي كل مرة	Row at a time
سعة	Capacity
سلسلة مصفوفات	Chain of matrices
سيئة الشروط	ill-conditioned

ش

شاذة	Singular
قيمة	value
شبكة	Network
شجرة	Tree
ممتدة	Spanning
شرط حدي	Boundery condition
شكل جاكوبي	Jacobian form
شكل جداء	Product

ص

صغيرة	Minor
صفرية	Nullity
صورة سطر	Row picture
صورة عمود	Column
صيغة اولر	Euler's formula
جوردان	Jordan

ض

ضرب الكتل	Block multiplication
ضرب من اليسار	Premultiplication

ط

طاقة	Energy
طريقة	Method
الإفراد	Simplex
جاكوبي	jacobi
جشعة	Greedy
العنصر المحدود	Finite element
القوى	Power
كارماركر	Karmarker
نيوتن	Newton

ع

عامل مرافق	Cofactor

عدد شرطي	Condition number
مركب	Complex
مرافق	Conjugate
عروة	Loop
عرض حزام	Band width
عقدة	Node
عمودفي كل مرة	Column at a time
عمودي	Perpendicular

غ

غاوس	Gauss
حذف	Elimination
غير تام	Incomplete
متجانس	Inhomogeneous
متسق	Inconsistent
مستقر	Vnstable
مستقل	Dependent
معرف	Indefinite
غير معين	Underdetermined

ف

فاشل	Breakdown
فاندر موند	Vandermond
فرق محدود	Finite difference
مصفوفة	Matrix
فضاء	Space

أسطر	Row
أعمدة	Column
دوال	Function
ذاتي	Eigenspace
صفري	Nullspace
يساري	Left
هيلبرت	Hilbert
جزئي	Subspace
أساسي	Fundamental
متعامد	Orthogonal
فروبينيوس	Frobenius
فيليبوف	Filipove
فورتران	Fortran
فوريه	Fourrier
فيبو ناتشي	Fibonacci
فون نيومان	Von Neumann

ق

قابل للحل	Solvable
قطع ناقص	Ellipse
مجسم	Ellipsoid
خالصة	Diagonal
قوة خالصة	Pure Power
قوة مصفوفة	of matrix
قيد	Constraint
مساواة	Equality

قيمة ذاتية	Eigenvalue
مكررة	Repeated
صفرية	Zero

ك

كتلة (مصفوفة)	Block
أصفار	of zeros
كثيرة حدود	polynomial
مميزة	Characteristic
زمن	time

ل

لا متغير	Invariant
لوجاندر	Legendre

م

مبادلة	Permutation
أسطر	Row exchange
مبدأ النهاية الصغرى	Minimum principle
متجانس	Homogenious
متجه	Vector
ذاتي	Eigenvector
معمم	Generalized
وحدة	unity
فضاء	space
متجهات ذاتية متعامدة	Orthogonal eigenvector

Inequality	متراجحة
Schwartz	شوارتز
Triangular	المثلث
Taylor series	متسلسلة تيلور
Fourrier	فوريه
Orthonormal	متعامد نظامي
Entering variable	متغير داخل
Slack	متراخي
Leaving	باقي
Basis	أساسي
Companion	مرافق
Orthogonal complement	متمم عمودي
Mean	متوسط
Arithmetic	حسابي
Free variable	مجهول(متغبر) حر
Determinant	محددة
Jacobian	جاكوبي
Weighted	محمل
Axis	محو ر
Principal	أساسي
Partial pivoting	محورة جزئبة
Cone	مخروط
Range	مدى
Companion	مرافق
transpose	منقول
Least squares	مربعات أصغرية

مرتبة	Rank
مسافة	Distance
مسألة	Problem
حمية	Diet
الزواج	Marriage
القيم الذاتية المعممة	Generalized eigenvalues
النقل	Transportation -
مستقر	Stable
حياديا	Neutrally -
مستقيم	Straight line
مستوي مركب	Complex plan
مشابه	Similar
مصفوفة	Matrix
انتقال	Transportation
استهلاك	Consumption
اسقاط	Projection
أسية	Exponential
انعكاس	Reflection
أولية	Elementry
التغاير	Covariance
تناظرية	Symmetric
تخالفية	Skew
ثلاثية الأقطار	Tridiagonal
ثنائية القطرين	Bidiagonal
جوردان	Jordan
جزءية	Submatrix -

Circulant -	دوارة
Rotation -	دوران
ill-conditioned -	سيئة الشروط
Singular -	شاذة
Semidefinite -	شبه معرفة
Cofactor -	العوامل المرافقة
Indefinite -	غير معرفة
Nondiagonalizable -	قابلة للتقطير
Nonnegative	سالبة
Nonsingular	شاذة
Finite difference	فرق محدود
Fourier	فوريه
Diagonalizable	قابلة للتقطير
Adjugate	قرينة
Diagonal	قطرية
Mass	الكتل
Markov	ماركوف
Permutation	مبادلة
Triangular	مثلثية
Lower	دنيا
Upper	عليا
Echelon	مدرجة
Rectangular	مستطيلة
Similar	مشابهة
Coefficient	معاملا ت
Nilpotent	معدومة القوة

معرفة إيجابيا	Positive definite
معيبة	Defective
مكيفة مسبقا	Preconditioner
من الرتبة واحد	Rank one
موجبة	Positive
نظامية	Normal
النقاط الخمس	Five-point
هيرميتية	Hermitian
واحدية	Unitary
الورود	Incidence
معكوس	Inverse of
منقول	Transpose of
مصفوفة جزئية	Submatrix
أساسية	Fundamental
صفرية	Zero
مضروب	Multiplier
مضاريب لاغرانج	Lagrang' s
معادلة تفاضلية	Differential equation
الحرارة	Heat
فرق	Difference
موجة	Wave
معكوس	Inverse
معكوس جداء	of product
كاذب	Pseudoinverse
منقول	of transpose
يساري	Left

يميني	Right
مفرط التعيين	Overdetermined

ن

نصف فضاء	Halfspace
نصف القطر الطيفي	Spectral radius
نظرية أصغر قيمة عظمى	Minimax theorem
الطيف	Spectral
نقطة سرجية	Saddle point
نموذج نظامي	Normal mode
نهاية صغرى	Minimum
عظمى	Maximum

هـ

هاوسهولدر	Householder
هيسنبرغ	Hessenberge
هيسيان	Hissian

و

وجود	Existence
وحدانية	Uniquenss
ويلكنسون	Wilkinson

ي

يولد	Span
يونغ	Young

انكليزي - عربي

A

Absolute value	قيمة مطلقة
Addition of vectors	جمع متجهات
Adjugate Matrix	مصفوفة قرينة
Arithmetic mean	متوسط حسابي
Associativel aw	قانون تجميعي

B

Back - substitution	تعويض تراجعي
Band matrix	مصفوفة حزامية
Basic variables	متغيرات أساسية
Bidiagonal	ثنائي القطرين
Block	كتلة
Block elimination	حذف الكتل
Block multiplication	ضرب الكتل
Boundary condition	شرط حدي

C

Chain of matrices	سلسلة مصفوفات
Change of basis	تغيير الأساس
of variables	المتغيرات
Characteristic equation	معادلة مميزة
Checkerboard	رقعة الشطرج
Circulant	دوارة

Cofactor	عامل مرافق
matrix	مصفوفة العوامل المرافقة
Column picture	صورة عمود
space	فضاء أعمدة
vector	متجه عمود
Combinaison of	تركيب أعمدة
of row	أسطر
Commutative	تبديلي
Commute	يبادل
Companion matrix	مصفوفة مرافقة
Complement	إضافي
Complete the square	إتمام إلى مربع
Complex conjugate	مرافق مزكب
Copmplex number	عدد مركب
plane	مستوي
Compound interst	ربح مركب
Condition number	عدد شرطي
Cone	مخروط
Congruance	توافق
Conjugate	مرافق
gradient	تدرج
transpose	إنتقال
Constraind	قيد
Coordinate	إحداثي
Corner	قرنه
Cosine	تمام الجيب

تكلفة	Cost
قاعدة كرامر	Cramer's rule
جداء متصالب	Cross-product
مصفوفة	matrix
مقطع	Cut

D

معيب	Defective
درجة إختيار	Degree of freedom
غير مستقل	Dependent
محددة	Determinant
صيغة محددة	formula
قابل للتقطير	Diagonalizable
تفطير	Diagonalization
مهيمن قطريا	Diagonaly dominant
مسألة حمية	Diet problem
معادلة فرق	Difference equation
تفاضلية	Differential
إشتقاق	Diffderentiation
إنتشار	Diffusion
جمع مباشر	Direct sum
منقطع	Discrete
تحوبل منقطع	transform
مسافة	Distance
قيم ذاتية مختلفة	Distinct eigenvalue
توزيعي	Didtributive

Dual	ثنوي
Duality	ثنوية

E

Edge	ضلع
Effective rank	رتبة فعلية
Eigenfunction	دالة ذاتية
Eigenvalue	قيمة ذاتية
matrix	مصفوفة
Elementry matrix	مصفوفة أولية
Elimination	حذف
Ellipse	قطع ناقص
Ellipsoid	مجسم
Entering variable	متغير داخل
Equality constraintة	قيد مساو
Equilibrim	توازن
Error	خطأ
vector	متجه الخطأ
E uler's formula	صيغة أولير
Even Permutaion	تبديل زوجي
Existence	وجود
Exponential	أسي

F

Factorization	تحليل
Fast Fourier transform	تحويل فوريه السريع

مجموعة ملائمة	Feasible set
الفرق المحدود	Finite difference
مصفوفة	matrix
طريقة العنصر المحدد	Finite element method
مصفوفة النقاط الخمسة	Five-point matrix
الفضاء ات الجزئية الأساسية	Fundamtental subspaces
مصفوفة فوريه	Fourier matrx
متسلسلة	matrix
متغيرات حرة	Free variables
تواتر	Frequency
فروبينيوس	Frobenius

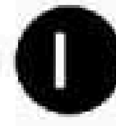
G

لعب	Game
الحذف الغاوسي	Gaussian elimination
حل عام	Genral solution
مسألة القيمة الذاتية المعممة	Generalized eigenvalue problem
متجه ذاتي معمم	Generalized eigenvector
بيان	Graph
خوارزمية جشعة	Greedy algorithm
زمرة	Group

H

نصف فضاء	Halfspace
شرط هول	Hall's condition
معادلة الحرارة	Heat equation

Hermitian matrix	مصفوفة هيرميتية
Hessian	هيسبان
Hilbert matrix	مصفوفة هيلبرت
space	فضاء
Homogeneous	متجانس
Householder	هاوسهولدر



Identity mayrix	مصفوفة محايدة
Ill-conditioned	سيئة الشروط
Imaginary number	عدد تخيلي
Incidence matrixد	مصفوفة ورو
Incomplete	غير تام
Inconsistent	غير متسق
indefinite	غيرمعرف
Infinitee-dimenional	عدد غير منته من الأبعاد
of solutions	الحلول
Inhomogeneous	غير متجانس
Inner product	جداء داخلي
Input - output	داخل- خارج
Integration	تكامل
Intersection	تقاطع
Invariant	لامتغير
Inverse	معكوس
formula	صيغة
of product	جداء

المنقول	of transpose
طريقة القوى العكسية	Inverse power method
قابل للعكس	Invertible

J

طريقة جاكوبي	Jakobi method
محددة	Jacobian determinant
شكل جوردان	Jordan

K

كارماركر	Karmarkar
نواة	Kernel

L

مضاريب لاغرانج	Lagrange multiplier
قانون العطالة	Low of inertia
مربعات أصغرية	Least squares
متغير باق	Leaving variable
معكوس يساري	Left inverse
فضاء صفري	nullspace
لوجاندر	Legendre
تركيب خطي	Linear combination
استقلال	indenpendence
برمجة	programming
تحويل	transformation
عروة	Loop

M

Marriage Problem	مسألة زواج
Matrix	مصفوفة
Adjacency	قرينة
Band	حزامية
Circulant	دوارة
Coefficient	معاملات
Cofactor	عوامل مرافقة
Consumption	استهلاك
Covariance	التغاير
Defective	معيبة
Diagonal	قطرية
Diagonalizable	قابلة للتقطير
Difference	فرق
Echelon	مدرجة
Elementry	أولية
Exponential	أسية
Finite difference	فرق محدود
Fourier	فوريه
Hessenberg	هيسنبرغ
Hilbert	هيلبيرت
Indefinite	غير معرفة
Invertible	قابلة للعكس
inverse	معكوس
Jordan	جودان
Lower triangular	مثلثية دنيا

ماركوف	Markov
كتل(أوزان)	Mass
ضرب	Multiplication
صفرية(معدومة القوة)	Nilpotent
غير قابلة للتقطير	Nondiagonalizable
غبر سالبة	nonnegative
غيرشاذة	Nonsingular
نظامية	Normal
تمثيل	Notation
قائمة	Orthogonal
مبادلة	Permutation
موجبة	Positive
معرفة إيجابياً	definite
إسقاط	Projection
مستطيلة	Rectangular
إنعكاس	Reflection
دوران	Rotation
شبه معرفة	Semidefinite
مشابهة	Similar
شاذة	Singular
هيرميتية تخالفية	Skew-Hermitian
تناظرية تخالفية	Skew-symmetric
تناظرية	Symmetric
إنتقال	Transition
منقول	Transpopse of
ثلاثية الأقطار	Tridiagonal
واحدية	Unintary

M

Mean	متوسط
Minimax	أصغر قيمة عظمى
theorem	نظرية
Minimum	نهاية صغرى
principle	مبدأ النهاية الصغرى
Minor	صغيرة
Multiplier	مضروب

N

Negative definite	معرف سلبياً
Network	شبكة
Neutraly stable	مستقر حيادياً
Newton's law	قانون نيوتن
Method	طريقة
Nontrivial	غير تافه
Norm	نظيم
Normal mode	نموذج نظامي
Nullity	صفرية
Nullspace	فضاء صفري

O

Odd permutation	تبديل زوجي
Operation	عملية
Optimal	أمثل
Orthogonal complement	متمم عمودي

متجه ذاتي	eigenvector
فضاء جزئي متعامد	subspace
تقويم	Orthooanalization
متعامد نظامي	Orthonormal
تذبذب	Oscillation
مفرط التعيين	Oerdetermined
زيادة إسترخاء	Overrelaxation

P

موازي	Parallel
متوازي السطوح	Parallelepiped
متوازي الأضلاع	Parallelogram
محورة جزئية	Partial pivoting
حل خاص	Particular solution
تبديل (مبادلة)	Permutation
عمودي	Perpendicular
تشوبش	Perturbation
محور	Pivot
دوران مستوي	Plane rotation
إحداثيات قطبية	Polar coordinates
تحليل قطبي	polar decomposition
زمن كثيرة حدود	Polinomial time
معرف إيجابياً	Positive definite
جهد	potential
قوة مصفوفة	power of matrix
طريقة القوى	method

preconditioner	مكيف مسبقاً
Premultiplication	ضرب من اليسار
Principal axis	محور أساسي
Product	جداء(حاصل ضرب)
of pivots	محاور
Progection	إسقاط (مسقط)
matrix	مصفوفة
Pseudoinverse	معكوس كاذب
Pure exponencial	أسي خالص
Pure power	قوة خالصة

Q

Quadratic	تربيعي(رباعي)
Quantum mechanic	ميكانيك الكم

R

Range	مدى
Runk	رتبة
one	واحد

S

Slack variable	متغير متراخي
Solvable	قابل للحل
Space	فضاء
Span	يولد
Spanning tree	شجرة ممتدة

Spectral radius	نصف قطر الطيف
theorem	نظرية
Square root	جذر تربيعي
Stable	مستقر
Standard basis	أساس معتاد
Steady state	حالة ثابتة
Stopping test	إختبار التوقف
Straight line	مستقيم
Subspace	فضاء جزئي
Fundamental	أساسي
Intersection	تقاطع
Orthognal	متعامد
Sum	مجموع
squares	مجموع مربعات
Summation	تجميع
Superposition	تداخل

T

Table	جدول
Taylor series	سلسلة تيلور
Tansor notation	تمثيل تانسوري
Trace	أثر
Transformation	تحويل
Transportation probleme	مسألة النقل
Tree	شجرة
Triangle inequality	متراجحة المثلث

Triangular Factorization	تحليل مثلثي
Trivial	تافه

U

Underdetermined	غير معين
Uniqueness	وحدانية
Unit circle	دائرة وحدة
vector	متجه
Upper triangular	مثلثية عليا

V

Value	قيمة
Vandermonde	فاندرموند
Variance	تباين
Vector	متجه
space	فضاء متجهات
Von Neumann	فون نيومن

W

Wave equation	معادلة موجة
Weighted	محمل
Wilkinson	ويلكونسن

Y

Young	يونغ

Z

فيمة ذاتية صفرية	Zero eigenvalue
مصفوفة جزئية	Submatrix

كشاف الموضوعات

ر

ز

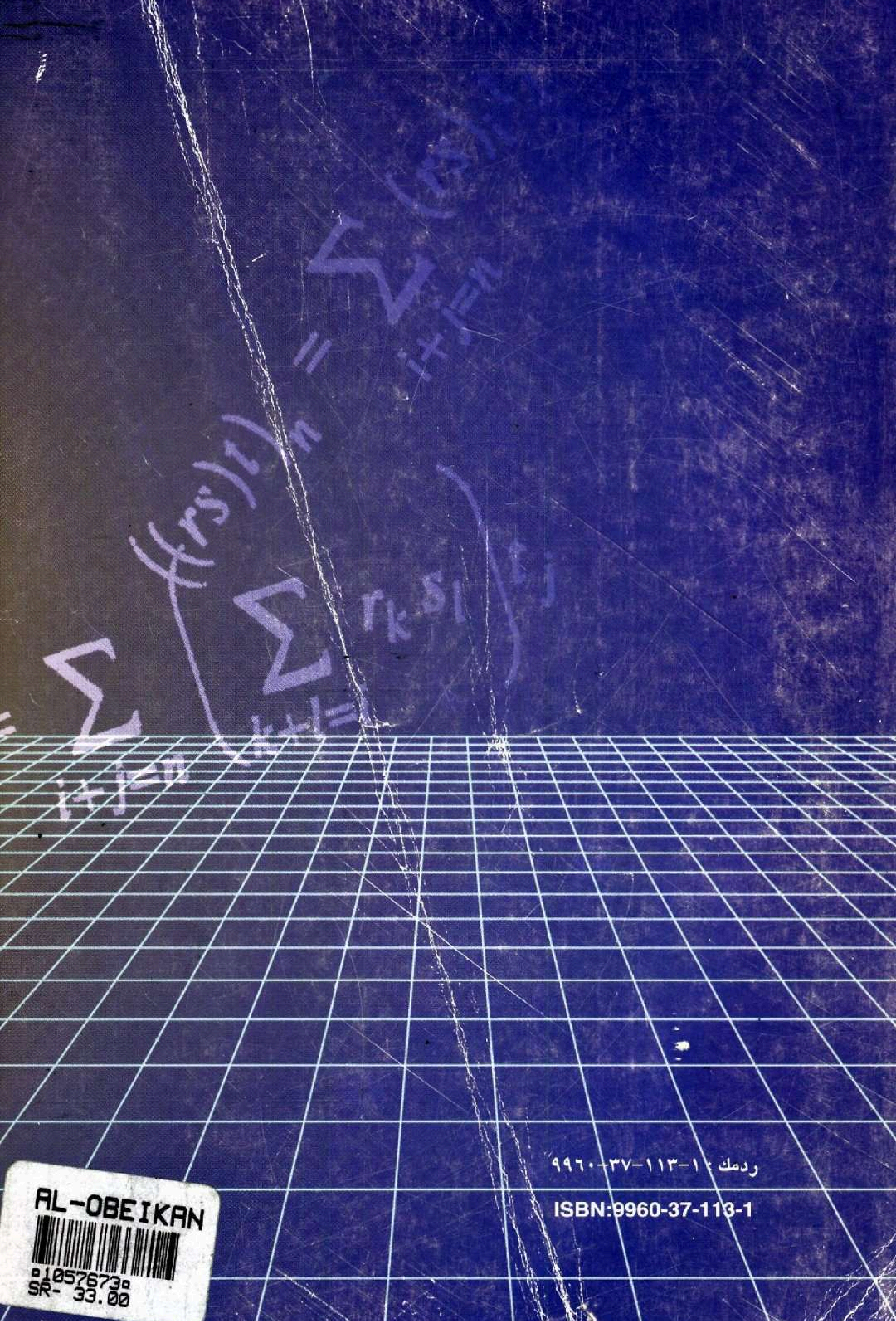
س

ش

ص

ض

ط



ردمك : ١-١١٣-٣٧-٩٩٦٠
ISBN:9960-37-113-1